



Cálculo Diferencial e Integral



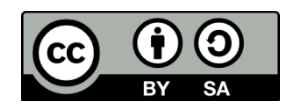
AUTORES

Marta Susana Bonacina
Claudia Mónica Teti
Alejandra Patricia Haidar
Santiago Andrés Bortolato

Cálculo Diferencial e Integral

1a ed. - Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn), 2014. 492 pag.

Primera Edición: Marzo 2014
Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn)
http://www.proyectolatin.org/







Las figuras e ilustraciones que aparecen en el libro son de autoría de los respectivos autores. De aquellas figuras o ilustraciones que no son realizadas por los autores, se coloca la referencia respectiva.



Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su Programa ALFA IIIEuropeAid.

El Proyecto LATIn está conformado por: Escuela Superior Politécnica del Litoral, Ecuador (ESPOL); Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA), Universidad Católica de San Pablo, Perú (UCSP); Universidade Presbiteriana Mackenzie, Brasil(UPM); Universidad de la República, Uruguay (UdelaR); Universidad Nacional de Rosario, Argentina(UNR); Universidad Central de Venezuela, Venezuela (UCV), Universidad Austral de Chile, Chile (UACH), Universidad del Cauca, Colombia (UNICAUCA), Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica (KUL), Universidad de Alcaá, España (UAH), Université Paul Sabatier, Francia (UPS).

Índice general

Prólogo

La docencia en la universidad pública durante más de 40 años, el estudio a lo largo de todos estos años de la problemática del alumno que ingresa, me ha permitido conocer las necesidades tanto de aquellos que llegan temerosos y con pocos conocimientos de matemática como de aquellos otros que lo hacen con una sólida educación y sumamente motivados. Este libro ha sido escrito tratando de contemplar las dificultades con que tradicionalmente tropiezan ambos grupos, aunque estas sean de distinta índole y naturaleza.

El criterio adoptado para la selección, organización y desarrollo de los contenidos es original y está sustentado tanto en los distintos proyectos de investigación en Educación Matemática que hace años venimos desarrollando con el grupo de investigadores que hoy me acompaña como, y particularmente, en un comprometido ejercicio de la docencia. Esto último permitió la "bajada al aula" de los materiales didácticos producto o resultado de la investigación, la corroboración de su efectividad o, en su defecto, su corrección hasta lograrlo. Así, este libro es la recopilación, revisada y corregida una y otra vez, de los apuntes de cátedra y guía de trabajos prácticos oportunamente elaborados para el dictado de las asignaturas a cargo.

El libro es esencialmente un libro de Cálculo para funciones de una variable; en particular Cálculo Diferencial (Capítulos 3 y 4) y Cálculo Diferencial (Capítulos 5 y 6). En los primeros capítulos (1 y 2) se desarrollan los dos conceptos fundamentales del Cálculo: función y límite.
El problema de hallar la función (**f**) que describe un proceso conociendo la velocidad (***f*** ´) ó la aceleración (***f*** ´´) a la que se desarrolla el mismo, es un problema frecuente tanto en investigación como en el ejercicio de la profesión. Más general aún, lo que se conoce o puede llegar a conocer es la relación entre ***f*** y una o más de sus ***derivadas.***
Es decir, lo que se conoce o puede conocer es la Ecuación Diferencial que modeliza el proceso en estudio. Dada entonces la importancia de estas ecuaciones en la modelización de procesos o fenómenos de distintas naturaleza, estimamos conveniente incluir un último capítulo, el de Ecuaciones Diferenciales (Capítulo 7). Este permite trabajar ampliamente todos los conceptos desarrollados previamente, mostrar la utilidad de los mismos en la resolución de problemas y, particularmente, mostrar que la herramienta a usar (derivada o integral) depende de la naturaleza del problema (de allí entonces la importancia de poder detectar el "tipo" de problema a resolver, cuestión en la que se pone especial énfasis a lo largo de los distintos capítulos).

Se ha tratando de exponer las ideas y técnicas matemáticas de la manera más clara posible, de relacionarlas con otras áreas del conocimiento. Se han obviado muchas demostraciones a los fines de brindar mayor espacio y atención a la génesis,

explicación y empleo de los diversos conceptos que se presentan, de ilustrar el papel que juegan en la matemática el escribir, verbalizar, investigar, conjeturar, en definitiva, el pensar críticamente. Se abunda en ejemplos, los cuales tienen por intención preparar para la comprensión de un concepto, brindar modelos para la resolución de problemas y, casi primordialmente, animar a los estudiantes a participar activamente de su propio aprendizaje.

Convencida de la importancia de la ejercitación en el aprendizaje de cualquier parte de la matemática he incluido también una variada y abundante propuesta de ejercicios al final de cada capítulo. Estos ejercicios cubren diferentes aspectos y grados de dificultad. Entre los distintos aspectos: ejecución directa de operaciones, teórico-prácticos, teóricos y de aplicación.

Este libro surge ante la necesidad de brindar un material que cubra los requerimientos básicos del Cálculo para nuestros estudiantes, aquí y ahora. Para su elaboración he adoptado un enfoque que podríamos señalar como a *medio camino* entre el tradicional y el reformista. Tradicional, en cuanto reconoce la importancia de la teoría, los enunciados precisos, las demostraciones rigurosas y el desarrollo de destrezas en el manejo de herramientas básicas de la Matemática. Reformista en cuanto a que el énfasis está puesto en los conceptos y las aplicaciones más que en las técnicas formales. Finalmente el objetivo último es el de presentar un texto de matemática *genuina*, el cual permita comprender la diferencia que hay entre familiaridad y entendimiento, entre demostración lógica y manipulación rutinaria, entre actitud mental crítica y la crédula habitual, entre el conocimiento científico y la simple opinión o conjetura; en el que se perciba el peso, importancia e incidencia del conocimiento vulgar en la génesis y desarrollo del conocimiento. Contemplar este objetivo no ha sido simple, sin dudas es más fácil (y posible) omitir cualquier referencia a estas cuestiones que hacer un tratamiento explícito de las mismas, pero de todas manera he aceptado el desafío en el convencimiento de que este es el camino por el que debemos transitar en la búsqueda de una mejor calidad de la enseñanza.

Marta Bonacina

1— Funciones

El Cálculo es una rama de la Matemática cuyas ideas datan de la época de Arquímedes (287-212 a.C.), cuyo origen puede establecerse en culturas tan diversas como la de Grecia, Egipto, Babilonia, India, China y Japón y cuya consolidación como disciplina se produce a partir de los estudios realizados en el siglo XVII por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) Muchos de los descubrimientos científicos que han permitido el avance de nuestra civilización durante los tres últimos siglos hubieran sido imposible si no se hubiera conocido el Cálculo.
Gran parte del Cálculo implica el empleo de números reales o de variables para describir cantidades cambiantes; pero, fundamentalmente, implica el uso de *funciones* a los efectos de describir la relación entre tales variables, proceder al análisis de problemas que las involucran. El estudio y resolución de estos problemas resulta fundamental en un mundo de cambios constantes, pleno de cuerpos en movimiento y con fenómenos de flujo y reflujo; de allí que el Cálculo, como cuerpo de técnicas de cómputos y conceptos esenciales, siga teniendo vigencia, siga sirviendo como el principal lenguaje cuantitativo de la ciencia y la tecnología.
En esta sección nos dedicamos entonces a analizar en profundidad el concepto de *función*, a establecer la notación y terminología con la que vamos a trabajar a lo largo del curso.

1.1 Definiciones y Notaciones

Definición de función:

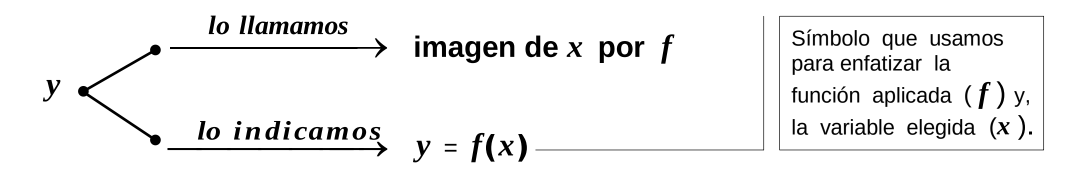
Dados dos conjuntos, **A** y **B**; una ***función de A en B***, es una *regla* o *ley* que a *cada* elemento de **A** asigna un *único* elemento de **B**.

SIMBOLO	Elementos que la *caracterizan*	Condiciones a cumplir por la ley	REPRESENTACION
Para nombrar una función usamos una letra. *(f , g, h …)* Por costumbre (y si se se puede) , usamos: ***f***	♦ dos conjuntos: **A** ; **B** ♦ una regla o ley de *asignación*	asignar a *cada* elemento de A un *único* elemento de B	***f*** **: A → B** **x → y** **x** **y** **A** **B**

Convención de Nombres y Símbolos:

- ***f* : A → B** ; se lee : ***f* aplica A en B** .
- al conjunto de *partida* (**A**), lo llamamos: **DOMINIO**

- al conjunto de *llegada* (**B**), lo llamamos: **CODOMINIO**
- a los elementos del dominio o del codominio los llamamos: **VARIABLES.**
  A las variables las representamos con letras minúsculas: x, y, z, t., u, ….
- si ***y*** representa el valor obtenido de aplicar ***f*** a un ***x*** de **A** entonces, a



ⓘ $f\,(x)$ se usa también para dar la ley de la función:

(a) la ley de ***f*** se puede dar a través de indicar como se procede para obtener la imagen de *x* por ***f*** , para un *x* genérico del dominio

- $f\,(x) = 2\,x$ indica que ***f*** actúa "duplicando" el valor de ***x*** .

(b) si el dominio es finito, la ley de *f* se puede dar indicando la imagen de x por *f* para cada uno de los elementos del dominio.

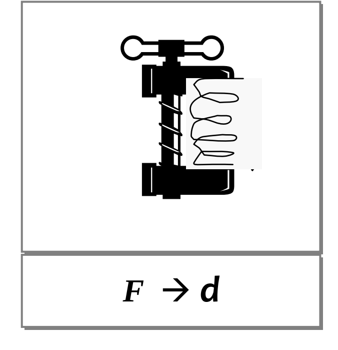
- **A=**{a, b}; **B=**{1, 2}
- *f*: **A → B**
  $f\,(a) = 2$
  $f\,(b) = 1$

Observaciones y Ejemplos

Las funciones aparecen cada vez que tenemos una cantidad que depende de otra. Así, al abrir una canilla para llenar un tanque, todos sabemos que el *volumen* de agua acumulado depende del *tiempo,* lo que probablemente no todos sabemos es que allí existe, cuanto menos, una función.
En general, cualquier relación *causa-efecto* presupone la existencia de función. Más aún, el origen del concepto se encuentra en la necesidad de reproducir fenómenos de *dependencia entre magnitudes físicas y/o conexiones entre hechos del mundo de lo concreto y real.*

EJEMPLO 1

Experimentalmente se observa que la *variación de longitud* que presenta un resorte cuando se le aplica una *fuerza* es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza: a mayor fuerza, mayor compresión del resorte. (dentro de los límites elásticos del resorte).
En la descripción de este fenómeno detectamos:



- la existencia de dos magnitudes (*fuerza y longitud*)
- que existe una relación de dependencia entre ellas;
  "*la variación de longitud* ***d,*** depende *de la fuerza* ***F*** "
- que la relación de dependencia define ***función;*** pues :
  "*a cada fuerza corresponde una única variación de longitud* "
- que, aunque no se explicite, hay dos conjuntos en juego:
  ∗ el de todos *los valores numéricos* posibles para ***F***.
  ∗ el de todos *los valores numéricos* posibles para ***d***
- que las mediciones hechas muestran un patrón de comportamiento el cual permite reconocer el tipo de relación existente entre ambas magnitudes:

" d y F son directamente proporcionales "

Notas:
1) Observar que hasta aquí y en relación con la dependencia estudiada sólo se determina una cualidad de la misma (que es una proporcionalidad *directa*) ; o sea, que **F = *k* *d***.
Cuantificar esta relación está supeditado a la posibilidad de hallar el valor numérico de ***k* ,** constante de proporcionalidad del proceso**.** Si podemos hallar este valor tendremos una fórmula para el fenómeno investigado (i.e, **F = *0.1 d***), hecho este que permitirá predecir resultados, estudiar otras propiedades del resorte, etc; sin necesidad de hacer la experiencia cada vez. Son estas últimas cuestiones, la *determinación de expresiones* que representen matemáticamente fenómenos de la naturaleza; la *cuantificación* de los parámetros, de las constantes involucradas, la *resolución y/o cálculo* de las expresiones halladas, las que competen a la **matemática** y, por ende, las que vamos a tratar .
2) Cabe aclarar que el ejemplo tratado es una ley de la física conocida como ´ley de Hooke´

EJEMPLO 2

En una experiencia realizada en un laboratorio se registra, cada 5 minutos, la temperatura de una solución en la que se ha desencadenado cierta reacción química.
Los respectivos registros se disponen en una tabla.

t (min.)	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
τ (º K)	*314.94*	*319.54*	*325.85*	*332.20*	*338.45*	*344.55*	*350.90*

En este caso detectamos:

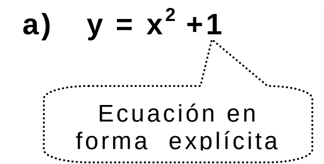
- ✓ la existencia de dos magnitudes variables (*tiempo y temperatura*) ;
- ✓ la existencia de una conexión o relación entre ellas:
  ´a c*ada tiempo se asocia, a través de la tabla, un valor de temperatura´.*
- ✓ que la relación reune todos los requisitos para ser ***función*** pues:
  -existe un conjunto de valores posibles para *t ;* o sea, un conjunto de partida o
  dominio = **{** 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 **} ;**
  -existe un conjunto de valores posibles para *τ ;* o sea, un conjunto de llegada o
  codominio = **{** 314.94, 319,54, 325.85, 332.20, 338.45, 344.55, 350.90 **}**
  -existe una regla de correspondencia, ***la tabla de valores***, a través de la cual
  *´a cada tiempo (t) corresponde una **única** temperatura (τ) ,*

ⓘ Con el tiempo el concepto de función evoluciona y se usa tanto para representar relaciones de dependencia, del tipo *causa-efecto,* pertenecientes al mundo de lo *concreto y real* como para expresar relaciones de dependencia pertenecientes al mundo de lo *abstracto o ideal.*

EJEMPLO 3

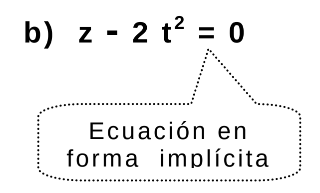
Las *ecuaciones algebraicas* en las que intervienen dos variables abstractas proporcionan ejemplos típicos de relaciones de dependencia en el mundo de lo abstracto o ideal.

a) $y = x^2 + 1$



⏩ esta ecuación establece una relación entre dos variables abstractas.
En ella, a *cada valor* de x corresponde un *único valor* de y.
Luego, considerando como dominio y codominio el conjunto ***R***, la relación descripta por esta ecuación, ***es función*.**

b) $z - 2\,t^2 = 0$



⏩ esta ecuación propone también una relación entre dos variables abstractas; pero aquí no resulta tan claro si la misma cumple con la condición necesaria para ser función. Para decidir esto, procedemos a despejar una de las variables.
Si despejamos **z** , tenemos: $\mathbf{z = 2\,t^2}$,
y vemos que a *cada valor* de ***t*** corresponde un *único valor* de **z**.
Luego, considerando como dominio y codominio el conjunto ***R***, podemos concluir que esta ecuación ´*esconde*´ una función.
En tal caso decimos que:
$\mathbf{z\text{-}2\,t^2 = 0}$ define implícitamente a ***z como función de t*** **.**

⏩ Cabe preguntarnos: $\mathbf{z - 2\,t^2 = 0}$ **, ¿ define a t como función de z ?**
Al respecto observamos que de esta ecuación no podemos despejar **t** de modo que a *cada valor* de **z** corresponda un *único valor* de **t** ; luego, $z - 2\,t^2 = 0$ no define a *t* como función de *z*.

Conclusión: *que una ecuación defina función depende del sentido que establezcamos para la dependencia entre las variables; o sea, para poder decidir el carácter de la relación debemos establecer primero, y claramente, que variable deseamos ´despejar´ en ´ función´ de la otra*.

En este texto, tal cuestión la resolvemos a través de enunciar el problema como sigue:
↔ analizar si $z - 2\,t^2 = 0$ define función con fórmula ***z= f(t)*** ≈
(ò, ↔ analizar si $z - 2\,t^2 = 0$ define función con fórmula ***t = f(z)*** ≈)

EJEMPLO 4

En la tabla siguiente se presenta el resultado de asignar, al azar, un número a cada dígito: ¿estamos ante una función?. Un simple análisis indica que sí, ya que *a cada dígito corresponde un único número y se reconocen un dominio y un codominio.* (*)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**	→ DOMINIO
4	2	2	6	3	5	1	1	2	6	→ CODOMINIO

(*) En este caso observamos que aún cuando la relación de dependencia no es del tipo causa-efecto, ni se puede traducir o dar la misma a través de una fórmula, estamos ante una *función*. La concepción moderna de este concepto presupone la inclusión de casos como estos en la categoría de *función*.

ⓘ Vemos entonces que:

» en la actualidad el concepto de función es muy amplio y abarca más casos de los que probablemente nos imaginamos hasta ahora; que tal hecho hace de las funciones una herramienta fundamental a los efectos de cuantificar relaciones de dependencia entre magnitudes y convierte su conocimiento en imprescindible a la hora de confeccionar **´modelos matemáticos´** de fenómenos del mundo real.

» Los procesos o fenómenos que ocurren en el mundo real no son estáticos, si algo los

caracteriza es el movimiento, *el cambio*. El Cálculo (rama de la matemática que se ocupa entre otras cosas del estudio de funciones) es esencialmente *dinámico*, siendo su problema central la búsqueda de *aproximaciones*. De aquí su utilidad para describir procesos cambiantes y la explicación de porqué, a muchos de los que comienzan su estudio, les resulta bastante diferente de la matemática con la que han trabajado hasta ahora (*estática y exacta*).

» Dado el carácter de este curso, el cual tiene como objetivo final el desarrollo y potenciación de las capacidades requeridas para construir y/o resolver modelos matemáticos, el concepto de FUNCION se abordará desde esta perspectiva. No obstante ello cabe aclarar que el desarrollo de las capacidades mencionadas, el logro del *conocimiento operativo*, requiere del dominio de una amplia gama de técnicas y rutinas algebraicas y analíticas de allí que una parte muy importante del curso estará también destinada a tal efecto.

RESUMIENDO: estamos ante una función cada vez que:

> **(I)** podamos identificar *dos conjuntos*, uno de partida y otro de llegada. [DOMINIO y CODOMINIO]
> **(II)** podamos reconocer la existencia de una *regla ó ley* que asigne a todo elemento del dominio *un* (*y solo un*), elemento del codomino.

Si revisamos los ejemplos vistos hasta ahora distinguimos distintas formas de dar la ley de la función . En lo que sigue profundizamos y completamos esta cuestión.

▫ ***Las distintas formas de dar la ley de la función.***

EJEMPLO 5

f : **N** ⟶ **R**
n ⟶ 4.n ⇨

***f* es función** ⇦

- LEY (de asignación): f(n) = 4n (*)
- "conjunto de partida" (DOMINIO) = **N**
- "conjunto de llegada" (CODOMINIO) = **R**

(*) la ley está dada a través de la **imagen de *f*** para cada elemento del dominio.

EJEMPLO 6

En un libro leemos: ↔ el perímetro ***p*** de un cuadrado de lado **l** es; ***p* = 4. l** ≈

ⓘ *Esta conocida fórmula puede ser abordada desde dos perspectivas distintas:*

✓ desde la Geometría*:* *donde se reconoce como una ecuación , o sea como expresión que indica como se calcula el perímetro conocido el lado y en la que las letras tienen el carácter de datos ó incógnitas*

✓ desde el Cálculo *:* *donde se reconoce como una relación de dependencia , o sea como una expresión que muestra como el perímetro depende del lado y en la que las letras tienen el carácter de variables.*

Concluimos entonces que la forma de interpretar y trabajar una fórmula depende del contexto en el que se esté operando: así, y desde la óptica del cálculo matemático, la expresión leída en el libro la registramos como ´relación entre dos variables´. Luego, y dado que a cada valor de l *positivo corresponde uno y solo un valor de* ***p***, *reconocemos que esta relación puede incluso definir función.*

Problema: ***p* = 4. l**, ¿define función ? .

$p = 4.l \Rightarrow p = f(l)$ *con* $f(l) = 4.l \Rightarrow$

- LEY : $f(l) = 4.l$ (*)
- DOMINIO = **?**
- CODOMINIO = **?**

(**?**) El conjunto de partida y el de llegada no están indicados; luego, ¿tenemos función?:
Sí, estos conjuntos existen aún cuando no estén explícitamente Indicados.
La ley se ´aplica´ y ´produce´ números positivos.

Luego, ***p* = 4. l** define función:

$$f : R^+ \longrightarrow R^+$$
$$l \longrightarrow p = 4.l$$

***f* es función**

- LEY : $p = 4.l$ (*)
- DOMINIO = R^+
- CODOMINIO = R^+

(*) la ley está dada por una **fórmula** (*de la geometría*). Este caso es similar al anterior ya que en definitiva lo que se da es la **imagen de *f*** para cada elemento del dominio. (aunque escrita de otra forma).

OBSERVACIONES:

ⓘ En los ejemplos 5 y 6 hemos elegido la letra ***f*** para representar la función, pero como ya dijimos podríamos haber elegido cualquier otra letra, particularmente si la función no tiene ningún significado en especial como es el caso del ejemplo 5.
En el caso que la función tenga una *interpretación concreta* resulta útil elegir una letra que represente aquello de lo que trata la función. Así, en el caso del ejemplo 6 la función ´produce´ perímetros; luego conviene y es costumbre identificarla con la letra ´p´. Así, para esta función , resulta más gráfico escribir : ***p* = p(l) con p(l) = 4.l**

ⓘ en el ejemplo 6 vemos que existe función aún cuando dominio y codominio no estén explícitados. En tal caso asumimos que estos conjuntos quedan *´naturalmente determinados´* por la ley de correspondencia y les damos el nombre de dominio y codominio *natural*.

DOMINIO NATURAL (**Dn**): *mayor conjunto* donde la ley de asignación tiene sentido; puede ser aplicada.
CODOMINIO NATURAL (**Cn**): cualquier conjunto que contiene *todas* las imágenes .

La determinación de estos conjuntos resulta de suma importancia para el estudio de funciones. El codominio no ofrece dificultades ya que tomando el mayor conjunto posible nos asegurarnos que el mismo contiene a todas las imágenes. No sucede lo mismo con el dominio, en relación a la determinación del mismo existen distintas cuestiones a evaluar. Estas son:

- ✓ las restricciones de orden algebraico propias de la *fórmula o expresión* matemática que expresa la ley de correspondencia.
- ✓ las limitaciones debidas a las *variables que intervienen* , particularmente en el caso

que las mismas representen medidas, magnitudes físicas, económicas u otras.
✓ las limitaciones propias de la cuestión que la función *modeliza*.

ⓘ Concluimos entonces que cada vez que detectemos una *relación de dependencia* en que la correspondencia sea *unívoca*, estamos ante una función; aún cuando dominio y codominio no estén explícitamente indicados. En tal caso, y a los efectos de *representar la función*, procederemos a elegir una letra para simbolizarla y otras dos para indicar los elementos del dominio y del codominio respectivamente. Si la función *no tiene una interpretación concreta*, por *costumbre* la indicamos con *f* (podemos usar otras letras como g, h, ó p); mientras que a un elemento genérico del dominio lo indicamos con ´*x*´ y del codominio con ´*y*´

ⓘ Cuando hablamos de ´*relación de dependencia*´ resulta natural pensar en una relación del tipo *causa-efecto* y en la mayoría de las funciones de uso cotidiano esto es realmente así. Pero, como ya se observó, la concepción moderna de la palabra función es mucho más amplia. Como se desprende de la definición, solo se pide que cada elemento del dominio tenga ´*asociado*´ un único del codominio, pudiendo esta asociación estar establecida en forma arbitraria. Así, por ejemplo, si a cada alumno le asigno un número al azar, se tiene una función cuya ley no obedece a ninguna relación *causa-efecto*. En cambio si le asigno su nota en el parcial, ¡¡si que se tiene relación *causa-efecto* !!.

ⓘ Los ejemplos analizados ponen en evidencia el hecho de que las variables no desempeñan el mismo rol, que este difiere en forma muy importante de una a otra. Así:

"los valores de las variables del dominio se pueden tomar en forma arbitraria (dentro del dominio), los correspondientes del codominio son el *resultado* de esa elección"

Luego, y teniendo en cuenta esta particularidad las distinguimos del siguiente modo :

variable independiente (v.i) ⟶ la del dominio
variable dependiente (v.d) ⟶ la del codominio.

EJEMPLO 7**:** procedemos a analizar las siguientes expresiones coloquiales a los efectos de decidir si las mismas ´*definen función*´ :

(I) "el volumen de una esfera de metal varia con el radio de la misma"	(II) "el volumen de una esfera de metal varia con la temperatura de la misma"
(*) detectamos una relación de dependencia en que la correspondencia es unívoca ⇓	(*) detectamos una relación de dependencia en que la correspondencia es unívoca ⇓
FUNCION	FUNCION

¿Cómo expresamos estas funciones en "*lenguaje matemático*"?

(I) "el volumen de una esfera de metal varia con el radio de la misma"	(II) "el volumen de una esfera de metal varia con la temperatura de la misma"
1ro) reconocemos variables y elegimos letras apropiadas para identificarlas:	
(I) (radio)= r ; (volumen)= **V**	(II) (temperatura)= t ; (volumen)= **V**
2do) establecemos el ´orden´ de dependencia:	
(I) el volumen *depende* del radio el volumen es *función* del radio. $V = f(r)$	(II) el volumen *depende* de la temperatura el volumen es *función* de la temperatura $V = f(t)$
3ro) explicitamos (de ser posible) la regla de correspondencia e indicamos D_n y C_n	
(I) $V = f(r)$ con $f(r) = 4/3\ \pi\ r^3$ $D_n = R^+$ $C_n = R^+$ (*) *en este caso, acudiendo al auxilio de la geometría, podemos explicitar la dependencia detectada a través de una fórmula.*	(II) $V = f(t)$ con $f(t) =$? (*) *en este caso desconocemos una fórmula que relacione las variables; luego, no podemos ´formalizar´ la dependencia Volumen- temperatura. Ello no quita que exista función; más aún, plantea un problema: hallar la fórmula.*

NOTA: el objetivo último de la matemática es expresar la relación detectada entre dos variables a través de una o más fórmulas. Hasta tanto esto no se logre se admiten otras formas de expresar la *ley de la función;* o sea, la correspondencia entre las variables.

Así, en el caso (II) se puede acudir a una TABLA DE VALORES.

Para construir la misma se determinan en forma *experimental* los volúmenes correspondientes a distintas temperaturas y los valores obtenidos se disponen en forma de TABLA .

t (ºC)	10	15	20	25	30	35	40	45
V (cm^3)	↓ V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8

Luego en **(II)**:

- LEY : TABLA de VALORES
- DOMINIO = {10, 15, 20, 25, 30 , 35, 40 , 45}
- CODOMINIO = R^+ (volúmenes)

EJEMPLO 8: procedemos a analizar el siguiente comentario a los efectos de detectar si el mismo encierra alguna *´función´*.

Juan, que es dueño de un negocio, comenta a su vecino que dado el aumento del costo de vida va a tener que aumentar en un 20% los precios de la mercadería que vende. Agrega que la tarea va a ser fácil ya que en la actualidad los precios son todos valores enteros entre 5 y 15, excepto 10, ya que los artículos de $ 10 los vendió a todos.

1ro) reconocemos variables y elegimos letras apropiadas para identificarlas

¿aumento de precios?: de un *precio viejo,* **pv,** hay que pasar a un *precio nuevo,* **pn.**

2do) establecemos el ´orden´ de dependencia:

sin dudas, "el precio nuevo *depende* del precio viejo".
"el precio nuevo es *función* del precio viejo".

pn = ***f*** (**pv**)

3ro) explicitamos la ley de correspondencia e indicamos Dn y Cn

" al precio viejo (**pv**) *sumarle el 20%* del mismo "

Dn = { 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 15} ; **C**n = R^+

Luego, en este caso tenemos:

- LEY : " al precio viejo sumar el 20% del mismo "
- DOMINIO = {5, 6, 7, 8 , 9, 11 , 12, 13, 14, 15}
- CODOMINIO = R^+ (precios)

Como ya dijéramos, el objetivo último del trabajo es el de encontrar (de ser posible) una fórmula para la ley de la función. O sea que el proceso anterior admite otro paso:

4to) de ser posible, buscamos una fórmula para la ley de la función

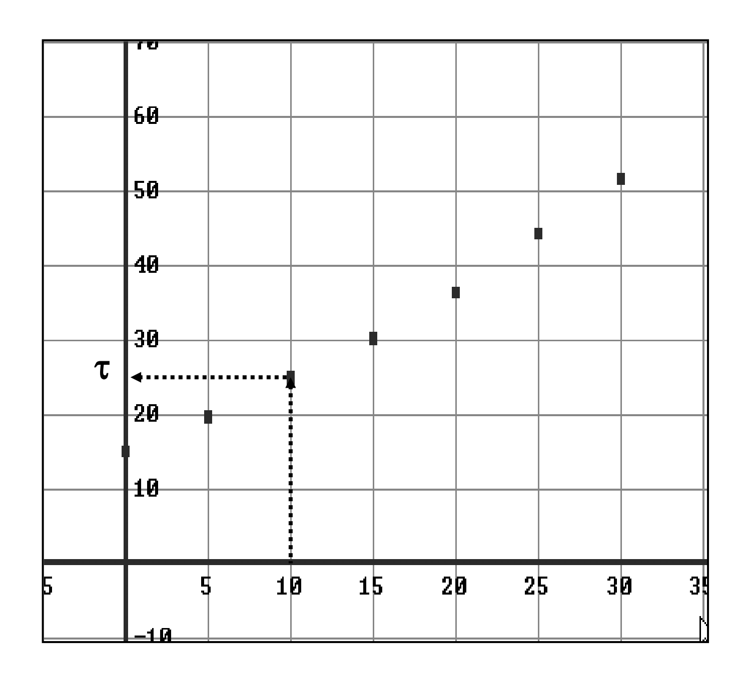
pn = ***f*** **(pv)** *con* ***f*** **(pv) = pv + 20% pv**

pn = pv + 0.2 pv

pn = 1.2 pv .

EJEMPLO 9

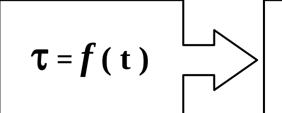
En una experiencia realizada en un laboratorio, se registra en la pantalla de un monitor, cada 5 minutos, la temperatura (**τ**) de una solución en la que se ha desencadenado cierta reacción química. Se obtiene así el gráfico adjunto.



- En este gráfico:
  ¿detectamos función?

- **Si,**
  pues para cada valor de "t" del dominio el gráfico proporciona uno y sólo un valor de "τ"

- Luego, **τ = *f* (t) .**

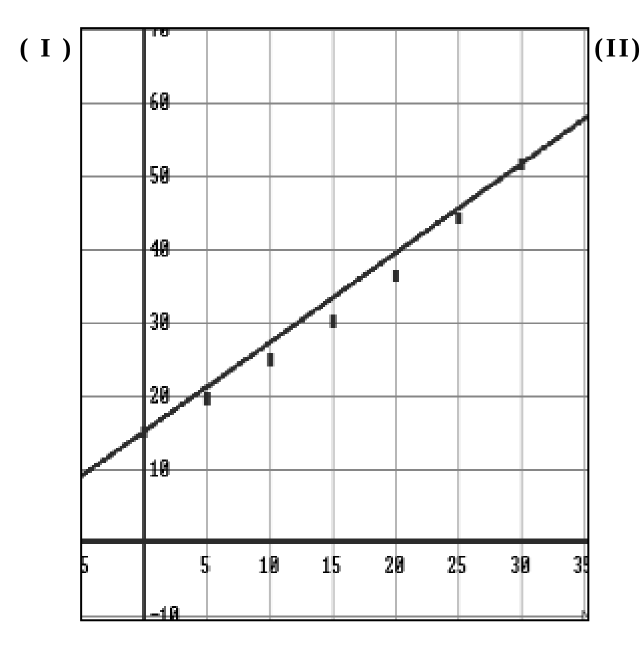


- LEY : EL GRAFICO
- DOMINIO = $\mathbf{D}_n$ ={0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 }
- CODOMINIO = $\mathbf{C}_n$ = R^+

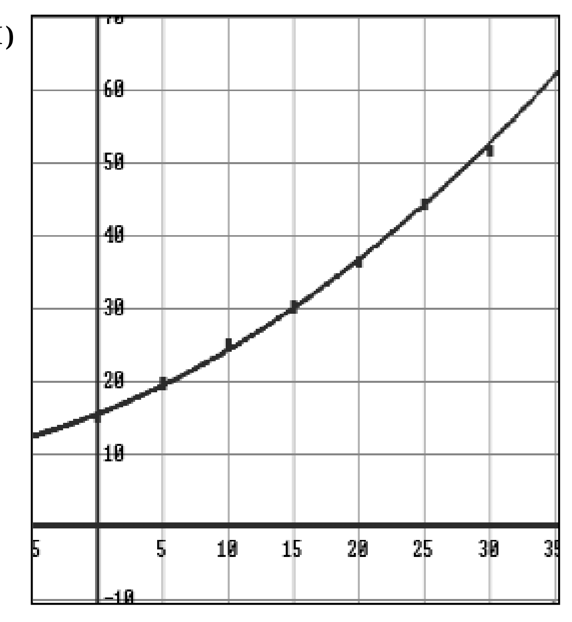
(*) El registro de datos en forma gráfica resulta de suma utilidad a la hora de intentar hallar *una fórmula para la ley de f*. Efectivamente, a partir del registro obtenido y con la ayuda del cálculo matemático podemos obtener una fórmula que exprese la relación temperatura-tiempo; más aún, según la curva con la que nos propongamos aproximar los puntos (recta, parábola, etc), podemos obtener distintas fórmulas y luego, entre ellas, seleccionar la que mejor aproxima. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones resultan de aproximar los puntos obtenidos, (I) con una recta; (II) con una parábola

(I) Modelo lineal → τ = 13,6 + 1.24 t
(II) Modelo cuadrático → τ = 15,3 + 0.7 t + 0.018 t^2

(I)



(II)



(*) ¿ Qué modelo ´*ajusta mejor*´ los datos ?.

(*) Se utilizó una de las curvas de ajuste para predecir la temperatura de la solución a los 40´ . El resultado obtenido fue, 72,1 º C. ¿Qué modelo se usó?.

EJEMPLO 10

La Física es la ciencia que se ocupa de mostrar que establecido un sistema de referencia, la altura ***y*** en cada instante **t** de un cuerpo arrojado hacia arriba, se puede calcular según la siguiente **ecuación**:

$$y = y_o + v_o\, t + | a\, t^2$$

y_0 = altura inicial
v_0 = velocidad inicial
a = "g" aceleración de la gravedad

ⓘ *Desde la óptica del cálculo matemático esta ecuación define* ***función*** *ya que a cada valor de* ***t*** *asocia un número y sólo uno,* ***y*** *(altura del cuerpo respecto al punto de referencia en ese instante). O sea:*

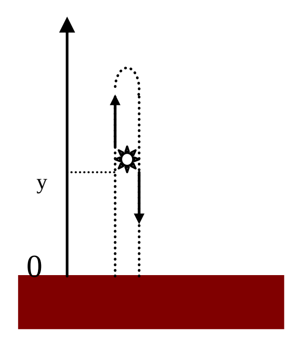
$$y = f\,(t) \quad \text{con} \quad f(t) = y_o + v_o\, t + | a\, t^2$$

Analizamos un caso particular:

Si $y_0 = 0$; $v_0 = 5$ y $a = -2$
la ecuación que describe el desplazamiento de un cuerpo arrojado desde el piso, resulta:

$$y = 5t - t^2$$

Si sabemos que cuando el cuerpo toca el piso nuevamente, cesa todo movimiento:
¿podemos decir $f(t) = 5t - t^2$ es la función que describe el desplazamiento ?



ⓘ *Como vemos, nuevamente dominio y codominio no están dados en forma explícita; hecho este que no impide que la ecuación defina función, pero si complica su análisis. Efectivamente, para tener rigurosamente definida la función debemos indicar cual es el dominio y codominio de la misma, particularmente su dominio natural; o sea, el conjunto donde ´naturalmente´ tiene sentido la ley que la define.*
Ante este problema, real y concreto, además de analizar la existencia de restricciones de orden algebraico (que en este caso no las hay), debemos analizar especialmente las limitaciones debidas al carácter concreto de las variables. O sea, decidir donde la ***ecuación*** *representa a la* ***función,*** *equivale, en este caso, a decidir donde es válido el uso de la misma a los efectos de calcular el desplazamiento del cuerpo respecto del piso; si esto es así, para todo* ***t*** .

- Un primer y rápido análisis indica que la respuesta a tal cuestión es ***NO***.
En primera instancia porque t, por representar tiempo, debe ser positivo ($t \geq 0$); además, porque existen valores de t que aún siendo positivos tienen imágenes negativas ($t = 6 \rightarrow y = -6$); y esto, físicamente, y en este caso, *no tiene sentido* .
Estos resultados nos dicen que la ecuación no representa a la función, *para todo* ***t.***

- *¿Donde la representa ?.* En este punto del análisis resulta conveniente volver a leer el problema, ver si no existe algún dato que pasó desapercibido y puede servir en este momento.
Así leemos que: ´*el cuerpo, cuando toca el suelo nuevamente, cesa todo movimiento* ´.

Esto, traducido a nuestras variables, significa que a partir de ese momento, **y = 0**;
lo cual, aplicado a nuestro problema, significa que es a partir de allí que la ecuación *física* no representa más la relación *altura-tiempo* para el cuerpo y movimiento estudiado.

- *¿ Cuál es finalmente el dominio natural de* ***f*** *?:* D_n ***f*** = [0, 5].
- *¿Porqué?* : porque el cuerpo toca el suelo nuevamente cuando t = 5.

- ¿ Existirá alguna ***función*** que describa el desplazamiento de este cuerpo, para todo t ?.
- Si, tal función existe; lo que no existe es la posibilidad de describir dicho desplazamiento a través de una única ecuación.

Efectivamente, cuando la función describe *más de una situación o fenómeno* (en este caso, cuerpo en movimiento y cuerpo en reposo), no podemos dar la ley de la misma a través de *una sola ecuación o fórmula*. Así, cuando el cuerpo está en movimiento, la altura del mismo respecto del piso se expresa a través de la correspondiente fórmula física, mientras que para expresar que el cuerpo está en reposo debemos acudir a otra fórmula: **y = 0**. Este hecho, que la ley de la función esté constituida por más de una fórmula, lo indicamos de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} 5t - t^2 \; ; & 0 \leq t \leq 5 \\ 0 \; ; & t > 5 \end{cases}$$

ⓘ Las funciones definidas por varias leyes, como la del ejemplo, reciben el nombre de *funciones seccionalmente definidas* .

RESUMEN

▪ **DISTINTAS FORMAS DE ´INFORMAR´ UNA FUNCION.**

I - ALGEBRAICAMENTE → con una (ej. 5), dos (ej. 10) ó más *fórmulas*.

II- NUMÉRICAMENTE → con una TABLA de VALORES (ej.2: $\tau = f(t)$)

III - GRÁFICAMENTE → con una gráfica (ej. 9: $\tau = f(t)$)

IV- VERBALMENTE → con una descripción en palabras (ej.8)

ⓘ Obviamente existen funciones que pueden ser representadas de las cuatro maneras. En tal caso resulta útil pasar de una forma a la otra ya que cada forma de representar una función destaca aspectos que las otras no hacen. Así, combinando las distintas formas vamos a tener mucho más información sobre la función que con solo una de sus representaciones.

ⓘ En general, ciertas funciones se describen en forma más conveniente con un método que con otro. Así, la forma más natural de dar el volumen de una esfera en función del radio es a través de la fórmula , aunque también se lo pueda dar con una tabla de valores o un gráfico.

ⓘ La función **$\tau = f(t)$** , función que describe la temperatura de una solución en función del tiempo, la hemos presentado de distintas maneras: como tabla de valores (ej. 2; pag 13), como gráfica (ej. 9; pag.20) y hasta como expresión algebraica (modelo lineal y modelo cuadrático, pag. 20). En este problema, típicamente experimental, es importante señalar varias cosas:

- que *"sin la tabla de valores"* ninguna de las otras expresiones hubiera sido posible. O sea, que es la forma esencial de dar estas funciones (*experimentales*).
- que es imposible dar una *fórmula algebraica* con la cual obtener *exactamente* los valores de la tabla o gráfico. Qué lo que podemos obtener son *fórmulas* que aproximan (mejor o peor) dichos valores. Así en el ejemplo se obtienen dos fórmulas, una lineal y otra cuadrática. Estas funciones, obtenidas con métodos que veremos más adelante, son *modelos matemáticos* que permiten calcular la

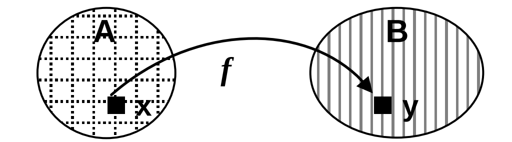
temperatura de la solución en cualquier instante ´t´ , más allá de los efectivamente registrados. Estos modelos son funciones que dan una *aproximación* del hecho real. De allí que pueda existir más de un modelo para un mismo hecho. Uno de los problemas fundamentales del Cálculo es no sólo hallar modelos matemáticos sino, hallar *el modelo que mejor ajuste*.

- Muchas veces tales modelos no se pueden hallar. Esta cuestión también se resuelve, ya que si bien los conceptos básicos del cálculo generalmente se deducen a partir de funciones dadas por una fórmula (*funciones continuas)*, luego se los reformula de modo tal que se los puede aplicar directamente a tablas de valores (*funciones discretas)*.

▪ DISTINTAS FORMAS DE "VISUALIZAR" UNA FUNCION :

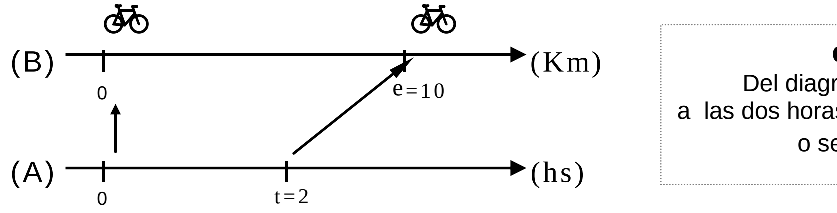
1- Como APLICACION: ***f*** **: A → B**

2- Con "DIAGRAMAS DE VENN":



3- Con DIAGRAMAS DE CORRESPONDENCIA:

Si los conjuntos A y B son conjuntos numéricos, pueden ser representados sobre *rectas graduadas y paralelas entre sí*. Esta forma de representar una función resulta conveniente cuando la misma se refiere a "desplazamientos"; por ejemplo, espacio recorrido por un móvil (e), en función del tiempo, (t).



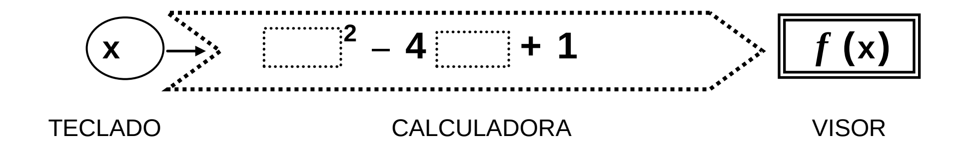
e = *f* (t)
Del diagrama leemos que,
a las dos horas el móvil recorrió 10 km;
o sea, $f(2) = 10$

4- Con "GRAFICOS CARTESIANOS" , como en el ejemplo 9, pag.20 .

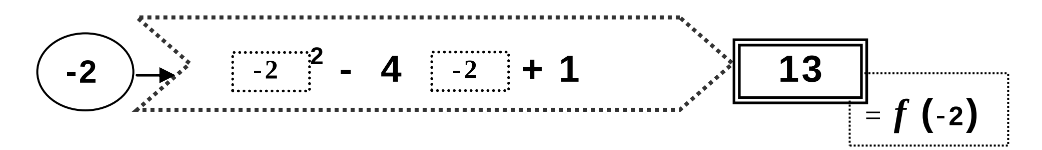
5- Con "DIAGRAMAS DE MAQUINA"

Estos últimos han adquirido auge últimamente en función de que se los puede asimilar a una calculadora ó computadora.
Si una función está definida ***por una ecuación***, el uso de tales diagramas suele ser muy gráfico y ayudar a la comprensión de más de un concepto relacionado con funciones.
En este tipo de diagramas, la función se piensa como una *máquina procesadora*, es decir, como una máquina que acepta *x´s* como insumos, los procesa según su mecanismo interno (regla de la función), y produce *f (x´s)* como salida. Así, el dominio se puede imaginar como el conjunto de todas las entradas posibles, el codominio como el conjunto de todas las salidas posibles, la variable independiente ***x*** como un *hueco a llenar al interior de la máquina* y, la regla o ley de la función, como *el proceso* al que va a ser sometida esta variable cuando se rellenen con ella los huecos disponibles.

EJEMPLO: f (x) = x^2 -4x +1



Así, para evaluar f (-2), basta rellenar cada hueco con [- 2]



EJERCICIOS

Las cuestiones o expresiones que se proponen a continuación pueden o no *comprender ó esconder* una función. En el caso que así fuera identificar Dn, Cn y ley de asignación.

1- El otro día muchos alumnos saltaban de alegría frente al transparente de la cátedra donde estaban publicadas las notas del parcial. Sucede que las mismas, que en un principio eran valores enteros entre **0 y 100,** se habían reconvertido de modo que el rango de variación ahora estaba entre **0 y 10**, ¡pero conservando el hecho de que fueran valores enteros! La parte decimal, de haberla, se había redondeado al entero más próximo *por defecto,* si era menor a 0.50 y al más próximo *por exceso* en caso contrario. ¡¡ Qué alivio para algunos!!

2- En un manual leemos el siguiente ejercicio: asociar a cada número de los conjuntos indicados a continuación, la suma de los dígitos que lo forman (si tal suma diera un número de dos dígitos, volver a sumar).
(2a) $A = \{ x \in N \,/\, 10 \leq x \leq 18 \}$ (2b) $B = \{ x \in N \,/\, 10 \leq x \leq 27 \}$

3- Sea $\mathbf{f : Z \rightarrow N_0}$
$x \rightarrow y = f(x)$ con: 3a) $f(x) = \sqrt{x}$; 3b) $f(x) = x + 5$; 3c) $f(x) = x^2$.

4- La familia Benvenutti tiene una pileta de 3 m. de largo por 5 de ancho y 1.50 m de altura, la cual llenan a distintas alturas según los invitados del fin de semana.
Cansados de estimar ´*a ojo*´ la cantidad de cloro a echar en cada caso, deciden pintar una regla sobre la pared interior de la pileta y buscar una expresión que les permita *calcular* el volumen de agua según el caso. Como discuten acerca de cómo hacer esto, y no se ponen de acuerdo, deciden hacerlo cada uno a su manera. Así, el Sr. Benvenutti pinta su regla en la pared norte y escribe ´su fórmula´ al lado de la misma: V= 15. (1.50 – x), orgulloso se da vuelta para cargar a su Sra (que está haciendo lo propio en la pared sur) pero,…, cuando ve la regla y la fórmula que ella pintó, V =15. x, se le congela la sonrisa y,

para zafar, dice: bueno, pero las dos están bien. La Sra. da media vuelta y se retira sonriendo.

5- En un manual de matemática leemos:
- Asignar a cada dígito no nulo los múltiplos del mismo que estén comprendidos entre 5 y 25 incluidos estos.
- Asignar a cada número entero entre 5 y 25 el menor divisor del mismo distinto de 1.

6- Un móvil se desplaza a una velocidad constante de 100 Km/h durante 5 hs. Sabiendo que, "si un móvil se mueve a velocidad uniforme entonces la distancia recorrida (d) es *directamente proporcional al tiempo* transcurrido (t)", se desea hallar una *expresión* para calcular la distancia recorrida por este móvil en cada instante t.

7- Se está inflando un globo esférico con cierto gas. Se sabe que la presión del gas en el globo fue de 20 l/cm^2 cuando el mismo alcanzó los 9 cm de radio. Se desea hallar un expresión para calcular la presión para distintos radios sabiendo que, a temperatura constante, presión y volumen son *´inversamente proporcionales´*

8- Juan, a través de un aparato que detecta posición de partículas, durante 5 minutos y cada 1/2 minuto, registra el desplazamiento de la partícula que está estudiando. Obtiene el siguiente registro, se convence de que la partícula se está desacelerando y se va a dormir tranquilo.

t	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
x	3	4	5	6	6.5	7	7.2	7.4	7.6	7.65	7.68

9.- La suma de números reales: ¿es función ?

1.2 Conjuntos Asociados a una Función: *Dominio, Conjunto Imagen y Grafico de una Función*.

1.2.1 Consideraciones acerca del dominio natural para f : A → B

En el párrafo 1, definimos función, los elementos que comprende este concepto, entre ellos: Dominio (A) y Codominio (B). Definimos luego Dominio y Codominio Natural (Dn y Cn) e indicamos que la determinación del Dn requería de varias consideraciones. (observación pág. 6). En este párrafo ampliamos este último punto.

■ Determinación del dominio natural en funciones que tienen la misma *fórmula* :

Función	(I) $y = \frac{100}{x - 0.2}$	(II) $w = \frac{100}{u - 0.2}$	(III) $P = \frac{100}{V - 0.2}$
Variables	v.i. → x v.d → y	v.i. → u v.d → w	v.i. → V (volumen) v.d → P (presión)
- restricciones propias de la fórmula: - restricciones debidas a la variables: - restricciones propias del modelo:	$x \neq 0.2$ ninguna ninguna	$u \neq 0.2$ ninguna ninguna	$V \neq 0.2$ $V>0$; $P>0$ $V>0.2$
Dominio Natural	Dn=R-{0.2}	Dn=R-{0.2}	Dn = (0.2; +∞)

Observaciones y Conclusiones:

✓ a funciones con fórmulas iguales pueden corresponder dominios iguales o distintos.
✓ si las variables son abstractas, a fórmulas iguales corresponden dominios iguales, no importa las letras con que se identifique a las variables. En la determinación del dominio sólo se deben tener en cuenta las restricciones de orden algebraico de la fórmula.
✓ si las variables son concretas, a fórmulas iguales pueden corresponder dominios distintos. En estos casos, en la determinación del dominio a más de las restricciones de orden algebraico también se debe considerar el sentido de las variables .
✓ en (I) y (II) los dominios son iguales (más allá de que se hayan usado distintas letras para la fórmula, ya que en ambos casos estas representan variables abstractas).
✓ en (I) y (III) los dominios son distintos, y en este caso sí tiene importancia que las letras sean distintas porque el cambio tiene ahora una intención, la de indicar que se modifica el carácter de las variables, que de abstractas pasan a ser concretas. (x,y son abstractas mientras que V, P son concretas).
✓ *en la determinación del dominio no influye el tipo de letra usado para representar las variables sino, y esencialmente, el carácter de las variables que tales letras representan.*

ⓘ En los párrafos siguientes vamos a estudiar propiedades de las funciones tales como *monotonía, simetrías, inyectividad, etc,* propiedades estas que luego usamos para *clasificarlas.* Vamos a ver también como muchas de estas propiedades dependen en forma muy importante del *dominio de la función*; como pueden incluso *cambiar* si para una misma ley consideramos distintos dominios. A este respecto es intuitivamente aceptable pensar que dos funciones con *propiedades distintas* son *distintas* y concluir por lo tanto que para que dos funciones sean iguales no basta con que tengan leyes iguales, que el domino de las mismas también debe ser considerado en la comparación. Precisamos *entonces* el concepto de **Igualdad de Funciones.**

DEFINICION:

Igualdad de Funciones	"dos funciones son iguales si y solo si tienen la misma ley, el mismo dominio y el mismo codominio"

Así en los ejemplo vistos, (I) y (II) representan funciones iguales mientras que (I) y (III) representan *funciones distintas* (aún cuando todas tengan la misma ley).

Ejemplo 1:

Analizar si las funciones costo (c) y perímetro (p) indicadas a continuación son *iguales*:

(I) c = c(n) con c(n)= *costo de ´n´ lápices de costo unitario $4.*

(II) p = p(L) con p(L)= *perímetro de un cuadrado de lado L.*

Solución:

A los efectos de realizar el análisis pedido procedemos a determinar ley y dominio natural de cada una de las funciones dadas. Como la ley está dada en forma verbal primero tratamos de expresarla a través de una fórmula (esto facilita la comparación) y luego, para establecer el dominio natural, tenemos en cuanta que en ambos casos se trata de variables concretas. Como codominio tomamos siempre los reales (R)

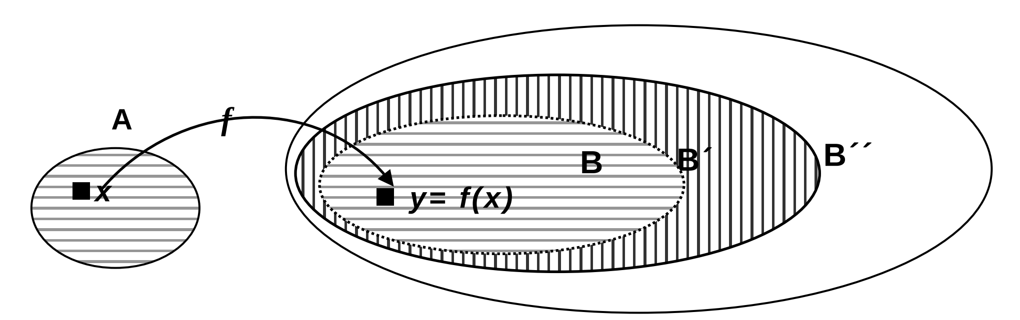
(I) c = c(n) con c(n) = 4.n y $D_{nc} = \mathbf{N}$ [n: *cantidad de lápices*]

(II) p = p(L) con p(L)= 4.L y $D_{np} = \mathbf{R}^{+}_{0}$ [L: *longitud del lado del cuadrado*]

La ley es la misma pero los dominios son distintos.

Rta: las funciones costo y perímetro dadas no son iguales, ellas difieren en su dominio.

1.2.2 Consideraciones acerca del Codominio y Conjunto Imagen para *f*: A → B



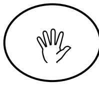
Definimos el codominio de *f*, como el conjunto que contiene a todos los *y* tal que *y = f (x)* para algún *x* del dominio de *f*. De la definición resulta evidente que hallado un codominio, cualquier otro conjunto que lo contenga también puede ser tomado como codominio, ya que este también contendrá a todas los *y* tal que *y = f (x).* O sea,

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{B} \text{ codominio de } f,\\ \mathbf{B} \subset \mathbf{B}'\end{array}\right\} \mathbf{B}' \text{ también puede tomarse como codominio.}$$

Así, y en general, a la hora de decidir acerca del codominio de una función tenemos muchos conjuntos entre los cuales optar; luego, para garantizar y simplificar la elección (y de ser posible) tomamos el *mayor* de todos ellos.

Por ejemplo para las funciones ´costo´ y ´perímetro´ del ejemplo 1, un codominio posible es $\mathbf{R}^{+}$ (tanto costo como perímetro se informan con números positivos).

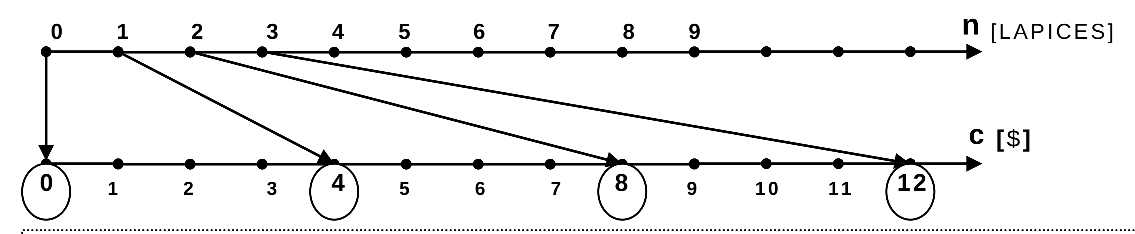
$\mathbf{R}^{+} \subset \mathbf{R}$; por lo tanto **R** *contiene* todas las imágenes y puede también tomarse como codominio. Como **R** es el ´mayor´, tomamos *Codominio c = Codominio p =* **R.**



Recordemos que aún cuando las funciones tienen la misma ley (multiplicar por 4

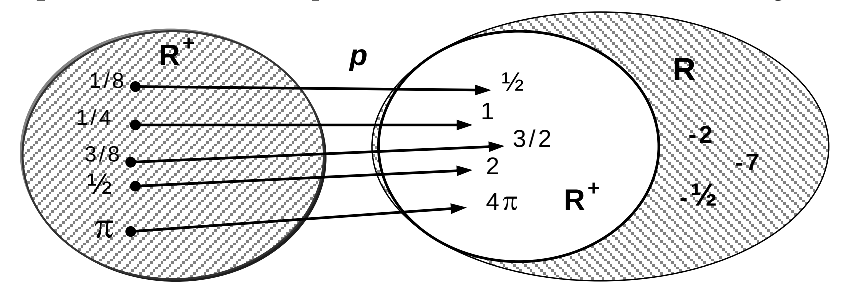
la v.i.) y el mismo codominio (**R**), como Dnc = N y Dnp = $\mathbf{R}^+$, entonces $\mathbf{c} \neq \mathbf{p}$. Luego, y según vimos, deben tener alguna propiedad *distinta*. Investigamos esto.

(*) c : N→ **R / c = 4n:** un diagrama de correspondencia puede ayudarnos en este caso:



Del gráfico vemos que hay números reales que no son ¨costo´ (*imagen*) de ninguna cantidad de lápices de $4. Por ejemplo, no existe ninguna cantidad que cueste $10.
Vemos que: *´c´ es un costo posible si y sólo ´c´ es múltiplo de 4.*
Esto indica que como codominio de esta función podemos tomar conjuntos ´más chicos´ que **R**, como por ejemplo, $\mathbf{R}^+$; **N** ó **C** = **{c∈R / c es múltiplo de 4}**

(*) ***p*** **:**R^+→ **R /** ***p*****= 4L :** en este caso para visualizar consideramos un diagrama de Venn



Sabemos que no cualquier número real es ´perímetro´ (*imagen*) de un cuadrado de lado *L*. Por ejemplo: no existe *L* tal que el perímetro del cuadrado sea, ***-2.***
Vemos que: *´p´ es un perímetro posible si y sólo ´p´ es un número real positivo*; equivalentemente, que la función perímetro *llega* y *cubre totalmente* al conjunto $\mathbf{R}^+$.
Esto nos dice que existe sólo un codominio ´más chico´ que **R** y que este es $\mathbf{R}^+$; que cualquier otro conjunto ´menor´ (por ej: **N**) no contendría todas las imágenes.

Conclusiones:

✓ dado que para el codominio solo pedimos que *contenga todas las imágenes*, a la hora de decidir el mismo, generalmente hay varios conjuntos entre los cuales optar. En tal caso, y si no existen restricciones, conviene tomar el ´más grande´ .

✓ si bien a partir del más grande podemos ´achicar´ el codominio, *hay un límite para ello*; es decir, hay un conjunto que es el ´menor codominio´ posible. Este codominio ´mínimo´ es aquél que contiene a todas las imágenes de la función, ***y solo a ellas***.

✓ para las funciones costo y perímetro, los ´codominios mínimos´ son:

- Codominio 'minimo' para ´costo´ = **{ c / c múltiplo de 4}**
- Codominio 'minimo' para ´perímetro´ = R^+.

o sea, *son distintos* . (encontramos una *propiedad* en la que difieren) .

✓vemos así que el ´codominio mínimo´ de una función, *depende de la función* (*ley y dominio*). Es por lo tanto un valor que la caracteriza, una propiedad a estudiar.

✓ existen muchos problemas cuya resolución requiere tomar el ´codominio mínimo´, de allí la importancia de este conjunto en la teoría de funciones. Luego, presentamos una definición equivalente del mismo (la más usual) e indicamos otros nombres con los que ordinariamente se lo llama, estos son: ***conjunto imagen***, ***rango*** *ó* ***recorrido***.

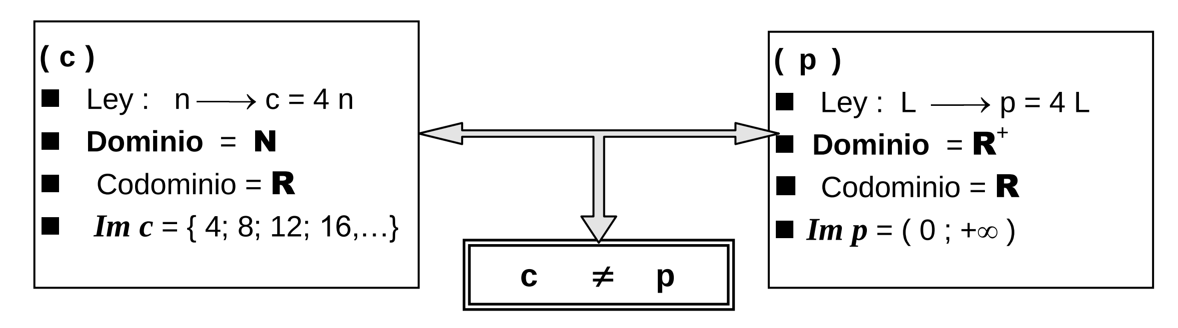
DEFINICION:

Conjunto imagen	Dada f :A → B llamamos conjunto imagen al conjunto de todas las imágenes de x por f. Lo indicamos: $Im\, f$. $Im\, f = \{ y \in B \,/\, y = f(x) \text{ para algún } x \in A \}$

Según lo visto para las funciones ´costo´ y ´perímetro´ del ejemplo 1; tenemos:

$Im\, c = \{ c \,/\, c \text{ es múltiplo de } 4 \} = \{ 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; \ldots\ldots\ldots. \}$
$Im\, p = \mathbf{R}^+ = (0 ; +\infty)$

NOTA: en general a leyes distintas corresponden conjuntos imagen distintos; lo que remarcamos aquí es que las imágenes pueden ser distintas (***Im c ≠ Im p)*** aún cuando las funciones tengan *la misma ley;* que cuando decimos que dos conjuntos son distintos estamos señalando no sólo que estos difieren en la cantidad de elementos, sino también en cuanto a la calidad de los mismos; así, *Im c* es un conjunto *discreto* mientras que *Im p* es un conjunto *continuo.*



Ejercicio:

Dada $f(x) = 2x - 2$ hallar $Im\, f$ para cada uno de los dominios que se indica:
a) $D_f = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$
b) $D_f = [0 ; 5]$

Solución:

a) en este caso el dominio es *discreto*; luego la imagen también lo es.
Podemos dar el conjunto imagen por enumeración:

$$\boldsymbol{Im\, f} = \{ f(0); f(1); f(2); f(3); f(4); f(5) \} = \{ -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 \}$$

b) en este caso el dominio es *continuo*; luego la imagen también lo es. No podemos dar el conjunto imagen por enumeración; luego, lo damos indicando la condición que debe cumplir un número para pertenecer a él :

$$\boldsymbol{Im\, f} = \{ y \in R/ \ y = 2x - 2 \text{ para algún } x \in [0,5] \} = \{ y \in R/ \ -2 [\ y\ [\ 8 \} = [-2 ; 8]$$

1.2.3 Gráfico de una función.

Vimos que una forma de dar una función era a través de su gráfica. En este párrafo puntualizamos y ampliamos este concepto para una f definida de A en B .

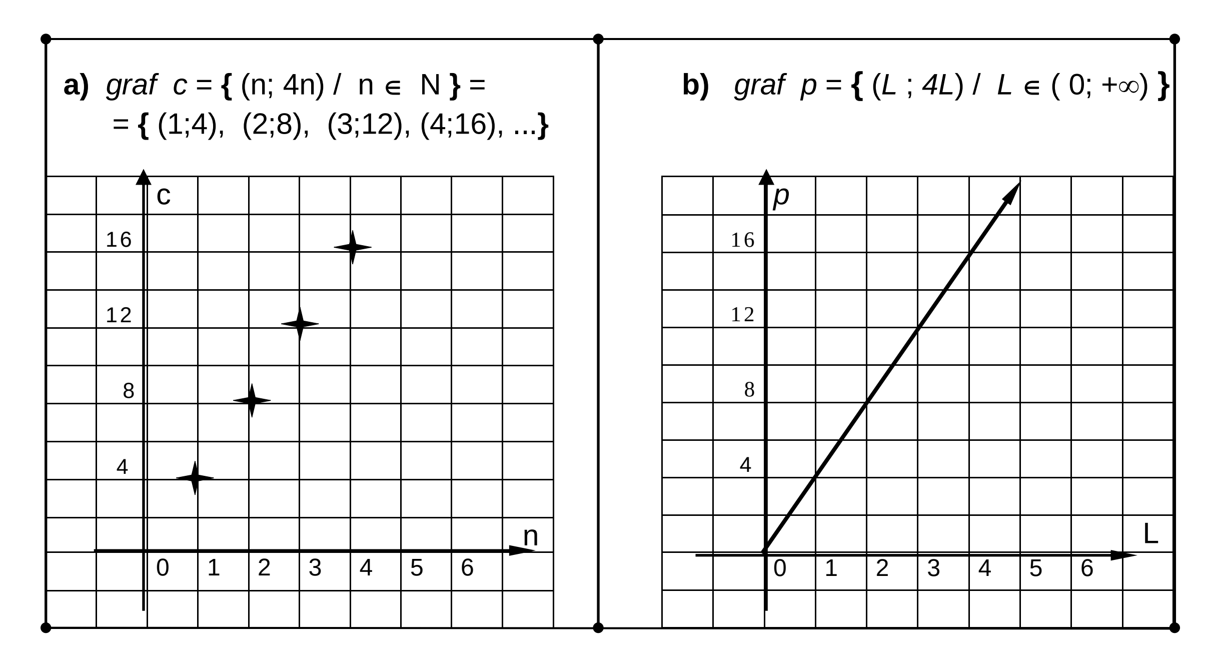
DEFINICIÓN:

gráfica de *f*	Llamamos *gráfica de f* al conjunto de todos los pares ordenados cuya primer componente es un elemento ***x*** del dominio y, su segunda componente, **la imagen de *x* por** *f* ; la indicamos: ***graf f*** $= \{(x,y) \ / \ x \in A, \ y = f(x)\} = \{(x; f(x)) \ / \ x \in A\}$

Observación:
Si A y B son conjuntos de números reales podemos introducir un sistema de coordenadas en el plano y, dada la identificación entre pares ordenados de números reales y puntos del plano, representar gráficamente al conjunto ***graf f.***
A esta representación la seguimos llamando **gráfica de *f***. Por uso y costumbre convenimos en representar al primer elemento del par sobre el eje horizontal y al segundo sobre el eje vertical; así :

eje horizontal ↔ variable independiente ↔ dominio
eje vertical ↔ variable dependiente ↔ imagen

Ejemplo 2: **a)** obtener *graf c* para la función costo, c =4n , del ejercicio 1.
b) obtener *graf p* para la función perímetro, p = 4L, del ejercicio 1.

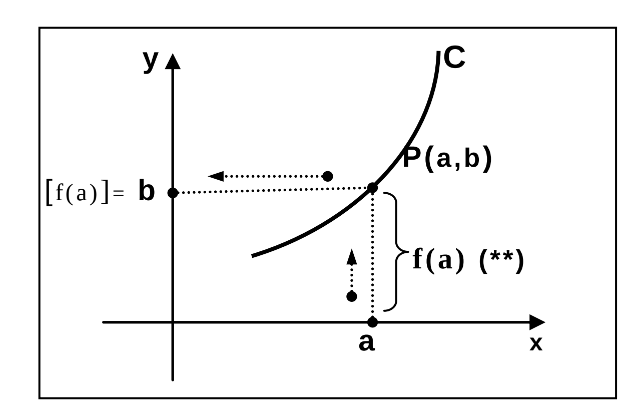


Observaciones:
✓ dominio e imagen de la *función costo* son conjuntos discretos y, consecuentemente, su gráfico es también un conjunto discreto.
✓ dominio e imagen de la *función perímetro* son conjuntos continuos; luego, su gráfico resulta un "continuo" de puntos.
✓ la gráfica de una función da idea del *comportamiento global de la función* ya que permite visualizar la misma en forma íntegra, conocer su historia de vida. Luego, resulta un elemento muy útil a los fines de estudiar propiedades y rasgos característicos de cada función.

1.3 Criterios Gráficos en el Análisis de Funciones

En este párrafo discutimos bajo que condiciones una curva en el plano resulta el gráfico de una función y, en tal caso, como se determinan Dn y Cn.

1.3.1 De como "leer" el gráfico de una función.



- Si **P** pertenece a la gráfica de la función f entonces si su *abscisa* es **a,** su *ordenada* es **f (a).**

P(a;b) ∈ graf. f ⇔ **a** ∈ **Dnf** y **b = f(a)**

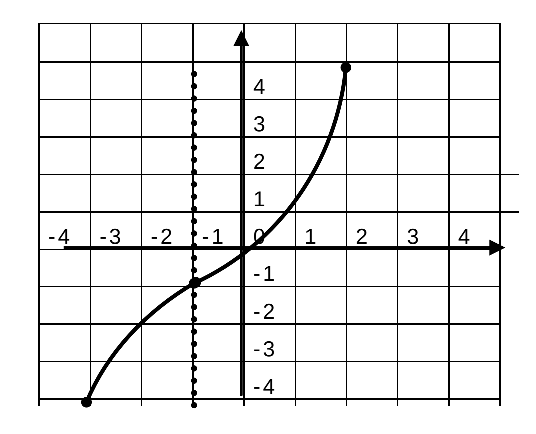
- dominio ↔ eje horizontal ⇒ **a** ∈ **eje x**
- imagen ↔ eje vertical ⇒ **b** ∈ **eje y**

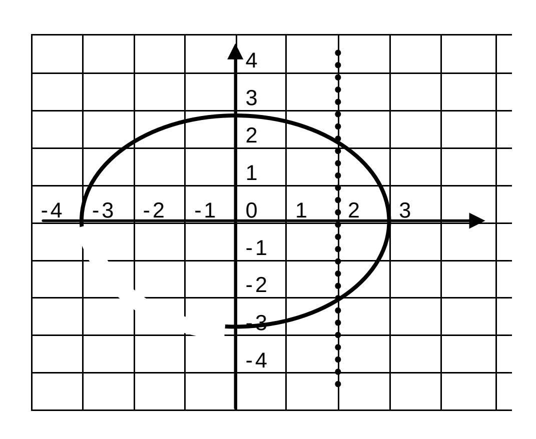
Conclusión:
Para *leer* la imagen de ´a´ desde el gráfico, podemos:
» partir de ´a´ y ´subir ´ (ó bajar) hasta la gráfica. (si no la encontramos ⇒ ∫ f(a)).
» al llegar a **P**, punto de la gráfica, doblar en ángulo recto y avanzar hacia el ´eje y´,
» llegado al eje y, leer allí el valor alcanzado. Este valor es **f(a).**

Observación:
Si sólo queremos el ´ **valor de f (a)**´ podemos obtener el mismo directamente del gráfico con solo determinar la altura de ´a´ hasta la gráfica. **(**)**
Pero, *cuidado*, que si lo que queremos es **graficar f (a)**, ***debemos ir hasta el eje y.***

1.3.2 De como detectar si una curva plana es el gráfico de una función

El gráfico de una función real a variable real siempre es una curva plana.
Pero: *¿será toda curva plana el gráfico de una función?* .
Investigamos esta cuestión a través de analizar las curvas que se dan a continuación.
En ellas indicamos la ó las ordenadas (*y*) de los puntos sobre la curva que corresponden a las abscisas indicadas en cada caso:





x	-2	-1	0	1	2	
y	**-2**	***-1***	**0**	**1**	**5**	

x	-3	-2	0	2	3
y_1	**0**	**2**	**3**	**2**	**0**
y_2			**-3**	**-2**	

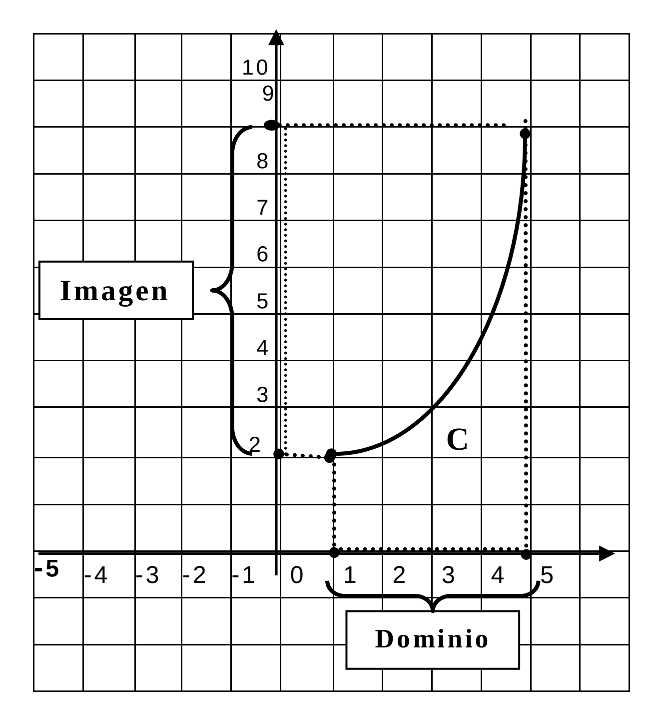
 Al definir el concepto de función dijimos que los distintos elementos constituyentes de la misma debían cumplir ´condiciones´; entre ellas, que la ley debía asignar a cada elemento del dominio un único del codomino.

En las curvas propuestas: ¿sucede esto? ; ¿a cada *x* corresponde un único *y* ? Fácilmente observamos que en la primera curva esto es así mientras que en la segunda no. Concluimos entonces que la primer curva es el gráfico de una función mientras que la segunda no lo es.
¿Qué diferencia sustancial observamos entre ambas curvas?: que si consideramos rectas perpendiculares al eje x, en el primer caso estas cortan a la curva en un único punto, mientras que en el segundo caso esto no es siempre así; existen tramos de la curva donde la recta corta la curva en más de un punto (en el ejemplo, en dos)

- ***Prueba de la recta vertical*** , el análisis hecho permite concluir que:

Una **curva plana C** es el gráfico de una función de x si y sólo si *ninguna* recta vertical corta a la curva en más de un punto .

1.3.3 Determinación de *Dn f* e *Im f* en una curva *C* tal que *C = graf f*



- Sea **C ≅ graf f** ; luego:
- **Dn** = ´proyección´ de C sobre eje x.
  Dn = [1 , 5]
- **Im f** = ´proyección´ de C sobre eje y.
  Im f = [2 , 9]

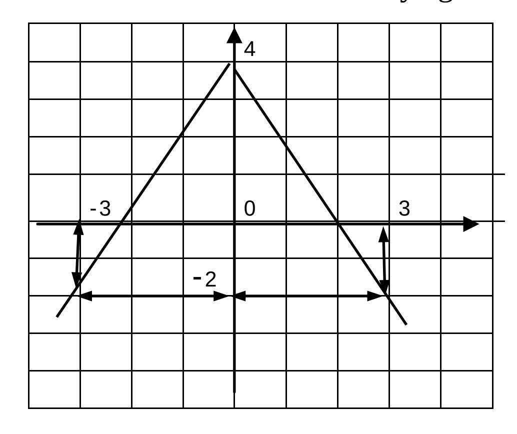
1.3.4 Propiedades de simetría y monotonía en el gráfico de una función

Uno de los objetivos esenciales del Cálculo ó Análisis Matemático es el de detectar propiedades o comportamientos de las funciones que permitan luego distinguirlas una de

otras, reconocer la oportunidad de uso de cada una de ellas o descubrirlas entre la maraña de datos de un problema Así por ejemplo, interesará saber si una función presenta simetrías, si es asintótica a algún valor, si crece o decrece, si tiene ´cumbres´ o ´valles´. En lo que sigue vemos como la gráfica de la función puede ser de gran ayuda en la determinación de cuestiones tales como las mencionadas.

- **SIMETRÍAS:**

(I) Sea la función f la función cuya gráfica se indica a continuación:



» ¿Qué vemos?:

» que la parte del gráfico que corresponde a los $x < 0$ se *refleja*, a través del *eje y*, sobre la parte que corresponde a los $x > 0$
Por ej: f (-3) = f (3) = -2

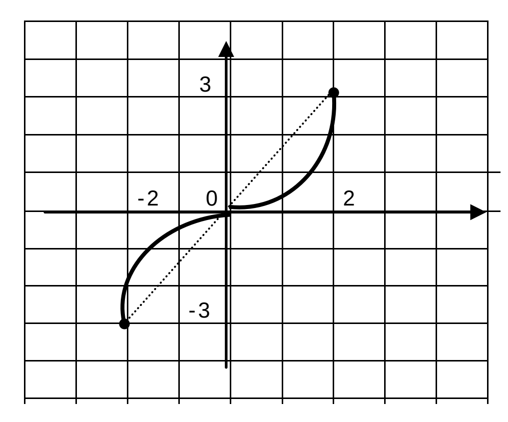
» Decimos que f es ***simétrica*** respecto del eje y. (*eje de simetría*)

» A la función que es simétrica respecto del *eje y*, la llamamos ***función par*** .

DEFINICIÓN

función par	Una función f se dice que es una función par si y sólo si $\mathbf{f(-x) = f(x)\ ;\quad \forall\ x \in D_f}$

(I I) Sea la función f la función cuya gráfica se indica a continuación:



» ¿Qué vemos?:

» que la parte del gráfico correspondiente a los $x < 0$ se puede obtener *girando* 180º alrededor del origen, la parte que corresponde a los $x > 0$.
Por ej: f (-2) = -3 = - f (2)

» Decimos que f es ***simétrica*** respecto del origen.

» A la función que es simétrica respecto del *origen* la llamamos ***función impar***

DEFINICIÓN

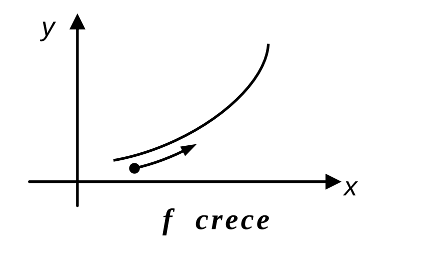
función impar	Una función f se dice que es una función impar si y sólo si $\mathbf{f(-x) = -\ f(x)\ ;\quad \forall\ x \in D_f}$

Observaciones:

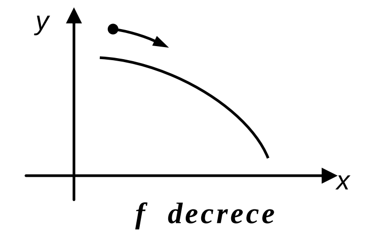
✓ Una función podrá ser par (o impar) si y sólo sí su dominio es simétrico respecto del origen, ya que en ambos casos se debe comparar **f(-x)** versus **f(x).**
✓ Una función podrá ser impar si y sólo si **f(0) = 0.**
✓ La propiedad de ser *par* o *impar* está ligada a la *simetría de la gráfica*, si la gráfica de una función no presenta simetría alguna, *dicha función no es par ni impar*.

▪ MONOTONÍA:

Al observar el gráfico de una función puede ser que el mismo se eleve desde *abajo e izquierda* (↗) ó bien, caiga desde *arriba e izquierda* (↘).
En el primer caso decimos que la función ´*crece*´, en el segundo que ´*decrece*´



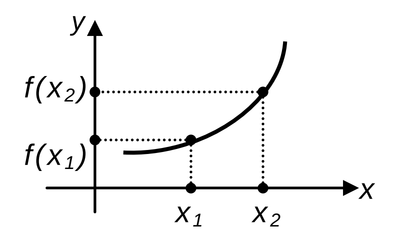
f crece



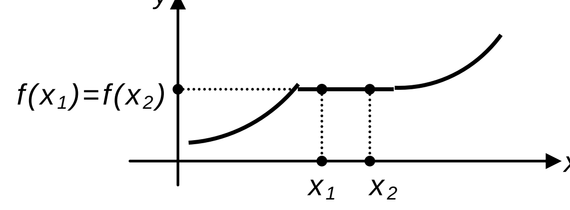
f decrece

DEFINICIÓN

función creciente	Decimos que f es una *función creciente* en D, si y sólo si : $\forall\, x_1, x_2 \in D$; **si** $x_1 < x_2$ **entonces** $f(x_1) \leq f(x_2)$



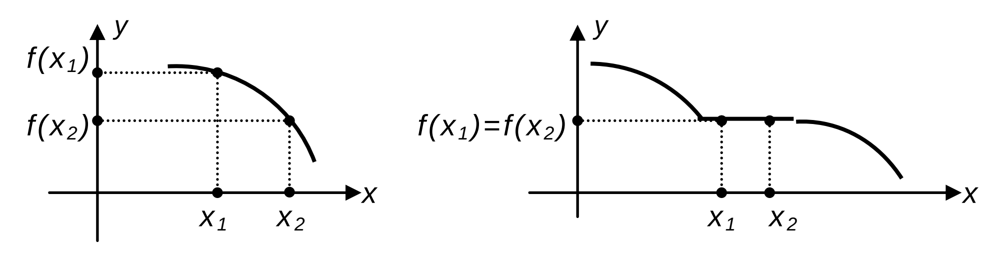
función creciente *(estricta)*



función creciente

DEFINICIÓN

función decreciente	Decimos que f es una *función decreciente* en D, si y sólo si : $\forall\, x_1, x_2 \in D$; **si** $x_1 < x_2$ **entonces** $f(x_1) \geq f(x_2)$



función decreciente *(estricta)* ***función decreciente***

Observaciones:

✓ si $\forall\ x_1 < x_2$ resulta $f(x_1) < f(x_2)$ entonces decimos que la función es estrictamente creciente en D.

✓ si $\forall\ x_1 < x_2$ resulta $f(x_1) > f(x_2)$ entonces decimos que la función es estrictamente decreciente en D.

✓ Cuando sólo queremos indicar que la función tiene un *comportamiento definido en D*; o sea que en todo su dominio *no cambia* el sentido en que se desarrolla (*siempre crece* ó *siempre decrece),* decimos que la función es ***monótona en D***.

✓ La monotonía es una propiedad que depende del dominio.

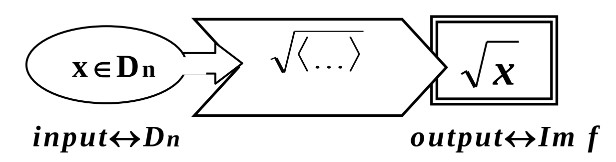
✓ Existen funciones que no son monótonas en su dominio.

- ***Una reflexión sobre dominio y codominio en los diagramas de máquina***

☞ Dn ; indica los valores que la *máquina* acepta procesar (insumos ó *input)*

☞ Im f ; indica los valores que la *máquina* produce (productos ó *output)*

Ejemplo 1: Sea $f(x) = \sqrt{x}$



💣: x es admitido como *input* ⇔ $x \in \mathbf{D}n = \mathbf{R}_0^+$

Nota: si consideramos la tecla $\sqrt{\ }$**....** de la calculadora, observamos que la misma procede como el diagrama anterior. Efectivamente, introducido un $x \in \mathbf{R}$, si $x \geq 0$ entonces la calculadora lo acepta y procesa (en el visor leemos: $\sqrt{x}$); ***pero, si x < 0, en el visor leemos - E- (error) ; o sea, tal x no es aceptado como insumo, la calculadora no lo procesa.***

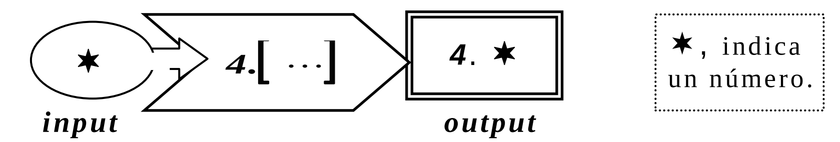
De aquí la asimilación que hacemos entre este tipo de diagrama y la calculadora.

Ejemplo 2:

(I) Sea c = c(n) con c(n) = costo de n lápices de $4 c/u. ; $D_{nc} = N$.

(II) Sea p = p(L) con p(L)= perímetro de un cuadrado de lado L.; $D_{np} = R^+$

En ambos casos, el diagrama de máquina es esencialmente el siguiente:



💣 Entonces, ¿ambas funciones tienen *el mismo diagrama?.*

Como ya vimos, *costo* y *perímetro* son *funciones distintas*; luego, sus diagramas también deben serlo. Pero, ¿qué los distingue?: *los valores que aceptan como insumo.*

Así; *c* procesa *sólo números naturales* y *p* sólo *reales positivos*. Esto indica que para evaluar un diagrama de máquina (ó *función)* debemos ir más allá de lo simplemente observable; que también en matemática sucede que ´*lo esencial es invisible a los ojos*´.

💣 Así como estos diagramas de ´costo´ y ´perímetro´ no son asimilables entre sí, en este caso, tampoco se los puede asimilar a una calculadora.

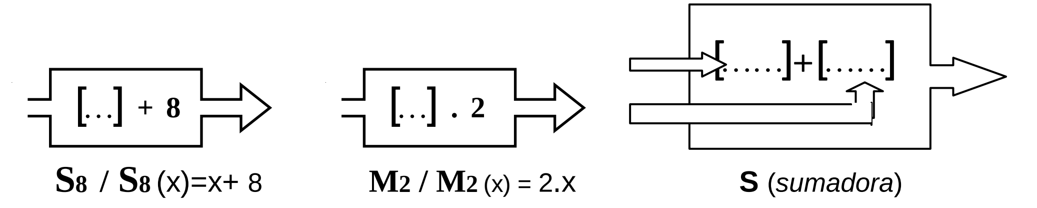
¿Por qué?: porque la multiplicación es una operación que no tiene ninguna restricción de orden algebraico luego, y en consecuencia, la calculadora (*como máquina de multiplicar)* acepta cualquier número real como entrada. Es decir, la única razón por la cual una calculadora discrimina un valor a los efectos de operar con él, es si *existen restricciones de tipo algebraico*, ya que así está programan. Por lo tanto, cada vez que las restricciones de una fórmula *no sean de tipo algebraico,* tendremos que el correspondiente diagrama de máquina y la calculadora no serán objetos *asimilables entre sí* ya que aceptan distinto tipo de insumo.
Cuidado, esto no quiere decir que no podamos usar la calculadora con este tipo de función sino que para trabajar con ella debemos extremar las precauciones, pues si no estamos alerta, *no nos avisa del error*.
Esta digresión tiene por objeto señalar la necesidad de hacer un uso `*inteligente´* de los auxiliares de cálculo , ya sean calculadoras, calculadoras graficadoras o computadoras. Estos instrumentos no pueden tomar decisiones de ´sentido común´. La `decisión final´, el `control´ sigue a cargo del hombre.

1.4 Operaciones con Funciones

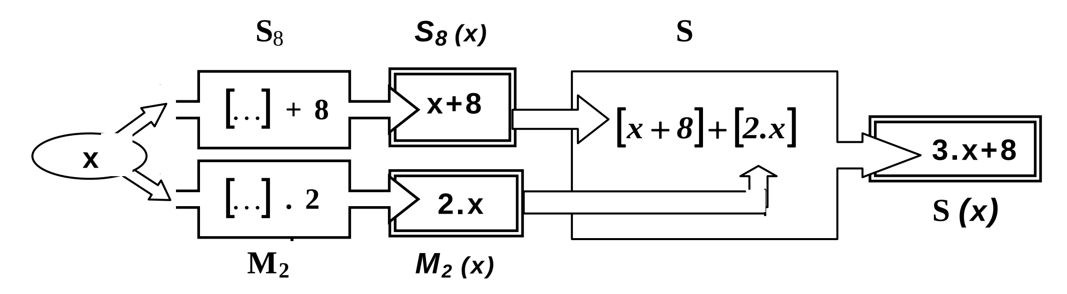
Dadas dos funciones, se puede *operar* con ellas y obtener una *nueva función*. En este párrafo analizamos cuales son las operaciones que se pueden hacer entre funciones, cómo se definen y cuales son las restricciones para que se puedan efectuar.

Ejemplo:

Sean **S8** (sumar 8); **M2** (multiplicar por 2) y **S** (sumar); tres *funciones* cuyos diagramas
indicamos a continuación:



Disponemos estas tres ´*máquinas*´ según el arreglo que mostramos a continuación y analizamos que pasa cuando procesamos un cierto valor, ***x***, en este dispositivo.



Vemos que al pasar **S_8 (x)** y **M_2 (x)** por **S** obtenemos **S(*x*) =3.x + 8** .
Vemos también que esta ley no es la de **S_8** ni la de **M_2** y concluimos en consecuencia que, *de la suma de dos funciones* resulta una *nueva función* (**S**).

- A **S** la llamamos ***función suma*** y la indicamos: **$S = S_8 + M_2$**
- Es fácil ver que si en vez de sumar S_8 y M_2 las restamos (multiplicamos ó dividimos) también obtenemos nuevas funciones, todas distintas entre sí.

En lo que sigue procedemos a investigar esta cuestión a través de realizar operaciones de distinta naturaleza sobre un conjunto básico de funciones a las que llamamos *´funciones elementales o tipo´*. Esto permitirá ir generando nuevas funciones cuyas propiedades y comportamiento iremos estudiando a medida que aparezcan.

1.4.1 Operaciones algebraicas

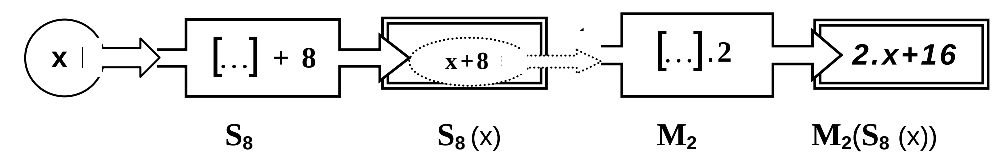
DEFINICION:

Al operar algebraicamente con dos funciones f y g obtenemos las siguientes funciones:

- *FUNCION SUMA* **S** : **S = f+g** ; ley → S(x) = f(x) + g(x)
- *FUNCION RESTA* **R** : **R = f-g** ; ley → R(x) = f(x) - g(x)
- *FUNCION PRODUCTO* **P** : **P = f.g** ; ley → P(x) = f(x) . g(x)
- *FUNCION COCIENTE* **C** : **C = f/g** ; ley → C(x) = f(x) / g(x)

(*) Para las tres primeras: $D_n = D_f \cap D_g$ y, para el cociente, $D_n = D_f \cap [\, D_g - \{x / g(x)=0\}\,]$

ⓘ Las "operaciones algebraicas" no son las únicas operaciones posibles entre funciones. Para ver esto consideramos nuevamente las funciones $\mathbf{S_8}$ y $\mathbf{M_2}$ y analizamos cual es el resultado de *´**acoplar**´* una a continuación de la otra; o sea, qué obtenemos si *al resultado de pasar **x** por* $\mathbf{S_8}$ *lo pasamos luego por* $\mathbf{M_2}$.

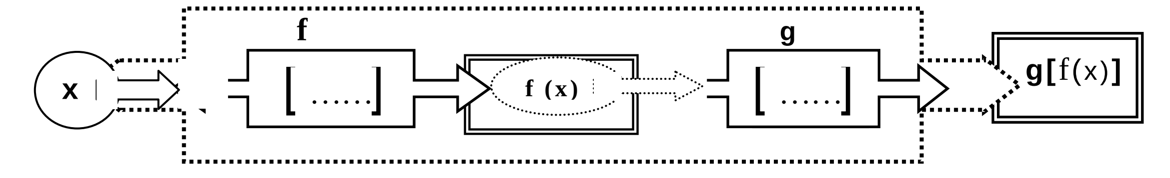


Podemos probar fácilmente que *´2 x+16´* no es suma (ni resta, producto ó cociente) de $\mathbf{S_8}$ y $\mathbf{M_2}$; o sea, que *no es el resultado de una operación algebraica entre estas funciones*.

Conclusión: el resultado de *´**acoplar**´* funciones, o sea, de disponerlas de tal forma que una de ellas tenga como *´entrada´* las *´salidas´* de la otra, es una *´**nueva función**´*. Luego, *´**acoplar**´* funciones es otra forma de operar con funciones. Como esta forma de operar en muy usual se conviene en darle un nombre y un símbolo para reconocerla.

1.4.2 Composición de Funciones.

Sean f y g dos funciones ***acopladas*** como sigue:



DEFINICION:

gof ***composición de funciones***	Dadas f y g, llamamos ***función compuesta*** ó ***composición de g y f*** a la función que indicamos **gof** y definimos como sigue: » Ley (gof): **gof (x) = g(f(x))** » D (gof) = $\mathbf{D_n}$ » C (gof) = $\mathbf{C_n}$

Ejemplo 1: para $\mathbf{S_8}$ y $\mathbf{M_2}$ vimos que acopladas de modo que $\mathbf{M_2}$ *siga* a $\mathbf{S_8}$ resulta:

$\mathbf{M_2}(\mathbf{S_8}(x)) = \mathbf{2.x+16}$. Luego:

» ley (M_2 o S_8): $\mathbf{M_2}$ o $\mathbf{S_8}$ (x) = $\mathbf{2.x+16}$.

» Dn (M_2 o S_8) = **R**

» Cn (M_2 o S_8) = **R**

Problema: (dominio natural y codominio), fácilmente apreciamos que las salidas de esta *máquina de componer* son elementos del codominio de g (la última que se aplica). Luego, no existe problema en que adoptemos este conjunto como codominio natural para la composición. Lo que no resulta tan claro es cuales son las entradas aceptables; es decir, cuál es, en general, el *dominio natural* de la composición. Sí, como en el caso del ejemplo, es el de la primera función que se aplica.

Investigamos esta cuestión a través de considerar otros ejemplos.

Ejemplo 2: Sean f y g las funciones que se indican a continuación:

- **f**: **R** → **R** / f(x) = x-5
- **g**: $\mathbf{R}^+$ → **R** / g(x) = $\sqrt{x}$

¿ El dominio de la función compuesta gof será igual al dominio de f (**R**) ?. Probamos con algunos valores.

x=**9** → **f** [9 -5] → f (9): **4** → **g** [$\sqrt{4}$] → **g** (f (9)): **2**

x=**1** → **f** [1 -5] → f (1): **- 4** → **g** [$\sqrt{\ }$] → **g** (f(1)): ∫

-4 no puede entrar en g, la raíz cuadrada no procesa números negativos

Conclusión: existen números que si bien son entradas válidas para f, no lo son para gof ; o sea, *el dominio natural de gof no siempre es igual al de f.* Resulta claro entonces que estar en el dominio de f no es condición suficiente para estar en el de gof; pero cuidado, pues *sí es una condición necesaria*.

Luego para determinar el dominio natural de la función compuesta gof , debemos :

Dominio de gof

» hallar la ley de gof .

» hallar el dominio natural *de esta ley* (x´s para los cuales dicha ley puede ser calculada), al cual llamamos D_{ley}

» hallar el dominio natural de la primer función que se aplica: $D_{primera}$.

» finalmente: $D_{gof} = D_{ley} \cap D_{primera}$

Ejemplo 3: hallar gof y fog para las funciones f y g del ejemplo 2 .
Solución:

» $g_o f$ (x) = g(f(x)) = g(x-5) = $\sqrt{x-5}$
» D_{ley} = [5, +∞)
» D_f = **R**
» D_{gof} = [5, +∞) ∩ **R** = [5, +∞)

» $f_o g$(x) = f(g(x)) = f ($\sqrt{x}$) = $\sqrt{x}$ - 5
» D_{ley} = [0 , +∞)
» D_g = [0 , +∞)
» $D_{fo\,g}$ = [0, +∞) ∩ [0 , +∞) = [0, +∞)

Observación: gof ≠ fog ; o sea, la composición *no es conmutativa*.

Ejemplo 4:

Si M3(x)=3.x ; D3(x)= x/3 ; S2(x)=x+2 ; S8(x)=x+8 ; R8(x)=x-8 ; hallar la ley de las siguientes composiciones .

a) M_3 o S_8
b) S_8 o M_3
c) S_8 oS_2
d) M_3 o [S_8 oS_2]
e) R_8 o S_8
f) D_3 o M_3

Solución:

a) M3oS8 (x) = M3 (S8 (x)) = M3 (x+ 8)= 3(x+8) = ***3 x +24***
b) S8oM3 (x) = S8 (M3(x)) = S8 (3.x) = ***3 x + 8***
c) S8oS_2 (x) = S8 (S2(x)) = S8 (x+2) = (x+2)+ 8 = ***x +10***
d) M3o[S8 oS2] (x) = M3 (S8 oS2 (x))= M3(S8(S2 (x))= M3(S8 (x+2)) =
= M3 ((x+2) + 8) = M3 (x +10) = 3 (x+10) = ***3x+30***
e) R8oS8 (***x***)= R8(S8(x)) = R8 (x+ 8)= (x+8)-8 = ***x***
f) D3oM3 (***x***)= D3(M3(x))= D3 (3.x) = (3.x)/3 = ***x***

Observaciones:

1) se pueden componer más de dos funciones ((d)) ya que no existe límite para el número de funciones a componer. Por ejemplo, si son tres funciones (f, g y h), la ley de
"h compuesta con g, compuesta con f " resulta: **h** o **g** o **f (x) = h (g (f(**x**))** .
2) la composición no es conmutativa; en general el resultado depende *del orden* en que se componen las funciones. (M3 o S8 ≠ S8 o M3)
3) en (e) y (f) observamos un fenómeno particular, que tanto R8 oS8 como D3 oM3, aplicadas a ***x*** dan como resultado ***x***. Que para que ello pase, la segunda función aplicada debe '*deshacer*' lo hecho por la primera; la segunda, ser *´la inversa´* de la primera

función identidad	A la función que lleva cada elemento en sí mismo se le da el nombre de función identidad y se la indica con el símbolo ***id*** ; o sea: ***id*** **(x) = x**

4) luego, R8 oS8 = *id* y D3 oM3 = *id*

Ejemplo 5: Hallar una función *g* que haga cierta las siguientes igualdades:

a) *g* o D4 = *id* ; b) *g* o R7 = *id*; c) *g* o [S7 o M4] = *id*

Solución: observamos que *g*, la función que debemos hallar, debe ser tal que *deshaga* lo hecho por la o las funciones aplicadas antes que ella. Este problema, en este caso, se puede resolver mentalmente. En (a) por ejemplo es fácil ver que lo *inverso* de dividir por 4 es, *multiplicar por 4;* luego: *g* =M4. Lo resolvemos analíticamente para justificar esto.

a) *g*oD4 (**x**) = *g* (D4 (x)) = *g* (x/4) = **x** ⇔ *g* (x)= 4.x [→ *g* =M4]
b) *g*oR7 (**x**) = *g* (R7 (x)) = *g* (x-7) = **x** ⇔ *g* (x)= x+7 [→ *g* =S7]
c) *g* o [S7 o M4] (**x**) = *g* (S7 (M4 (x)) = *g* ((4 x)+ 7)= **x** ⇔ *g*(x)= (x-7)/4
[→ *g* = D4oR7]

☝ Corroboramos que en cada caso, la función *g*, la que permite *volver al punto de partida*, es efectivamente la que *invierte* la operación original. Así; si dividimos, *para volver*, debemos multiplicar; si restamos, sumar; o, si hacemos operaciones combinadas como en (c), realizar las operaciones inversas, *en orden inverso*. (si multiplicamos por 4 y luego sumamos 7, para *deshacer* esto debemos restar 7 y luego dividir por 4)

¿Será esto siempre posible?; o sea, para cualquier función que se tenga, ¿será siempre posible encontrar otra que deshaga lo que esta hace ó, equivalentemente, *que invierta la correspondencia que ella determina?*. En lo que sigue tratamos esto.

1.4.3 Función Inversa

En este párrafo analizamos otra *operación* a la que podemos someter a las funciones: aquella que a partir de una función permite obtener otra con una propiedad muy especial: *la de invertir la correspondencia determinada por la original*; o sea, una función que: *conocida la imagen de un punto a través de una función dada, permita hallar el punto .*

Ejemplo 1:
Supongamos que un químico, a partir de introducir un soluto en un solvente se dedica a registrar la concentración de la solución resultante, a intervalos de 30 minutos y durante tres horas. Tal registro se presenta en la tabla 1. Esta claro que en tal caso el químico está considerando la concentración (C) en función del tiempo (t); o sea, C = f (t) y que la función f está dada por la tabla 1.

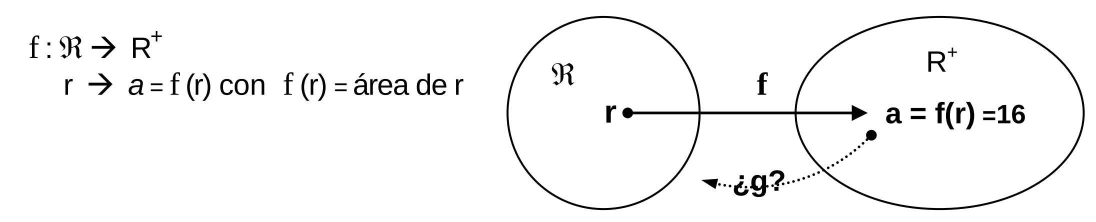
tabla 1 **C= f(t)**	t (min.)	0	30	60	90	120	150	180
	C(mg/l)	0	68	159	258	345	409	450

Supongamos que luego de realizado el registro, otro día, el químico se interesa por saber cuanto tiempo fue necesario para alcanzar cierta concentración. O sea que, dada una concentración, quiere determinar el tiempo requerido para alcanzarla.
Evidentemente para conocer esto (y para ciertos valores de concentración) le basta con ´invertir´ la lectura en la tabla 1. En tal caso, está obteniendo t como *función de C*; o sea, t = g(C) con g dada por la tabla 2. Así, la función que invierte la correspondencia original existe y está dada por la tabla 2.

tabla 2 **t =g (C)**	C(mg/l)	0	68	159	258	345	409	450
	t (min.)	0	30	60	90	120	150	180

Ejemplo 2:

Siendo $\Re$ = { r / r rectángulo de lados b y h, con b,h $\in R^+$ }, definimos:



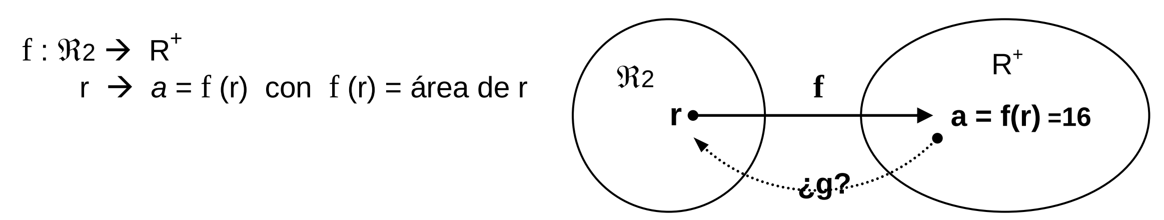
En este caso: ¿existe g, función que invierta la correspondencia determinada por f ?.
Equivalentemente:
¿existe g tal que a cada ***a*** positivo asigne un rectángulo en $\Re$, sólo uno y de área ***a*** ?.
En este caso vemos que no existe tal función. ¿Porqué?: porque dado ***a*** podemos determinar infinitos rectángulos con este área y entonces: ¿cuál de ellos tomamos?; ¿cuál de ellos asignamos a ***a*** ?. Por ejemplo si ***a*** =16 tenemos :

a = 16 →
$r_1 \leftrightarrow$ [h = 1 ; b = 16]
$r_2 \leftrightarrow$ [h = 2 ; b = 8]
$r_3 \leftrightarrow$ [h = 4 ; b = 4]
$r_4 \leftrightarrow$ [h = 5 ; b = 3.2]
$r_5 \leftrightarrow$ [h = π ; b = 16 / π]

} g (a) = ¿ r_5 ? ; ¿ r_2 ?; ¿ r_1 ?

Ejemplo 3:

Siendo $\Re 2$ = { r / r rectángulo de lados b y h, con h =2, b $\in R^+$ }, definimos:



En este caso: ¿existe g, función que invierta la correspondencia determinada por f ?.
Equivalentemente:
¿existe g tal que a cada ***a*** positivo asigne un rectángulo de $\Re 2$, sólo uno y de área ***a*** ?.
En este caso vemos que sí existe tal función. ¿Porqué?: porque dado ***a*** hallamos un único rectángulo cuya área sea ***a*** y esté en $\Re 2$; luego, podemos *´volver´*.
Por ejemplo si ***a*** =16 tenemos :

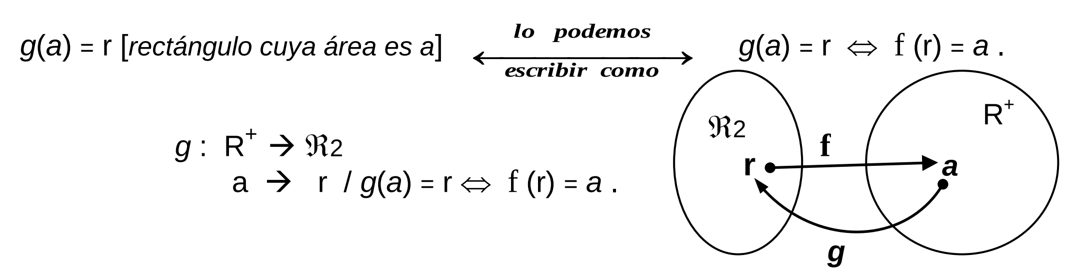
a = 16 →
$r_1 \leftrightarrow$ [h = 1 ; b = 16]
$r_2 \leftrightarrow$ [h = 2 ; b = 8] $\in \Re 2$
$r_3 \leftrightarrow$ [h = 4 ; b = 4]
$r_4 \leftrightarrow$ [h = 5 ; b = 3.2]
$r_5 \leftrightarrow$ [h = π ; b = 16 / π]

} g (a) = r_2

Así, y en general, para g tenemos que:

g : $R^+ \to \Re 2$
a → r = g(a) con g(a) = rectángulo <u>de $\Re 2$</u> cuya <u>área es a</u>.

ⓘ La ley de *g* admite (como cualquier función) varias formas de ser expresada. De todas ellas buscamos aquella que resulte la más general posible (en el sentido de que sirva para este ejemplo y para cualquier otro de la misma naturaleza), la que 'explicite', 'haga visible' la propiedad fundamental que caracteriza a la función *g*: *la de invertir la correspondencia determinada por* f . Así, y bajo estas condiciones tenemos que:



Los ejemplos analizados justifican la siguiente:

DEFINICION:



Dada **f**:A→B, si existe una función **g**:B→A que invierte la correspondencia determinada por **f**, a **g** la llamamos función inversa de **f** .

O sea: **g** inversa de **f** ⇔

» **Dominio g** = Codominio f

» **Codominio g** = Dominio f

» **Ley de g**: g(*y*) = *x* ⇔ f (*x*) = *y*

ⓘ Algunas veces, no todas, la ley de la función inversa se puede expresar a través de una fórmula. Obviamente, si tal fuera el caso, buscamos la fórmula.

Ejemplo 4: M3: ¿admite inversa?

M3: R → R
x → y = 3.x

g: R → R
y → g(y)= x ⇔ M3(x)= y
g(y)= x ⇔ 3.x = y
g(y)= x ⇔ x = y/3

g(y) = y/3

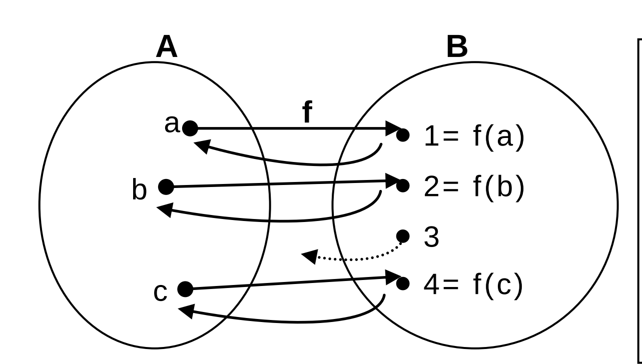
Respuesta: existe g inversa de M3 (multiplicar por 3), y g = D3 (dividir por 3)

Cuestiones relativas a la función inversa

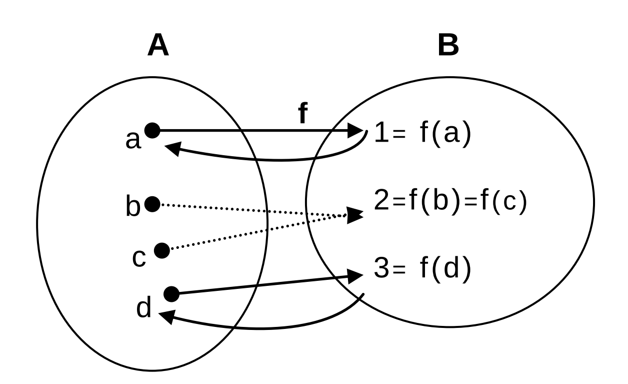
▪ Definida la función inversa surge la siguiente inquietud:
¿siempre existirá?; ¿cualquiera sea la función de partida?. La respuesta a estas preguntas es NO. En el ejemplo 2 tenemos una función que no admite inversa.

▪ La existencia de función inversa está sujeta a ciertas restricciones sobre f, la función original. Estas restricciones están relacionadas con las condiciones que debe cumplir una correspondencia entre conjuntos para ser función.

▪ Dada f: A→ B, básicamente son dos los problemas que se pueden presentar para la existencia de g, inversa de f ; o sea, de g: B→ A tal que g(*y*) = *x* ⇔ f (*x*) = *y* .



Problema 1: que existan elementos de B (codominio f), que no sean imagen por f de ningún elemento de A. Si estos puntos existen, g (función que *´vuelve´), no se puede definir en todo* B *.*
En el ejemplo, el elemento 3 del conjunto B no puede *volver* a A (no provino de A); luego, no se puede definir g(3) .
Conclusión: no existe función inversa.



Problema 2: que existan elementos en B, imagen por f de más de un elemento de A. Si estos puntos existen, g (función que *´vuelve´*) *no se puede definir en ellos*.
En el ejemplo, el elemento 2 del conjunto B puede *volver* tanto a *b* como a *c*; o sea, le corresponden dos valores en A. Luego, esta correspondencia no puede ser función.
Conclusión: no existe función inversa.

- ¿Qué particularidad de f origina el Problema 1? : que **Im f ≠ C_f.**
- ¿Qué particularidad de f origina el Problema 2?: que ***distintos elementos del dominio, tienen imágenes iguales .***

Para identificar las funciones que tienen el Problema 1 y/ó el Problema 2 definimos tres nuevos conceptos: *suryectividad ; inyectividad y biyectiivdad*

DEFINICIÓN

función suryectiva	f es suryectiva ⇔ **Im f = C_f**. (Imagen igual a Codominio)

- En el Problema 1, f no es suryectiva : **Im f** = {1, 2, 4} ≠ **C_f** = {1, 2, 3, 4}

- En el Problema 2, f es suryectiva : **Im f** = {1, 2, 3 } = **C_f** = {1, 2, 3 }

DEFINICIÓN

función inyectiva	f es inyectiva ⇔ ∀ a,b ∈ D_f ; **a** ≠ **b** ⇒ **f(a)** ≠ **f(b)**

- En el Problema 1, f es inyectiva : f(a) ≠ f(b) ; f(a) ≠ f(c) ; f(b) ≠ f(c)

- En el Problema 2, f no es inyectiva : b ≠ c y f(b) = f(c) =3

DEFINICIÓN

función biyectiva	f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es inyectiva y suryectiva

Conclusiones:

1) el codominio de una función juega un rol importante en cuanto a la existencia de función inversa. El Problema 1 muestra que si $\mathbf{C}_f \neq \mathbf{Im\,f}$ entonces f no admite función inversa. Dicho de otra forma, usando las nuevas definiciones:

f ***no suryectiva*** $\Rightarrow$ **f** ***no admite inversa***

Luego, la suryectividad es *condición necesaria* (CN) para la existencia de inversa.
Por otro lado, en el Problema 2, f es suryectiva y sin embargo tampoco admite inversa. O sea, la suryectividad *no es condición suficiente* (CS) para la existencia de inversa.

2) la calidad de las imágenes de una función también juega un rol importante en cuanto a la existencia de función inversa. El problema 2 muestra que si elementos distintos del dominio de f *tienen imágenes iguales* entonces no existe función inversa. De otra forma:

f ***no inyectiva*** $\Rightarrow$ **f** ***no admite inversa***

Luego, la inyectividad es *condición necesaria* (CN) para la existencia de inversa.
Por otro lado, en el Problema 1, f es inyectiva y sin embargo no admite inversa. O sea, la inyectividad *no es condición suficiente* (CS) para la existencia de inversa.

RESUMEN:

(I) no toda función admite inversa.
(II) la SURYECTIVIDAD es CN para la existencia de inversa; pero no es CS
(III) la INYECTIVIDAD es CN para la existencia de inversa; pero no es CS.

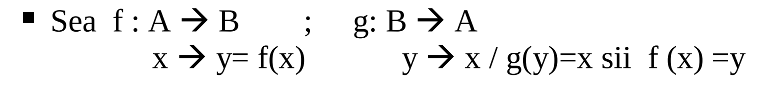
▪ ¿Existe alguna *condición suficiente* (CS) para la existencia de función inversa?.
Es fácil verificar que si se cumplen *las dos condiciones necesarias* (suryectividad e inyectividad) entonces existe *función inversa*. O sea, que la biyectividad es una *condición necesaria y suficiente* para la existencia de inversa:

f admite inversa $\Leftrightarrow$ f es biyectiva

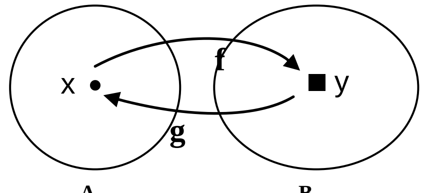
▪ La función inversa de f se acostumbra a indicar con el símbolo f^{-1}.
En principio, y hasta tanto no se domine la noción de función inversa, no vamos a usar esta notación ya que la misma puede confundirse con la de función recíproca de f (1/f) y, sin dudas, inversa y recíproca son funciones muy distintas una de otra.

Así; la ley de $\mathbf{f}^{-1}$ inversa de **f** es: $\mathbf{f}^{-1}(y)=x \Leftrightarrow \mathbf{f}(x)=y$; mientras que,
la ley de $\mathbf{1/}\boldsymbol{f}$, la recíproca de $\boldsymbol{f}$, es: $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- Si g es la inversa de *f* , entonces *f* es la inversa de g.
  O sea; la inversa, *de la inversa de f,* es *f* → $(f^{-1})^{-1} = f$



- Sea f : A → B ; g: B → A
  x → y= f(x) y → x / g(y)=x sii f (x) =y



Entonces:

gof(**x**) = g(f(x)) = g(y) = **x**
fog(**y**) = f(g(y)) = f(x) = **y**

O sea:

gof(**x**) = **x** ; ∀ **x** ∈ **A** ⇒ **gof** = $\mathbf{id}_A$
fog(**y**) = **y** ; ∀ **y** ∈ **B** ⇒ **fog** = $\mathbf{id}_B$

(*) La primera ecuación dice que si partimos de x, aplicamos f y luego g (inversa de f) entonces *volvemos a x* .De este modo queda claro que la inversa de f *deshace* lo que f hace. La segunda ecuación dice que f deshace lo que g hace. Por ello es que estas ecuaciones se llaman ***ecuaciones de cancelación.***

- Otra condición necesaria y suficiente para que g sea la inversa de f es que la composición de ambas de por resultado la identidad: **gof = fog = id** (en A ó B)

- ***Proceso para determinar g, función inversa de una función biyectiva* f**

» Explicitamos claramente dominio, codominio, variables y ley de f .
» Verificamos que f sea biyectiva.
» Establecemos claramente dominio y codomino de g inversa de f .
» Establecemos la ley de g, *por definición*: ***g (y)=x sii* f *(x) =y***
» Si la ley de f está dada por una fórmula, intentamos expresar g por una fórmula. Para ello, a partir de la ecuación y = f(x) debemos llegar a la ecuación x = g(y); proceso este que será factible toda vez que podamos despejar x en términos de y.
» De ser necesario, intercambiamos x con y para expresar g como función de x.

Ejemplo: hallar la función inversa de f si f = S5 o M2

» f : R → R / y = f(x) con f(x) = S5 oM2 (x) = 2.x+ 5
» f es biyectiva → f admite función inversa "g"
» g : R → R
» Ley g (*x def.)* : g(y) = **x** ⇔ f(**x**) = y
g(y) = **x** ⇔ 2.**x** + 5 = y   *despejamos x*
g(y) = **x** ⇔ **x** = (y - 5)/2

Ley g (*x fórmula.)* **g(y) = (y - 5)/2**

» Si intercambiamos x con y → y=g(x) con g(x) = (x - 5)/2
» Finalmente: g = D2oR5 , es la función inversa de f.

Observación: *¿despejar ?, ¿qué operación es esta?*

✓Conocer el concepto de función inversa nos permite comprender que hacemos, en esencia, cuando *despejamos* una incógnita en una ecuación; que, *despejar x* de la ecuación y = f (x), no es otra cosa que aplicar a ambos miembros de la ecuación la función inversa de f .

Efectivamente, si a $y = f(x)$

aplicamos f^{-1} $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$

obtenemos: $f^{-1}(y) = f^{-1} \text{ o } f(x)$

o sea: $f^{-1}(y) = id(x) = x$ } $x = f^{-1}(y)$

✓ En el ejemplo, para f = S5 oM2 encontramos que su inversa es g = D2oR5. O sea, corroboramos lo que ya habíamos descubierto para la composición de funciones, *que la inversa de la compuesta es la compuesta de las inversas, en el orden inverso*.

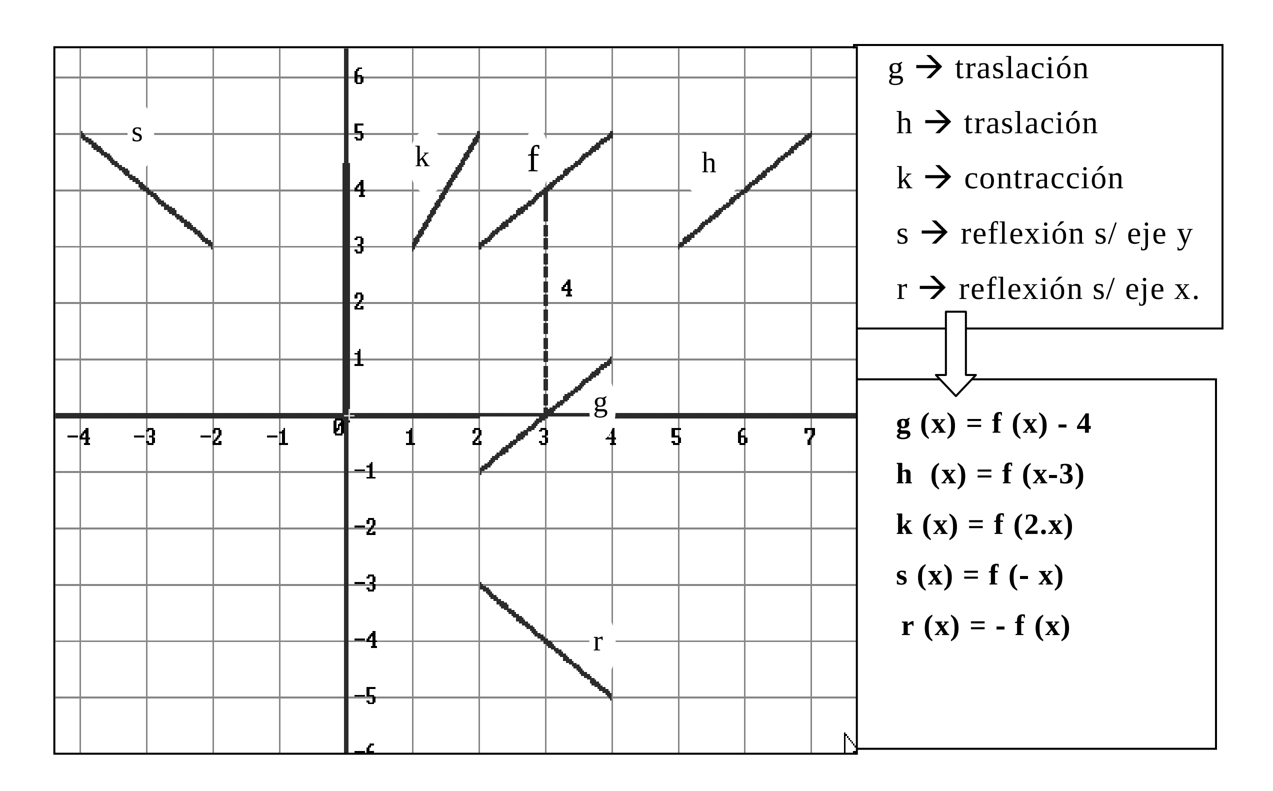
$$(k \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ k^{-1}$$

A la vez, concluimos que *despejar x* de y = f (x) en el caso que f es una función compuesta, f = k o h, *no es otra cosa que aplicar, paso a paso, y en orden inverso, las funciones inversas de cada una de las que forman la composición.*

1.4.4 Operaciones gráficas con funciones

En los párrafos anteriores vimos distintos tipos de operaciones con funciones dadas: *operaciones algebraicas*, *de composición* y *de búsqueda de inversa*. En este párrafo vemos otra forma de generar funciones a partir de una dada: a través de *operaciones gráficas* (traslaciones, deformaciones, reflexiones, etc) Así, dada la función **y =f(x),** su gráfico **C** puede ser *trasladado*, *deformado* o *reflejado respecto de un eje*; operaciones todas estas que en forma genérica reciben el nombre de *transformaciones.*
Este conjunto de acciones permite un abordaje distinto de las funciones; facilita, a partir de entender las mismas como ***curvas completas*** asociadas a una ***función prototipo,*** el estudio de los aspectos globales que las caracterizan y/o distinguen.
Efectivamente, al efectuar una transformación sobre **C** obtenemos una nueva curva, **C***; por ende, una nueva función, **g** tal que **graf g**=**C*** . La expresión analítica de esta nueva función es de la forma **g**(x)=A.**f**(ax+b)+B; con **f** la función original (*la prototipo)* y a, b, A , B constantes cuyo valor depende de la transformación aplicada; constantes que en general llamamos *parámetros.*
Tales *parámetros* resultan así el nexo entre la función original y su transformada, entre sus correspondientes formas analíticas y gráficas. Luego, para estudiar las operaciones gráficas sobre curvas, su efecto sobre la función correspondiente, basta con estimar el efecto de la variación de parámetros en la forma analítica **y**=A.**f**(ax+b)+B.

En lo que sigue, a partir de f(x)=x+1 con Df=[2,4] realizamos una serie de operaciones gráficas y establecemos las expresiones analíticas que les corresponden.



Conclusiones:

1) las traslaciones parecen estar asociadas a la suma (ó resta) de un parámetro a la función o a la variable, según la dirección y sentido de la traslación.
2) la contracción resultaría como consecuencia de multiplicar la variable por un número positivo mayor que 1.
3) las reflexiones parecen resultar de multiplicar por -1 la variable ó la función, según sea el eje respecto al cual se producen.

Estos hechos para ser enunciados como reglas deben ser demostrados:

Demostramos una de ellas el resto queda como ejercicio:
"si el graf g resulta de *trasladar k unidades hacia abajo* el graf f, entonces g(x)=f(x)–k"

Dados Q $\in$ graf g y P $\in$ graf f , ambos con la misma abscisa, entonces la ordenada de Q es menor que la de P y la distancia entre ellos es igual a *k*.

- P $\in$ graf f → P (x, f(x))
- Q $\in$ graf g → Q (x, g(x)) / g(x) < f(x)

d (Q,P)= $\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-g(x))^2} = |f(x)-g(x)| \xrightarrow{d(Q,P)=k}$ | f(x) –g(x)| = k

g(x) < f(x) → | f(x) –g(x)| = f(x) –g(x)

- luego, | f(x) –g(x)| = k → f (x) – g(x) = k → **g(x) = f(x) - k**

▪ La siguiente TABLA resume las transformaciones fundamentales.

	TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES	
	Def. de g	**Transformación a realizar sobre el grafico de f para obtener el grafico de g.**
traslaciones	**g(x) = f(x) + k**	**.... subir k unidades**
	g(x) = f(x) - k	**.... bajar k unidades**
	g(x) = f (x + h)	**.... trasladar h unidades a izquierda**
	g(x) = f (x - h)	**.... trasladar h unidades a derecha**
alargamientos	**g(x) = c f (x)**	**.... alargar verticalmente en un factor ´c´**
	g(x) = (1/c) f (x)	**.... comprimir verticalmente en un factor ´c´**
	g(x) = f (c.x)	**.... comprimir horizontalmente en un factor ´c´**
	g(x) = f ((1/c) x)	**.... alargar horizontalmente en un factor ´c´**
reflexiones	**g(x) = - f(x)**	**.... reflejar respecto del eje x**
	g(x) = f(-x)	**.... reflejar respecto del eje y**
	g(x) = | f(x) |	**.... reflejar respecto del eje x la parte del graf f que está *por debajo del eje x.***
	Las constantes k , h y c cumplen: k >0 **;** h > 0 **;** c > 1	

● Las funciones, según su *estructura algebraica* se clasifican en: polinómicas; racionales (cociente de polinomios); algebraicas (± ; producto; cociente y/ó raíz de polinomios) y trascendentes (aquellas que no son algebraicas, que *trascienden los métodos del álgebra*, como por ejemplo: trigonométricas , exponenciales, logaritmos).

● En los párrafos que siguen vamos a estudiar estas funciones pero siempre a partir de aquellas que llamamos *prototipos*; o sea, a partir de aquellas que siendo elementales tienen todos los rasgos que caracterizan a un determinado tipo o clase de función.

1.5 Funciones Reales a Variable Real

- En esta sección comenzamos el estudio de funciones cuyo dominio y codominio son siempre conjuntos de números reales.
- Analizamos en profundidad la definición, propiedades y características esenciales de funciones a las que llamamos *prototipo*; las cuales constituyen la *base* para el desarrollo del CALCULO ó ANÁLISIS MATEMÁTICO.
- Tales *funciones* son: lineal, potencia, raíz, cuadrática (como caso particular de polinomio), homográfica, exponencial, logaritmo, trigonométricas, inversa de las trigonométricas e hiperbólicas.

- ¿Cómo trabajamos en esta sección?
  ⇨ consideramos la memoria (M) como un ente real donde iremos guardando funciones a medida que las estudiemos.

⇨En el inicio reconocemos sólo cuatro funciones en la memoria :
Sumar k (Sk), Restar k (Rk), Multiplicar por k (Mk) y Dividir por k (Dk).

⇨Dada una función f , si está en M, decimos que f es ***conocida*** (*)

⇨Si f *no* está en M, decimos que f es una función ***desconocida* (*)**

⇨***operamos*** (*) con funciones de la memoria y *generamos* nuevas funciones; estas serán ***conocidas*** ó ***desconocidas*.**

⇨***generada una función `desconocida´, la estudiamos y la guardamos en la memoria. A partir del momento en que la guardamos en*** M ***la función pasa a la categoría de*** ***conocida*** **.**

precisamos términos

(*) ***conocida*** → está en M → ej: S_4 (sumar 4)

(*) ***desconocida*** → no está en M → ej: logaritmo.

(*) ***operar*** → por operar con funciones entendemos :

- SUMAR FUNCIONES → [f+g] / [f+g](x) = f (x) + g(x)
- RESTAR FUNCIONES → [f -g] / [f -g](x) = f (x) - g(x)
- MULTIPLICAR FUNCIONES → [f.g] / [f.g](x) = f (x) . g(x)
- DIVIDIR FUNCIONES → [f /g] / [f /g](x) = f (x) / g(x)
- COMPONER FUNCIONES → [f $_0$ g] / [f $_0$ g](x) = f (g(x))
- BUSCAR INVERSA DE f → g / g $_0$ f = id.

ⓘ Vemos como funciona este proceso: tomamos dos funciones de M, S_4 y S_6 , operamos con ellas y clasificamos el resultado en función ***conocida*** ó ***desconocida*** :

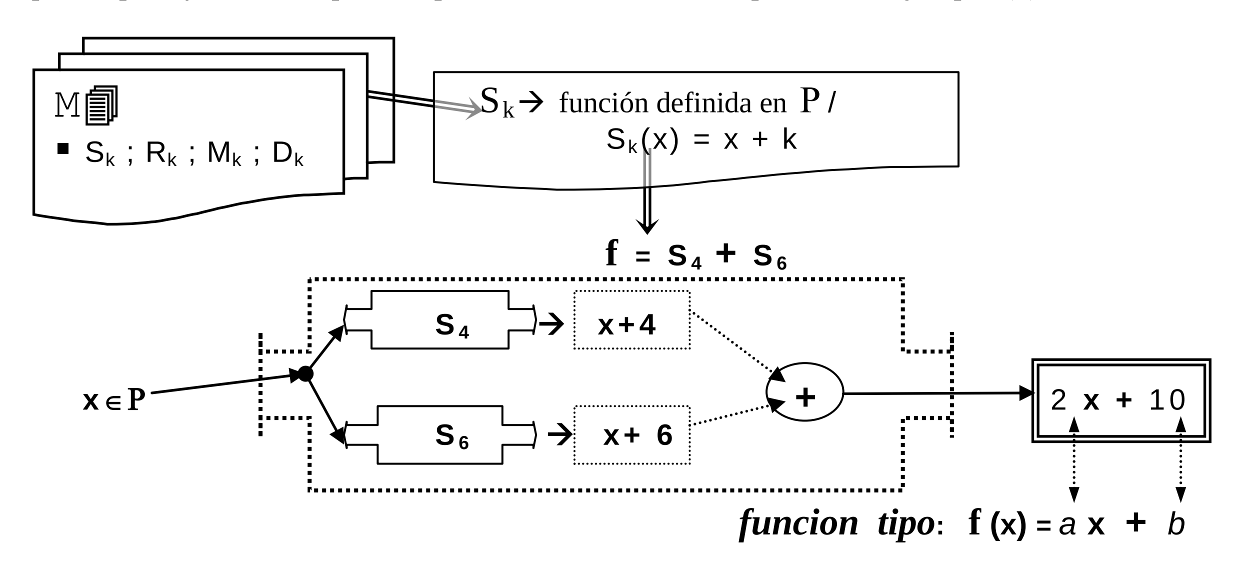
1) $[S_4\ _0\ S_6](x) = S_4(S_6(x)) = S_4(x+6) = (x+6) + 4 = \mathbf{x + 10 = S_{10}}$ → ***conocida***

2) $[S_4 + S_6](x) = S_4(x) + S_6(x) = (x+4)+(x+6) = \mathbf{2x + 10}$ *(polinomio)*→ ***desconocida***

3) $[S_4 \cdot S_6](x) = S_4(x) \cdot S_6(x) = (x+4) \cdot (x+6) = \mathbf{x^2 + 10x + 24}$ *(polinomio)*→ ***desconocida***

4) $[S_4 / S_6](x) = S_4(x) / S_6(x) = \dfrac{x+4}{x+6}$ *(racional)*→ ***desconocida***

ⓘ Las tres últimas funciones no están en M ; además, cada una de ellas presenta un ***tipo distinto*** al de las otras; o sea, alguna característica que la distingue del resto e indica que no están en la misma clase. Son por lo tanto aquellas que llamamos *funciones prototipo* o *funciones tipo*. Empezamos a estudiarlas a partir del ejemplo (2).



Obtenemos un polinomio de grado 1 (o menor) al que llamamos, *función lineal.*

1.5.1 **Función Lineal: f (x) = a x + b ; a , b ∈ P**

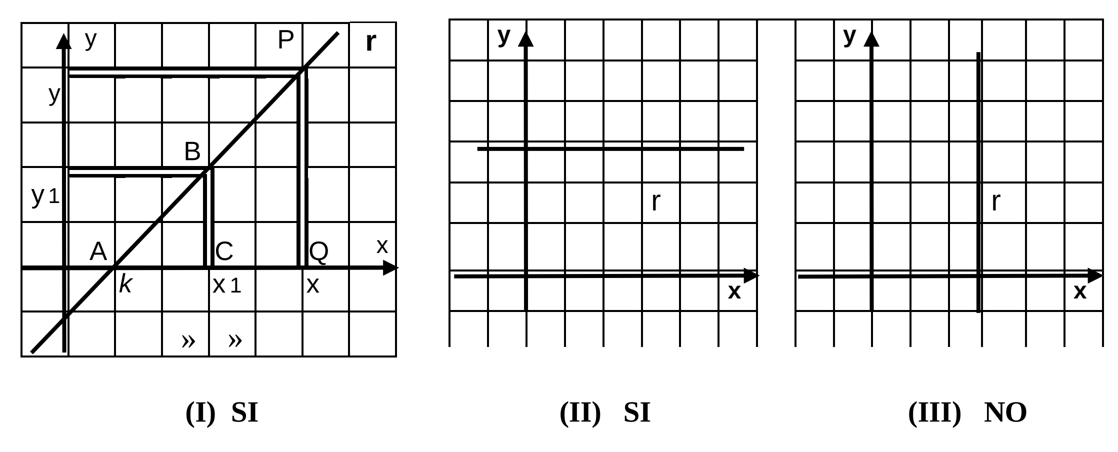
Llamamos función lineal a todo polinomio de grado menor o igual a 1; *f (x) = a x + b*
Los coeficientes ***a*** y ***b***, son los parámetros que caracterizan a esta función:

a = coeficiente de la v.i. ;
b = término independiente.

- **D_n= P ; C_n= P ; graf f = *recta***

- ***¿vale la recíproca?***; o sea: *¿toda recta del plano es la gráfica de una función lineal ?*.

Analizamos las siguientes rectas y las sometemos a la *prueba de la recta vertical* para decidir si definen o no, función.



(I) SI **(II) SI** **(III) NO**

Conclusión: r es el gráfico de una función ⇔ r no es paralela al eje y
Problema: si r es gráfico de una función f , ¿ es f una *función lineal ?*

Proposición: Toda recta no paralela al eje y es gráfico de una función lineal.

Sean **A** ; **B** puntos fijos y **P**(x,y) un punto *móvil* en la recta **r** del gráfico (I)
Sea **f** tal que **graf f** = **r** .

Buscamos la ley de **f :** del gráfico (I) vemos que: $\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{APQ}$; luego

$$\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{AQ}|} \Rightarrow \frac{y_1}{x_1 - k} = \frac{y}{x - k} \Rightarrow y = \underbrace{\left[\frac{y_1}{x_1 - k}\right]}_{a} . x + \underbrace{\left[\frac{-y_1 . k}{x_1 - k}\right]}_{b}$$

Conclusión: ***y*** = a **x** + b ⇒ ***y*** = **f** (x) con **f** (x) = a **x** + b ⇒ **f *función lineal***

Observaciones:

- Para graficar rectas recordamos que *´dos puntos determinan una recta´*.
- El gráfico de una función lineal es una recta si y sólo si el dominio es **P**.

Dada **f (x) = 2 x – 2 ,** graficamos esta función para distintos dominios.

(I) D_f = P

x	y	*punto*
0	- 2	(0; -2) → r ∩ eje y
1	0	(1; 0) → r ∩ eje x

gráfico de f = *recta*

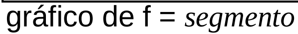
(II) D_f = [2;+∞)

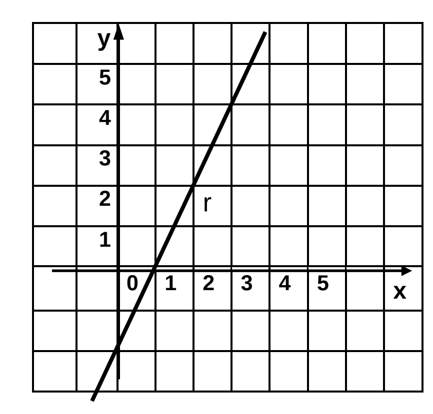
x	y	*punto*
2	2	Q (2; 2)
3	4	(3; 4)

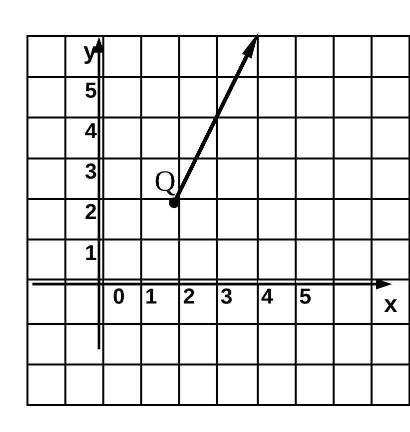
gráfico de f = *semirrecta*

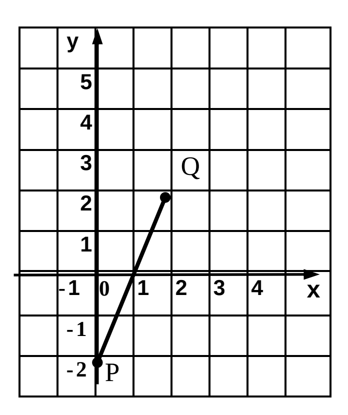
(III) D_f = [0; 2]

x	y	*punto*
0	- 2	P (0; -2)
2	2	Q (2; 2)


gráfico de f = *segmento*







▪ Si f es una función seccionalmente definida, si las leyes que la forman son leyes correspondientes a funciones lineales, entonces el gráfico de f es una consecución de segmentos, puntos y/o semirrectas.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 \ ; \ \text{si} \ \ 0 \leq x < 2 & [\text{ segmento }] \\ 5 \ ; \ \text{si} \ \ x = 2 & [\text{ punto aislado }] \\ 2x - 2 \ ; \ \text{si} \ \ x > 2 & [\text{ semirrecta }] \end{cases}$$

x	y	*punto*
0	3	(0 ; 3) → extremo del segmento (incluido)
2	1	(2 ; 1) → extremo del segmento (*no incluido*)
2	5	(2 ; 5) → punto aislado (incluido)
2	2	(2 ; 2) → origen semirrecta (*no incluido*)

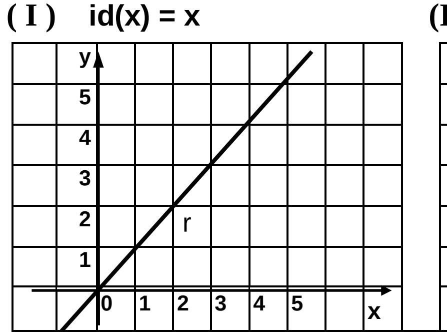
***Nota**: si el dominio es un intervalo abierto en alguno de sus extremos, el punto que corresponde a ese extremo no pertenece al gráfico de la función. De todas maneras obtenemos sus coordenadas para que nos guíe en el trazado de los correspondientes segmentos o*

▪ *Casos especiales*: son casos relativos a valores particulares de los parámetros:

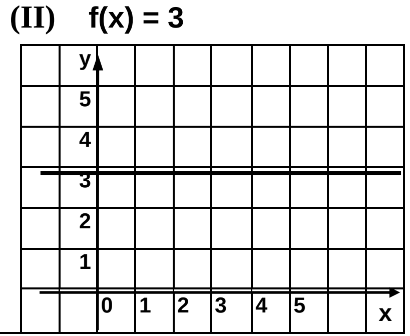
f (x) = a x + b : (I) **a = 1** y **b = 0** → **f(x) = x ;** función identidad → **f = id**

(II) **a = 0** → **f(x) = b ;** función constante

(I) **id(x) = x**

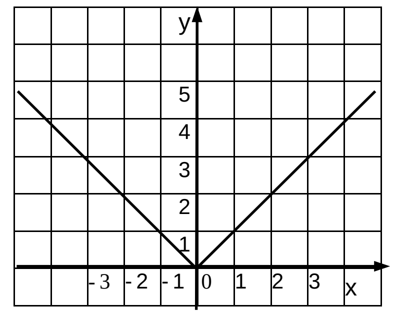


(II) **f(x) = 3**



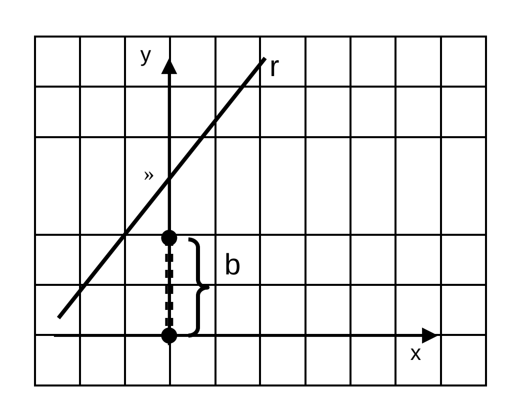
- ***función valor absoluto:*** **f(x) = | *x* |** ; este es un caso particular de función seccionalmente definida, ya que por definición de valor absoluto tenemos :

$$f(x) = \begin{cases} x \;;\; \text{si } x \geq 0 & [\text{semirrecta en } R^{+}] \\ -x \;;\; \text{si } x < 0 & [\text{semirrecta en } R^{-}] \end{cases}$$



- **Análisis de los Coeficientes en f(x) = a x + b**

» **(I)** ***Estudio del termino independiente*:** **b**



» ¿coordenadas del punto P_y = r ∩ eje y ?

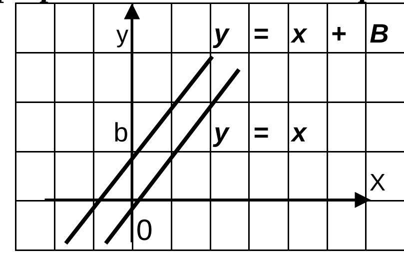
P_y(x; y) → $\begin{cases} x \text{ ™ } D_f \\ y = f(x) \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) = b \end{cases}$

» **luego:** P_y (0; b)

» *conclusión***:** b **es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje y.**

» b**:** *ordenada al origen*

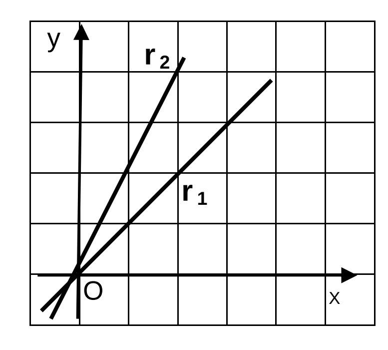
ⓘ ***propiedad del término independiente*:** indica si r pasa por el origen O.



» b = 0 ⇒ r **pasa por el origen**

» b ≠ 0 ⇒ r ***no* pasa por el origen**

» **(II)** ***Estudio del coeficiente de x*** : **a**



» **Dadas:**

r_1) **f(x) = x** → a = 1
r_2) **f(x) = 2 x** → a = 2

» **¿qué varía de una recta a otra? :**

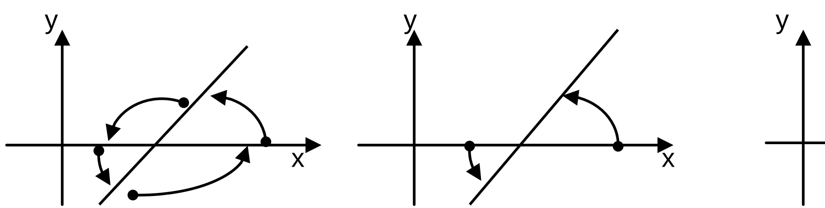
ⓘ ***propiedad del coeficiente de x*** : dada f(x) = a.x + b tenemos entonces que **a**, coeficiente de x, está relacionado con la inclinación de la recta r = graf f.

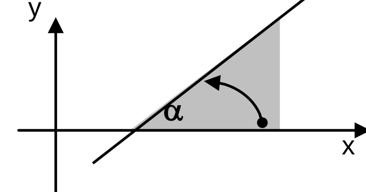
La pregunta que surge inmediatamente es *cómo* están relacionados *coeficiente e inclinación*. Para investigar esto necesitamos precisar que entendemos por inclinación.

DEFINICION:

inclinación	♦ **Dada una recta** r **no paralela al eje x, llamamos inclinación, al** ángulo α **formado por la recta y el eje x. (*)** ♦ **Si** r **es paralela al eje x, entonces** $\alpha = 0$

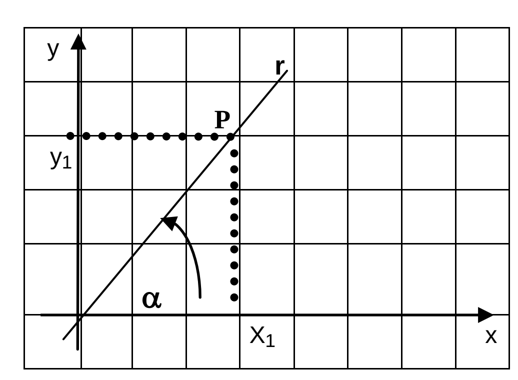
(*) La recta determina cuatro ángulos con el eje x; luego, es necesario convenir cual de ellos reconocemos como *ángulo formado por la recta con el eje x*; así, este es, "el ángulo generado en sentido antihorario, con lado inicial en el eje x y final en **r** y tal que el lado inicial esté orientado en el sentido creciente del eje x ".





🛈 El coeficiente a es un *número* y la inclinación un *ángulo* luego, *no pueden ser iguales* La relación entre estos objetos matemáticos la podemos investigar del gráfico de f; pero, en tal caso debemos considerar la graduación de los ejes coordenados; en particular, si ambos ejes están o no graduados con la misma escala.

(1) ejes coordenados graduados con la misma escala.



Dada r, tal que r : y = a x, tenemos :

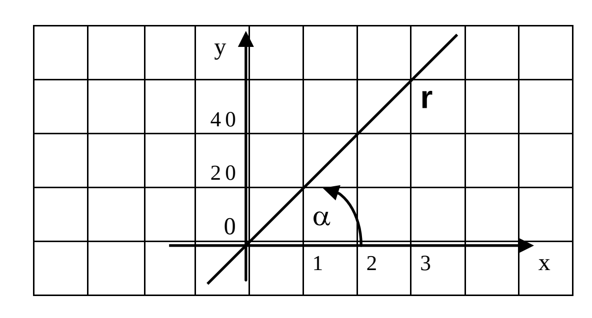
» P (x_1 ; y_1) $\in$ r $\Rightarrow$ $y_1 = a\,x_1$ $\Rightarrow$ $a = \dfrac{y_1}{x_1}$

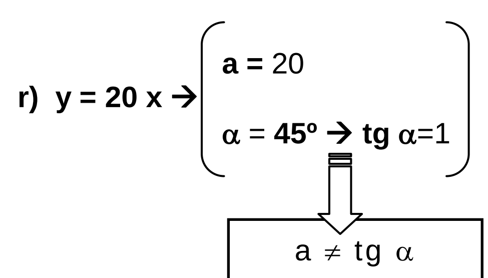
» $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_1}{x_1}$

Conclusión: si los ejes coordenados están graduados con la misma escala entonces,

$$\mathbf{a = tg\ \alpha}$$

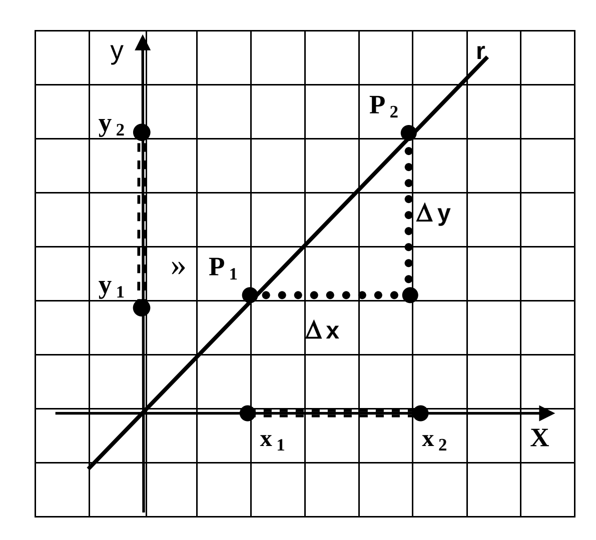
Nota: es importante destacar que si los ejes no están graduados con la misma escala, entonces **a ≠ tg α.**





(2) ejes coordenados graduados con escalas distintas: ¿ a ?

A los fines de ver como relacionar en este caso *coeficiente* e *inclinación* procedemos a analizar r : y = a x + b



Si sobre el eje *x* pasamos de x_1 a x_2 ; o sea, recorremos una distancia igual a $x_2 - x_1$; entonces sobre la recta pasamos de P_1 a P_2 y, respecto de P_1, nos elevamos una distancia igual a $y_2 - y_1$.
Luego:
para un *recorrido* **de $x_2 - x_1$**
tenemos una *elevación* **de $y_2 - y_1$**

(*) tradicionalmente la letra **Δ** se usa para indicar *variaciones* ó *incrementos;* así:

$x_2 - x_1 = \Delta x$

$y_2 - y_1 = \Delta y$

• ***Importante***: si sobre una recta no vertical fijamos P_1 y variamos P_2 ; los triángulos determinados en cada caso por Δx, Δy y $\overline{P_1P_2}$ son, *triángulos semejantes*. Resulta así que el cociente de los catetos, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, da siempre lo mismo ó, dicho de otra manera, *la razón* del cambio en *y* al cambio en *x* , *permanece constante*.
Luego, *esta razón ó cociente, al permanecer constante, proporciona otro valor que podemos relacionar con la inclinación de la recta ya que el mismo informa acerca de cuanto varía y por cada cambio unitario en x; equivalentemente, cuanto se ´eleva´ la recta cuando x se incrementa en una unidad.*
En razón de ello a este valor le damos un nombre, lo llamamos *pendiente de la recta*.

DEFINICIÓN:

Pendiente de la recta	**llamamos *pendiente* de la recta no vertical que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ al número *m* tal que:** $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \left[\frac{\text{´elevación´}}{\text{´recorrido´}}\right]$

Proposición

Dada la función lineal f, el coeficiente de x es igual a la pendiente de la recta gráfica de f.

Demostración: dada f(x) = a x + b , consideramos dos puntos del graf f = r .

» $P_2 \in \mathbf{r} \Rightarrow y_2 = \mathbf{a}\, x_2 + b$

» $P_1 \in \mathbf{r} \Rightarrow y_1 = \mathbf{a}\, x_1 + b$

$y_2 - y_1 = (\mathbf{a}\, x_2 + b) - (\mathbf{a}\, x_1 + b)$

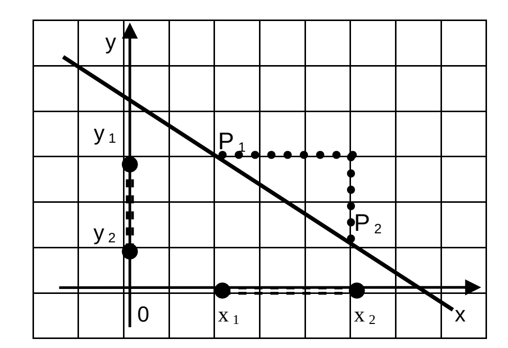
Luego, $y_2 - y_1 = \mathbf{a}\,(x_2 - x_1) \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Conclusión: **a = m** , pendiente de la recta.

Observaciones:

1) **a** = **m** trabajemos con ejes graduados *iguales* ó *distintos*.

2) Cuando P_1 y P_2 están en otra posición relativa, el vocablo "elevación" no es el más apropiado; sin embargo, lo conservamos para expresar $(y_2 - y_1)$.



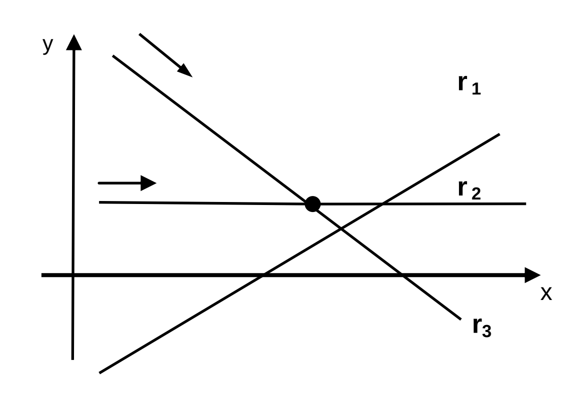
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \left[\frac{\text{´elevación´}}{\text{´recorrido´}}\right]$$

***Observación*:**

puesto que : $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

para el cálculo de la pendiente no importa el "orden" de los puntos.

3) Una recta que no es paralela a ningún eje coordenado puede *´elevarse´* desde abajo e izquierda (r_1) ó, *´caer´* desde arriba e izquierda (r_3).



Luego :

- **r_1 es estrictamente creciente**
- **r_3 es estrictamente decreciente**

¿cómo se relaciona esto con `m´ ? :

- **m > 0 → f estrictamente creciente (r_1)**
- **m < 0 → f estric. decreciente (r_3) [⌦]**
- **m = 0 → f función constante (r_2)**

⌦ **Proposición** $f(x) = m x + h$; $m < 0 \Rightarrow$ f estrictamente decreciente

Demostración:

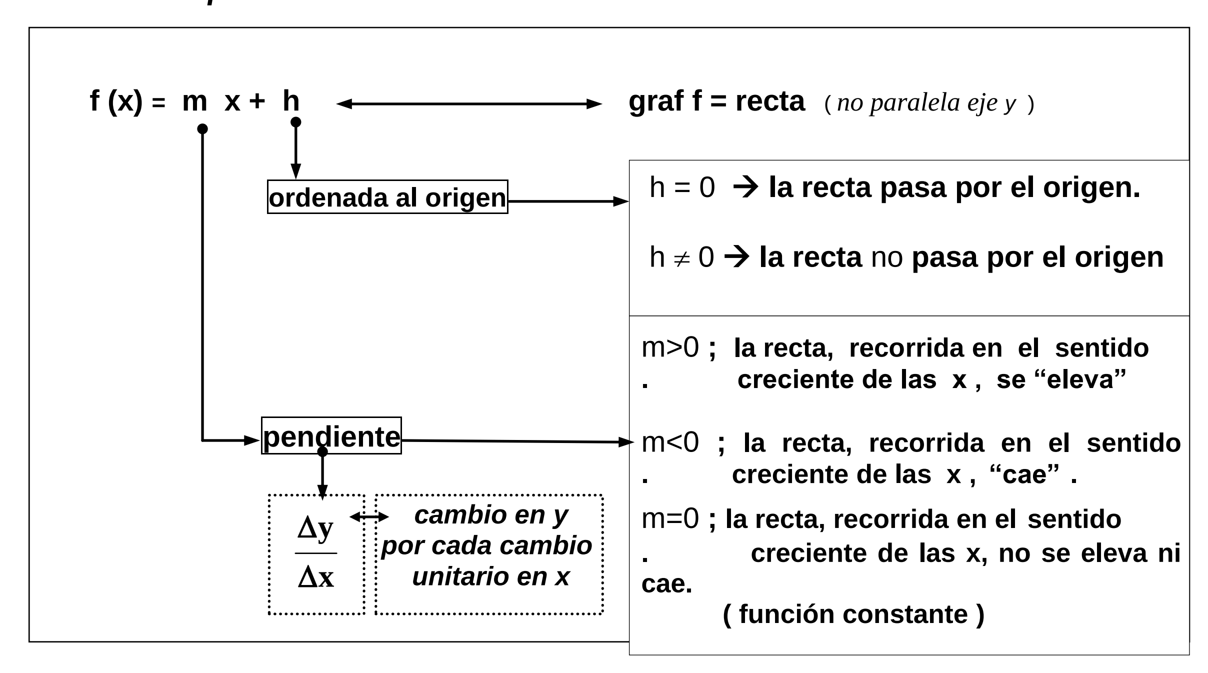
» $m < 0 \Rightarrow$ f estrictamente decreciente →→

> **Repasamos la definición:**
> **f estrictamente decreciente ⇔**
> $\forall\ x_1, x_2 ;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

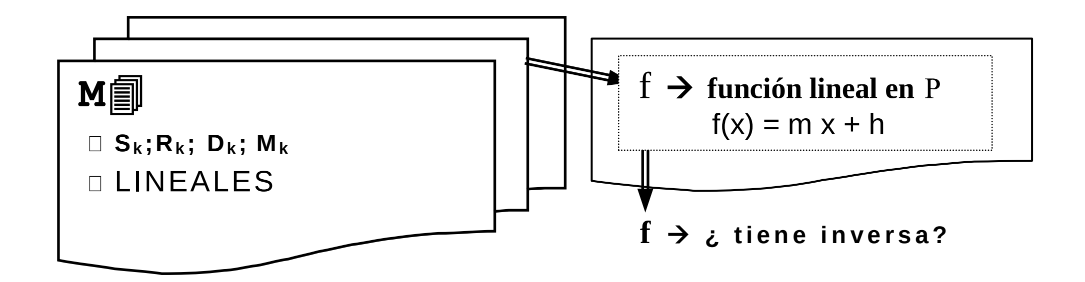
» $m < 0 \Rightarrow \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < 0$

» luego: $\mathbf{x_1 < x_2} \Rightarrow x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow y_1 - y_2 > 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow \mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$

RESUMEN: función lineal



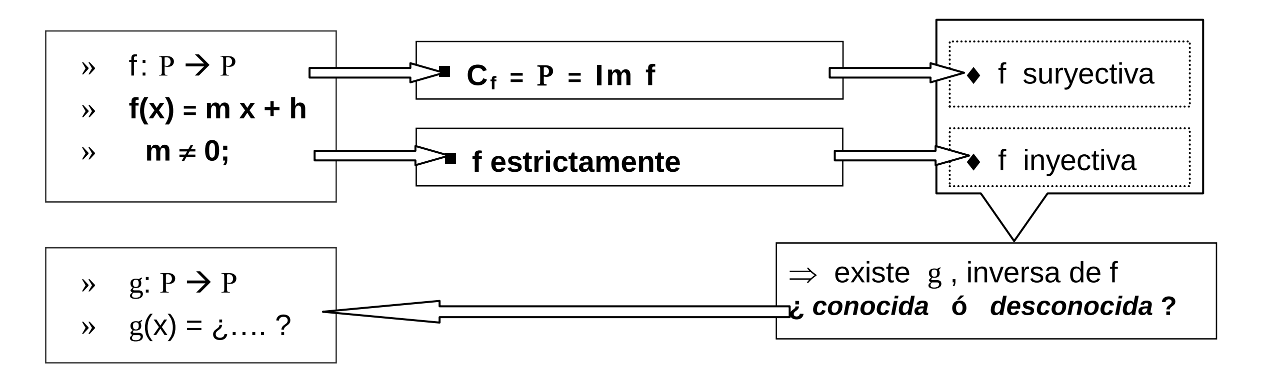
▪ Estudiada la función lineal, la incorporamos a la memoria y a partir de eata acción, pasa a ser una función *conocida* y podemos operar con ella; buscar nuevas funciones.



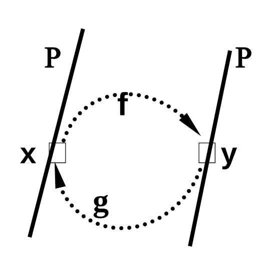
▪ Operamos en **M** y buscamos la inversa de la función lineal.

Recordamos que para buscar inversas debemos realizar una serie de pasos, entre ellos, determinar si la función es *biyectiva* (suryectiva e inyectiva).
Tomando como dominio natural y codominio el conjunto R, es fácil verificar que el conjunto imagen también es R, Im f = R ; o sea, que f es suryectiva.
Para demostrar que es inyectiva basta probar la siguiente proposición que queda como ejercicio:

Proposición si una función es monótona en D entonces es inyectiva en D.



Ejemplo: buscamos g inversa de f(x) = 2x+1



- » f: P → P / **y=f(x) con f(x)=2x+1**
- » g: P → P
- » <u>*ley g*</u>**:**

g(y) = x ⇔ f(x)= y (*)

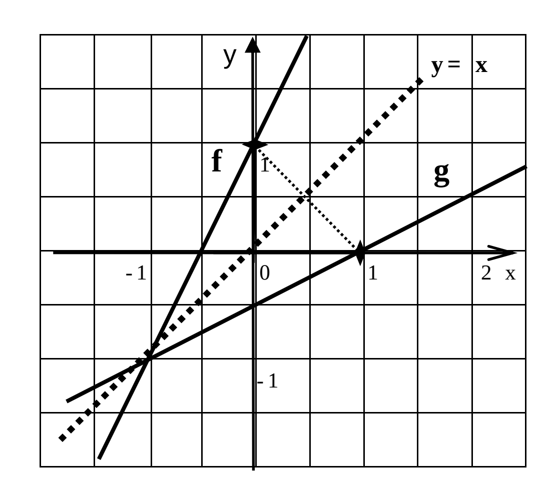
g(y) = x ⇔ 2x+1= y

g(y) = x ⇔ 2x = y-1 R_1

g(y) = x ⇔ x = $\frac{y-1}{2}$ D_2

g(y) = ½ y – ½

» <u>*ley g*</u>*:* **g(x) = ½ x - ½**



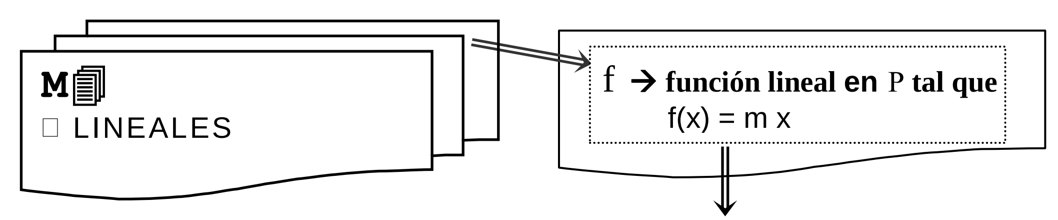
O*bservaciones*: para hallar inversa,

- ♦ **1ro damos la ley de** g, **inversa de f**, **´por definición´.(*)**
- ♦ **Luego, tratamos de hallar (si existe) una** *fórmula* **para la ley de** g .
- ♦ **Si existe, ésta se obtiene de** *despejar* x **en la ecuación** f(x) = **y.**
- ♦ **Recordamos que** *despejar* **equivale a aplicar las funciones inversas de las que forman la ley original, en el orden inverso.**
- ♦ **Finalmente, para expresar** g **como función de x, intercambiamos x e y en la ecuación obtenida para** g **.**
- ♦ **Intercambiadas x e y, graficamos** g **en el mismo sistema que** f **usando la propiedad de que ambas gráficas son *simétricas* respecto de la recta y=x.**

(*) Cabe preguntarnos si siempre podremos despejar x , cualquiera sea la función lineal de partida. La respuesta a esta pregunta es ***SI***, pues ***conocemos*** las funciones inversas de aquellas que constituyen la función lineal ; estas son: S_k; R_k; D_k ó M_k.
Como las inversas de estas funciones son del mismo tipo: S_k; R_k; D_k ó M_k ; concluimos que:

" la inversa de una lineal es una lineal "

(*) Concluimos también que a través del proceso de buscar inversa no generamos un nuevo *tipo* de función, pues no salimos de las lineales. Intentamos con otra operación, por ejemplo, el producto



¿qué resulta del producto de estas funciones ?

Para investigar esta cuestión, damos funciones de M, por ejemplo

h(x) = 2.*x* ; **k(x) =3.x** y **l(x) = 4.x**

las multiplicamos y clasificamos el resultado en *conocido* ó *desconocido* :

1) **[h. k]** (x) = h(x) **.** k (x) = (2 x)**.**(3.x) = **6**. $\mathbf{x^2}$

2) **[h. k. l]** (x) = h(x)**.**k(x).l(x) = (2.x)**.**(3.x).(4.*x*) = **24**. $\mathbf{x^3}$

Observamos que las funciones así obtenidas son *desconocidas,* no están en M; pero también vemos que todas ellas tienen el mismo *tipo* : **f**(x) = **a.** $\mathbf{x^n}$ **.**
Las funciones que tienen esta fórmula las llamamos ***POTENCIAS***.
Ellas constituyen un *nuevo tipo de función*; luego, las analizamos e incorporamos a M

1.5.2 Potencia: $f(x) = a\,x^n$; $a \in P - \{0\}$; $n \in N$

Las propiedades que caracterizan a las *POTENCIAS* dependen de la paridad del exponente *n* . Luego, para estudiarlas, consideramos:

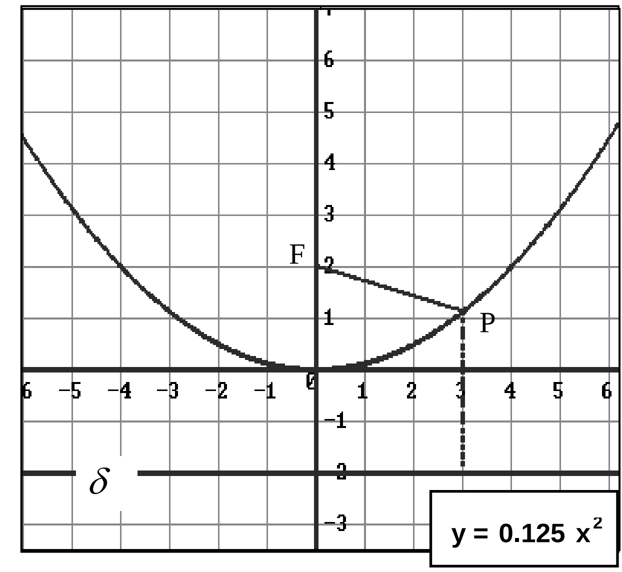
Caso I : n par

Caso II : n impar.

En ambos casos el estudio lo hacemos a través de analizar exhaustivamente *el caso más elemental* para ese tipo de función. Las propiedades o conclusiones extraídas para este caso las extendemos luego al resto de las funciones de la clase.

Caso I : ***n par*** → ***caso elemental: n = 2*** → **f (x)** = **a**.$\mathbf{x^2}$

Si **f (x)** = **a**.$\mathbf{x^2}$ entonces D_f = P y graf **f** = *PARÁBOLA* (*)



(*) En Geometría Analítica se estudian las curvas a partir de ciertas *propiedades geométricas que las caracterizan*; así , al estudiar aquellas en las que se distingue un punto (*foco*) y una recta (*directriz*) tal que:

"*todos los puntos de la curva equidistan del punto F (el foco) y de la recta δ (la directriz)* " ;
se halla la ecuación canónica de este tipo de curvas y se les da el nombre de *PARABOLAS.*

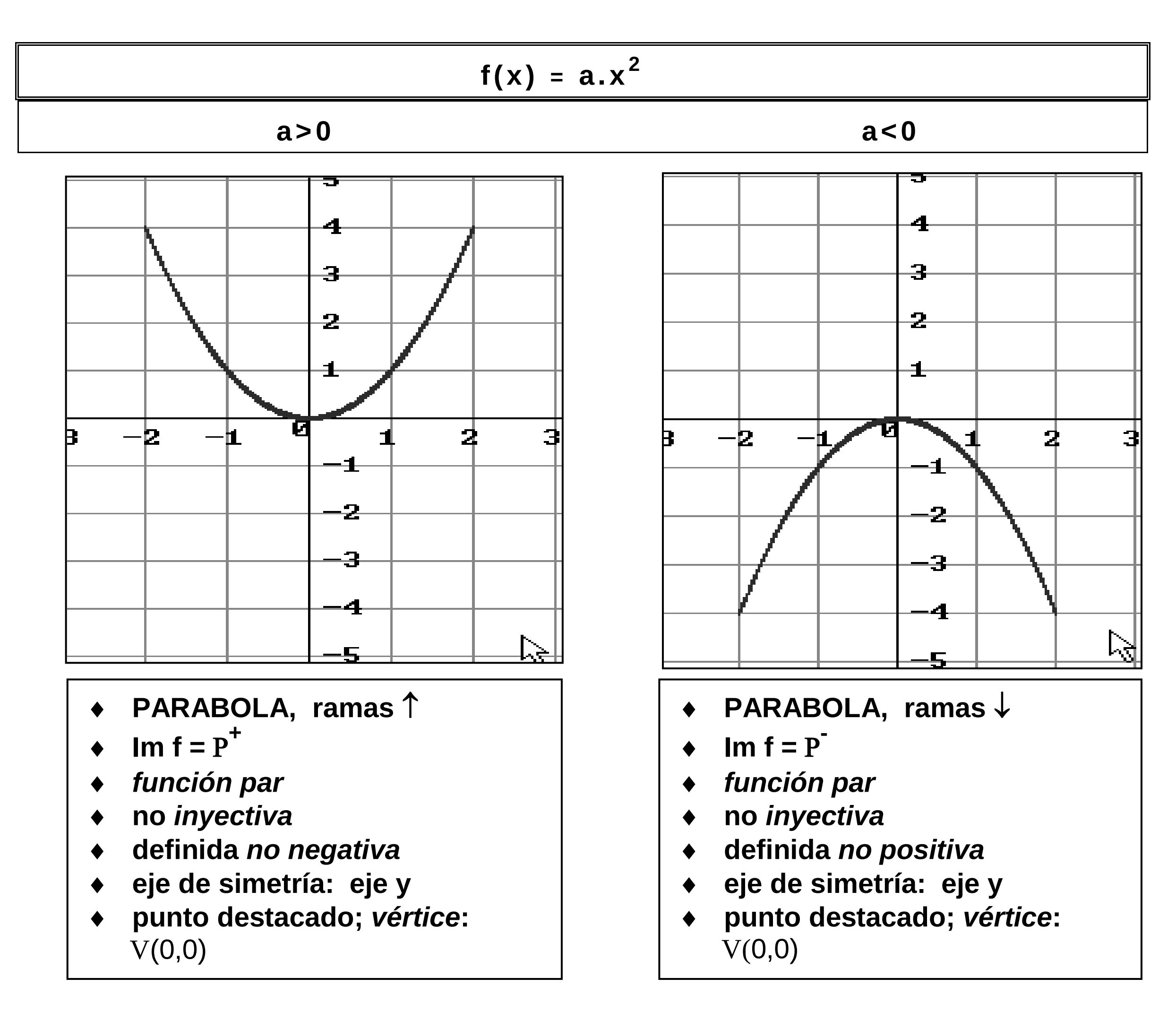
Si *F*(0,p) y δ: y = -p entonces la ecuación de la parábola es:

$$y = \frac{1}{4p}.x^2 .$$

▪ Las parábolas son muy útiles en las aplicaciones de la matemática al mundo físico. Así por ejemplo puede mostrarse que si se dispara un proyectil y se supone que sólo actúa la fuerza de la gravedad, la trayectoria del proyectil es *parabólica*. Dado las propiedades de estas curvas las mismas se usan tanto para el diseño de espejos o lentes para telescopios o microscopios como para el

diseño de antenas satelitales, y estas son unas pocas de las múltiples aplicaciones que presentan estas curvas.
En lo que sigue estudiamos las parábolas desde la perspectiva del Análisis Matemático; es decir observamos estas curvas como gráficas de la función, $f(x) = a\,x^2$.
Desde esta perspectiva vemos que son curvas simétricas respecto del eje y; que sobre el eje de simetría presentan un punto que se *destaca* respecto de los otros. Efectivamente, observamos un punto, **V**, a partir del cual se *desarrolla* la parábola ya sea, abriéndose *hacia arriba* $(a > 0)$ ó *hacia abajo* $(a< 0)$.
Al punto **V** lo llamamos *vértice* de la parábola.

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las potencias de grado 2.



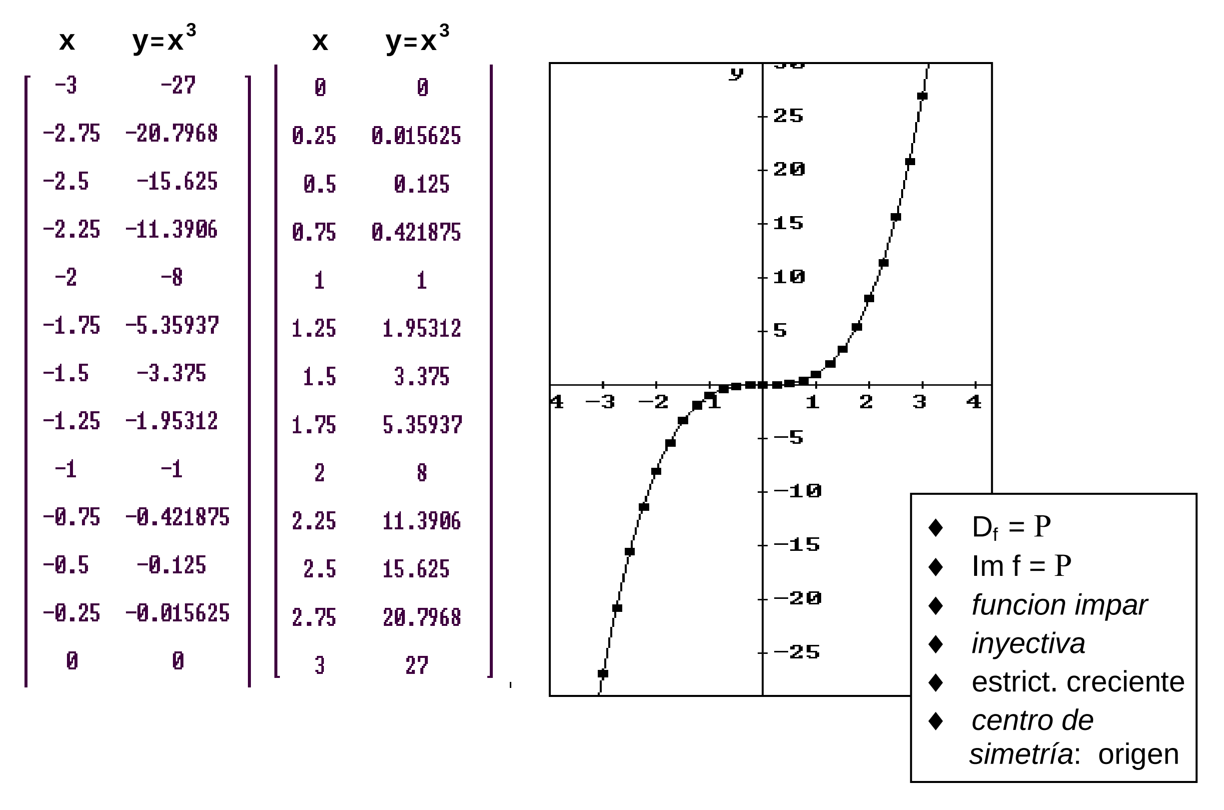
Caso II : ***n impar → caso elemental: n = 3 →*** **f (x) = a.x³**

Si **f (x) = a.x³** entonces $D_f = P$ y graf **f** = (*)

(*) en este caso no tenemos el auxilio de la Geometría Analítica, ¿cómo procedemos?.

- acudimos a una *tabla de valores*
- hallamos puntos de la gráfica hasta que aparece cierta *configuración* .
- unimos los puntos según lo sugiere la configuración.
- Obtenemos la curva.
- Le damos un nombre; en este caso: *PARABOLA CÚBICA*.

- Realizamos este proceso con $f(x) = x^3$ (a=1)

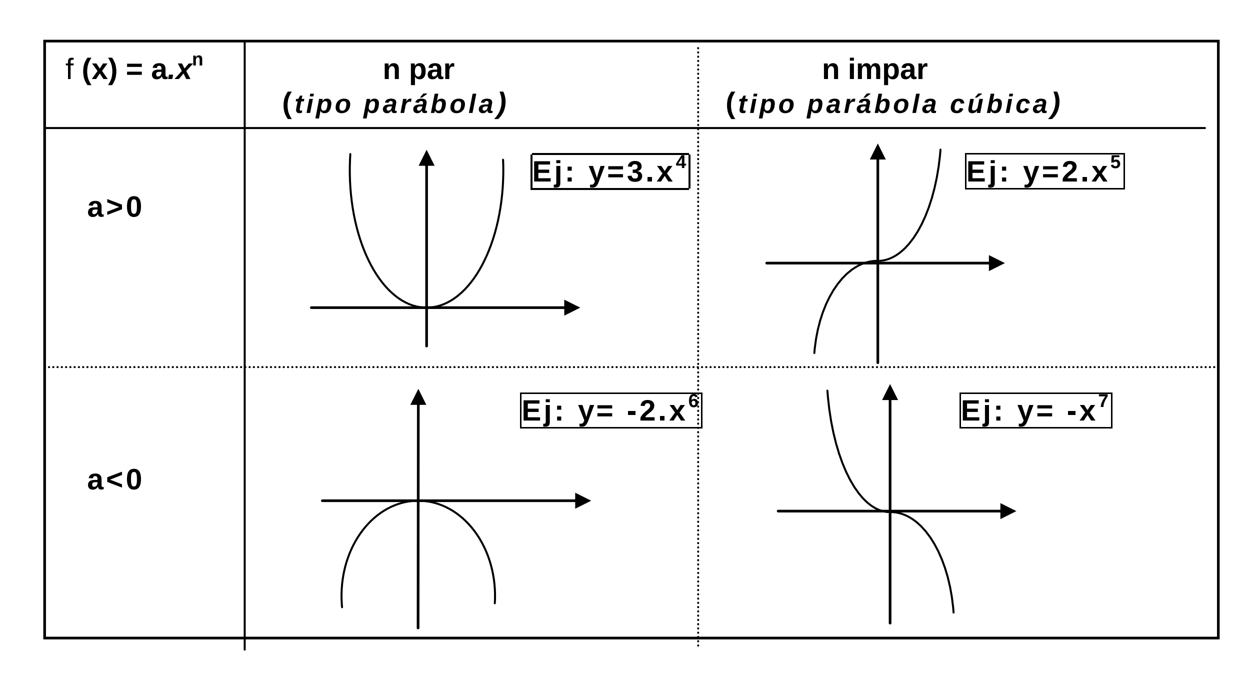


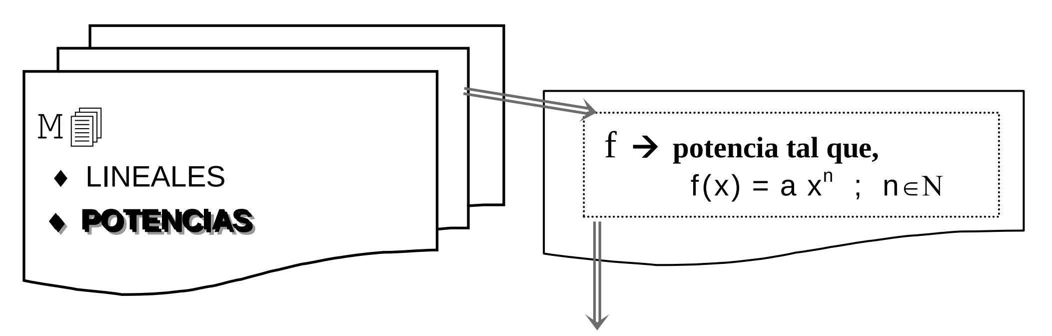
x	$y=x^3$
-3	-27
-2.75	-20.7968
-2.5	-15.625
-2.25	-11.3906
-2	-8
-1.75	-5.35937
-1.5	-3.375
-1.25	-1.95312
-1	-1
-0.75	-0.421875
-0.5	-0.125
-0.25	-0.015625
0	0

x	$y=x^3$
0	0
0.25	0.015625
0.5	0.125
0.75	0.421875
1	1
1.25	1.95312
1.5	3.375
1.75	5.35937
2	8
2.25	11.3906
2.5	15.625
2.75	20.7968
3	27

Observación:
Los casos elementales analizados (n =2 y n =3) presentan las propiedades que caracterizan a las potencias en general y según el exponente sea par o impar. O sea, para *n* genérico, $a.x^n$ será del *tipo* $a.x^2$ ó $a.x^3$, según *n* sea para ó impar.
El coeficiente *a* afecta la *abertura* de las ramas y los cuadrantes donde estas se encuentran mientras el exponente *n* afecta la *rapidez* con que crecen o decrecen para valores muy grandes de x´s.

RESUMEN: potencias



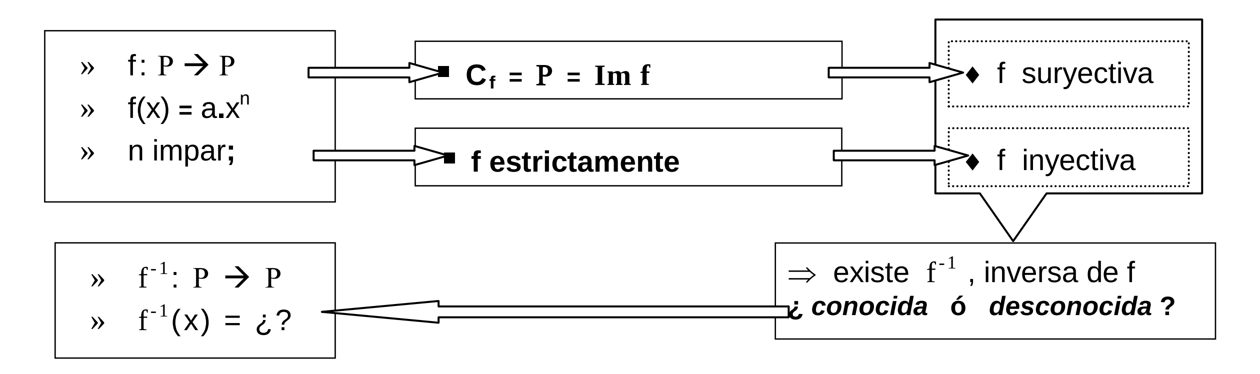


inversa de f : *¿existe*?, *¿es ´conocida´*?

1.5.3 Funciones Inversas de las Potencias: *Raíces*

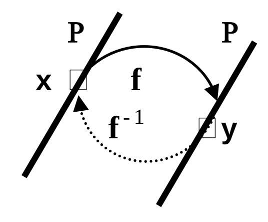
Las propiedades de las potencias dependen de la paridad del exponente "n"; luego, las de sus inversas, si existen, también dependen de dicha paridad.

Caso II : ***n impar***



Ejemplo:

Buscamos f^{-1} inversa de $f(x) = x^3$, según el proceso ya explicitado para la función lineal.



» $f : P \to P$ / **$y=f(x)$ con $f(x)=x^3$**

» $f^{-1}: P \to P$

» ley f^{-1}:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

$$f^{-1}(y) = x \iff x^3 = y \quad ?$$

$$f^{-1}(y) = x \iff x = \ldots$$

Recordamos que:

♦ **existe una fórmula para f^{-1} si y sólo si podemos despejar x en la ecuación f (x) = y.**

♦ *despejar* **equivale a aplicar la** *inversa* **de la o las funciones que constituyen f.**

♦ **Luego, para la función potencia, ¿ podemos** *despejar* **x ?:**

No, pues la función que necesitamos para realizar este proceso (la inversa de f) es, justamente,

la función que estamos buscando, **hasta esta instancia , una función** *desconocida.*

(no tenemos en M una función que deshaga lo que hace x^3)

Conclusión

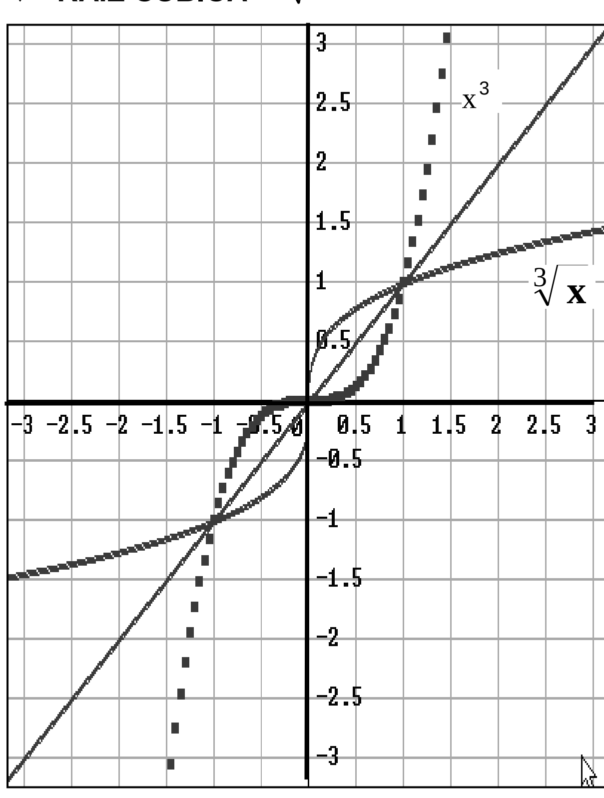
Comprobamos entonces que <u>no existe una fórmula para f^{-1}</u> y, consecuentemente, que hemos encontrado un <u>nuevo tipo de función</u>.

Ideamos un nombre y un símbolo para indicar este tipo de función;

las llamamos, *raíces* y simbolizamos, $\mathbf{f}^{-1} = \sqrt[\mathbf{n}]{..}$ (*raíz enésima*).

Analizamos sus propiedades y la incorporamos a M🗐.

♦ **RAÍZ CÚBICA** = $\sqrt[3]{*}$



- **Dominio** $\sqrt[3]{*}$ **=** P
- **Imagen** $\sqrt[3]{*}$ **=** R
- **ley** $\sqrt[3]{*}$ **,** ***por definición*****:**

  $\sqrt[3]{y} = x \Leftrightarrow x^3 = y$

- **Para graficar en un sistema x-y cambiamos el nombre de las variables**

  x → y
  y → x

  $\sqrt[3]{\mathbf{x}} = y \Leftrightarrow y^3 = x$

- **Obtenemos la gráfica de** f^{-1} **por reflexión de la gráfica de** f **respecto**

♦ ***funcion impar***
♦ ***inyectiva***
♦ ***estrictamente creciente***
♦ **centro de simetría:** ***origen***

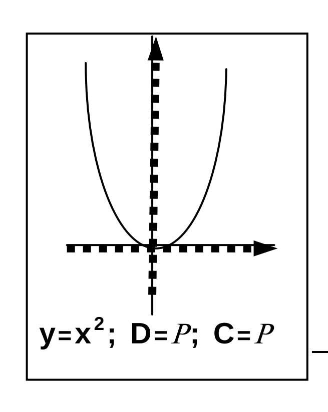
<u>Caso I</u> : ***n par***

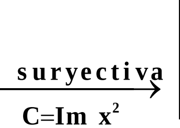


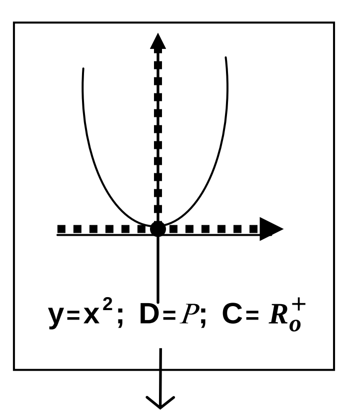
☞ Si mantenemos la ley de **f** y restringimos dominio y codominio de modo que la nueva función resulte biyectiva entonces, la *función restringida*, admite inversa.

¿Cómo debemos restringir ?:

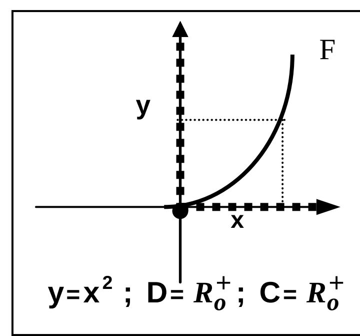
- **f** suryectiva → basta tomar el codominio igual a la imagen;
- **f** inyectiva → tenemos dos formas de restringir el dominio de modo que la función sea inyectiva : podemos tomar como dominio los $\mathbf{P_O}^+$ ó $\mathbf{P_O}^-$.

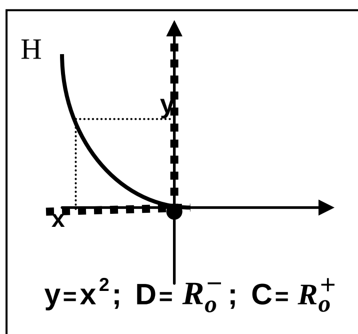






$D = R_o^+ \leftarrow\leftarrow\leftarrow$ *inyectiva* $\rightarrow\rightarrow\rightarrow D = R_o^-$





F: $R_o^+ \rightarrow R_o^+$ / y=F(x) con F(x)=x^2

F^{-1}: $R_o^+ \rightarrow R_o^+$

Ley F^{-1}, ***por definición***:

$F^{-1}(y)=x \Leftrightarrow F(x)=y$

$F^{-1}(y)=x \Leftrightarrow x^2=y \wedge x \in R_o^+$

la llamamos, *raíz cuadrada*

la simbolizamos: $\sqrt{*}$

$\sqrt{y} = x \Leftrightarrow x^2=y \wedge x \in R_o^+$

H: $R_o^- \rightarrow R_o^+$ / y=H(x) con H(x)=x^2

H^{-1}: $R_o^+ \rightarrow R_o^-$

Ley H^{-1}, ***por definición:***

$H^{-1}(y)=x \Leftrightarrow H(x)=y$

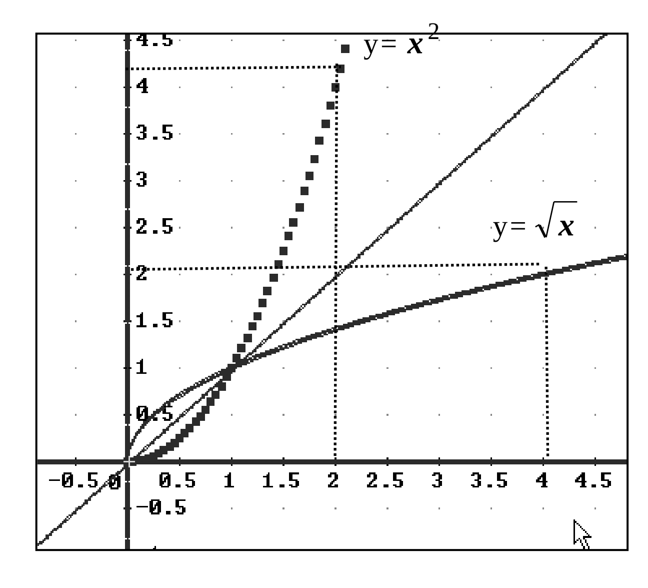
$H^{-1}(y)=x \Leftrightarrow x^2=y \wedge x \in R_o^-$

la llamamos, *menos raíz cuadrada*

la simbolizamos: - $\sqrt{*}$

$-\sqrt{y} = x \Leftrightarrow x^2=y \wedge x \in R_o^-$

Raíz cuadrada = $\sqrt{*}$

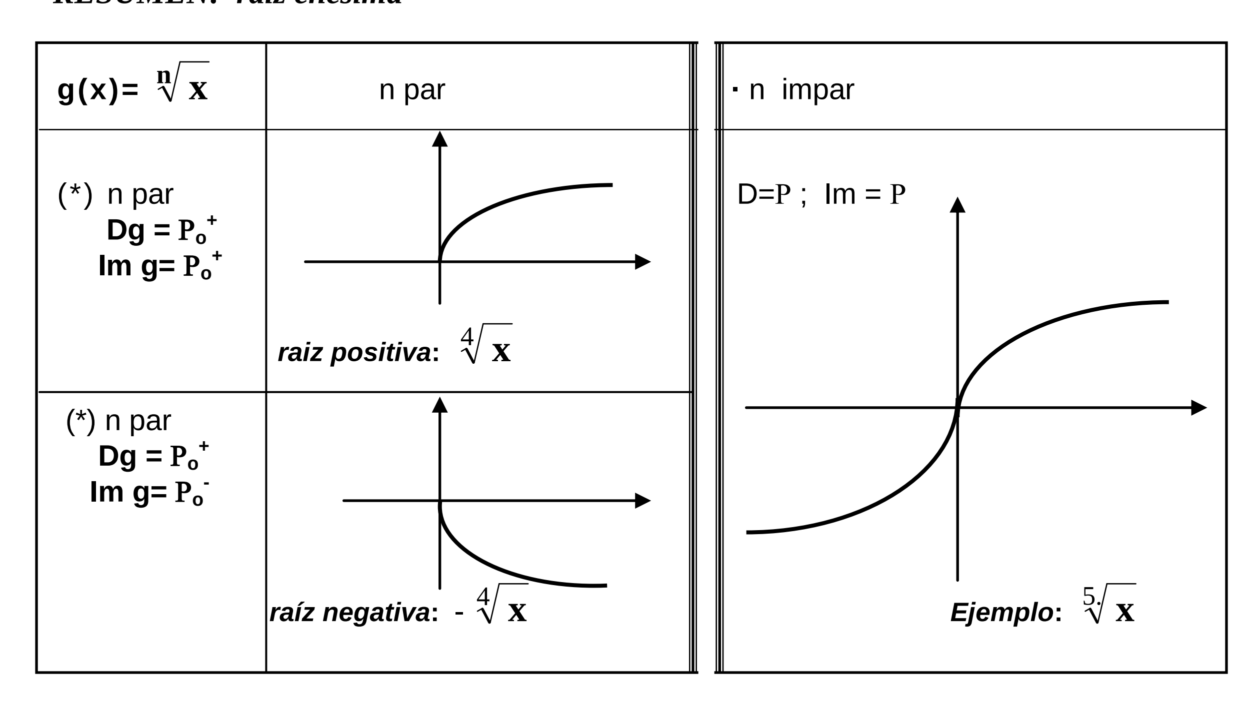


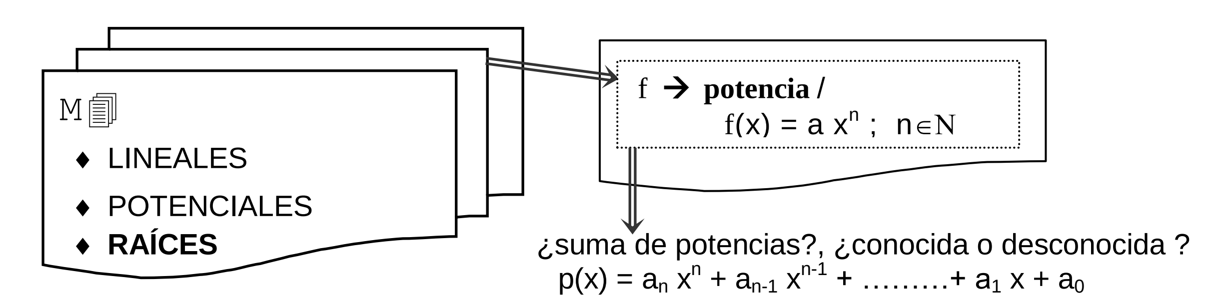
- **para graficar la función x^2 y su inversa, *raíz cuadrada*, en un mismo sistema *x-y* cambiamos el nombre de las variables**
  x → y
  y → x
- $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2=x \wedge y \in R_o^+$
- **obtenemos la gráfica de $\sqrt{*}$ por reflexión de la gráfica de** F **respecto de la recta y=x.**

Raíz cuadrada :

- **no es par, ni impar**
- **inyectiva**
- **estrictamente creciente**
- **simetrías: no tiene**
- **signo: definido *no negativo*.**

RESUMEN: raíz enésima





La suma de una o más potencias da por resultado la función que conocemos con el nombre de *polinomio*. En este punto no tenemos todavía los conocimientos matemáticos necesarios para analizar polinomios en general, pero si para hacerlo en un caso en particular: polinomio de 2do grado ó función cuadrática.

1.5.4 Función Cuadrática: $C(x) = a x^2 + b x + c$, $a; b; c \in P$; $a \neq 0$.

Un método útil para estudiar una función es aquél que consiste en explorar la existencia de algún vínculo ó nexo entre la función incógnita y una función prototipo conocida. Si este vínculo existe, a partir de ello deducimos luego gráfica y propiedades básicas de la función desconocida.

Dada *g*, función desconocida: ¿cómo procedemos para aplicar este método ?:

1ro) Seleccionamos una función prototipo *f*, *conocida* y *conveniente* al caso en estudio.(*)

2do) Exploramos si la función *g* está vinculada a *f* a través de alguna operación gráfica; o sea, si $g(x) = A. f(a x + b) + B$, para algún valor de los parámetros a ,b, A y B. (**)

3ro) Si tal es el caso, esto indica que *g* es el resultado de aplicar a *f* una o más transformaciones (traslación, alargamiento, reflexión, etc.), las que como sabemos no

modifican en forma esencial la gráfica ni las propiedades de *f*. Luego, *g* pertenece a la clase de funciones determinada por *f*.

(*) ¿ Qué función tipo ó prototipo elegimos como punto de partida ?

La función tipo de partida resulta muchas veces sugerida por la misma función a investigar; así normalmente tomamos *f* como el caso más elemental posible relativo a la función incógnita *g*.

(**) ¿Cómo organizamos la exploración ?, ¿ partimos del caso general o de casos particulares ?

Aquí conviene organizar la exploración a partir de casos particulares, lo más sencillo posibles.

Acorde a este método procedemos al estudio de $C(x) = a x^2 + b x + c$.

1ro) C es un polinomio de grado dos; luego, y a los fines de comenzar el estudio comparativo, buscamos el polinomio más elemental posible entre todos ellos y lo tomamos como función prototipo: $\mathbf{C(x) = a x^2 + b x + c} \xrightarrow[\mathbf{a}=1;\ \mathbf{b}=0;\ \mathbf{c}=0]{} \mathbf{f(x) = x^2}$ (***prototipo)***

Así, tomamos $\mathbf{f(x)=x^2}$ como función tipo la cual, además de ser el caso más elemental posible para un polinomio de grado dos, es una función conocida (*potencia).*

2do -3ro) consideramos casos particulares de funciones cuadráticas y, a partir de ellos, obtenemos la conclusión para el caso general.

Ejemplo 1: $p(x) = x^2 + 1$

$\mathbf{p(x) = x^2 + 1} \xrightarrow{f(x)=x^2} \mathbf{p(x)=f(x)+1}$ **(*)**

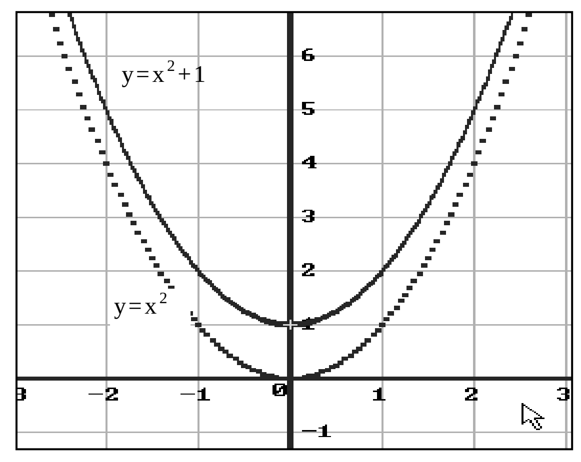
(*) Sumo 1 a la función f ; luego:

graf p = graf f subido 1 unidad.

graf p = ´parábola´ subida 1 unidad

∗ eje simetría: eje y

∗ vértice: V* (0,1)



Ejemplo 2: $q(x) = x^2 - 2x + 1$

NOTA 1: en este caso la relación entre q y f no es evidente. Trabajamos algebraicamente la función q hasta descubrir su relación con f ; para ello,

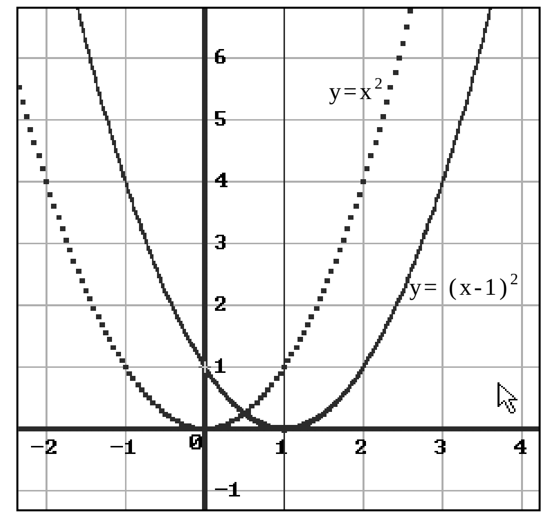
$q(x) = (x-1)^2$

NOTA 2: escrita de esta forma, vemos que q es una

R_1 f

x ↦ [...] − 1 **(x-1)**↦ [.....]^2 -1)^2

$q(x) = f o R_1(x)$



Conclusión: $q(x) = f(x-1)$ **(*)**

(*) resto 1 a la v. i. ; luego:

graf q = graf f trasladado 1 unidad a derecha

graf q = ´parábola´ trasladada 1 u. a derecha

∗eje de simetría: x =1

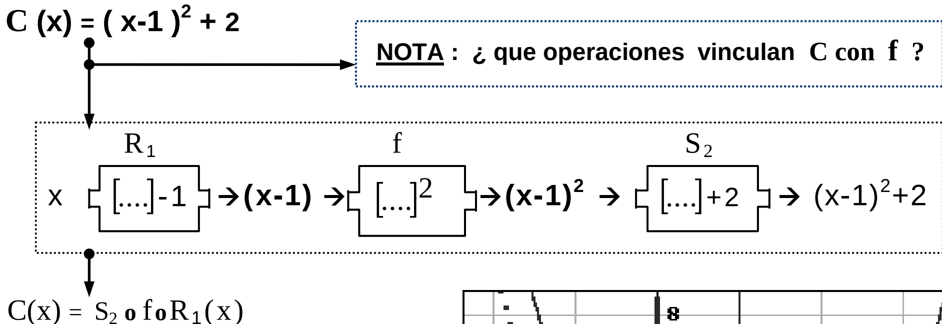
∗vértice: V*(1,0)

Ejemplo 3: $C(x) = x^2 - 2x + 3$

NOTA : trabajamos algebraicamente la función C . En este caso: *completamos cuadrados* .

$C(x) = [x^2-2x + \mathbf{1}] \mathbf{- 1} + 3$

$\mathbf{C(x) = (x-1)^2 + 2}$



$C(x) = S_2 \, o \, f o R_1(x)$

Conclusión: $C(x) = f(x-1) + 2$ **(*)**

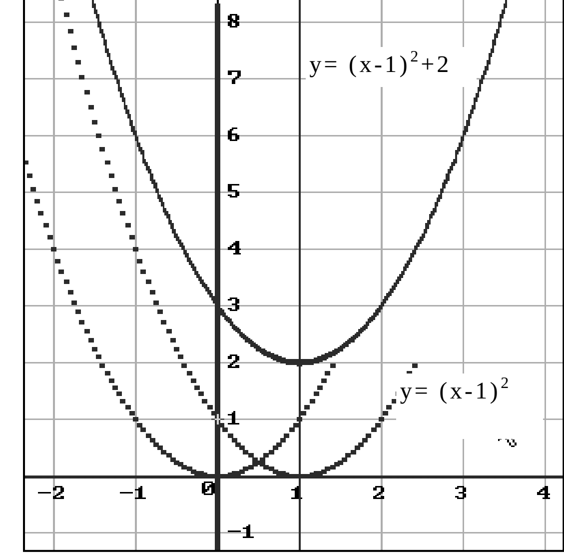
(*) resto 1 a la v.i.; sumo 2 a la función resultado.

graf C = graf f trasladado: 1☞ y 2☝

graf C =´parábola´ trasladada: 1☞ y 2☝

∗ eje de simetría: x =1

∗ vértice: V(1,2)**

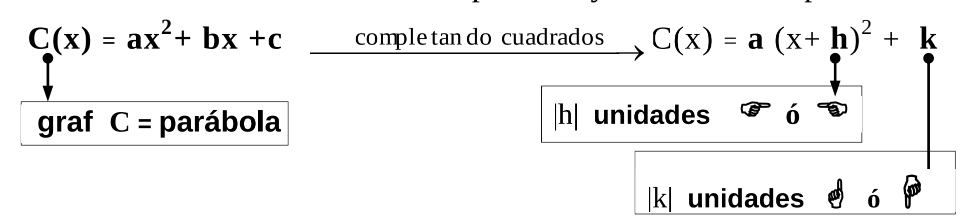


CONCLUSIONES:

▪ Los ejemplos vistos permiten suponer que cualquiera sea la forma de la función cuadrática la gráfica siempre va a ser una *parábola*, que la misma puede pensarse como el resultado de trasladar a otra región del plano la parábola correspondiente a una potencia dada, que el vértice resulta de ´completar cuadrados´ en la función original.

▪ Si trabajamos algebraicamente la expresión general, $C(x)= ax^2 +bx+ c$, demostramos con toda certeza que la gráfica de una cuadrática es siempre una parábola. Efectivamente, como resultado del trabajo algebraico obtenemos que la vinculación entre C y f se da través de una expresión de la forma: $C(x) = a. f (x + h) + k$, y esto (s/ TABLA pag. 48), indica que la cuadrática C se puede interpretar como el resultado de operaciones gráficas realizadas sobre la potencia $f(x) = ax^2$, donde:

- h , indica el corrimiento en sentido horizontal.
- k , indica el corrimiento en sentido vertical.
- a , indica la abertura de las ramas de la parábola y hacia adonde apuntan.



▪ Elementos geométricos que caracterizan la parábola:

- *eje de simetría* : $x = h$
- *vértice :* $V^*(h, k)$
- *abertura de las ramas* → signo del coeficiente **a** →
  - ▪ $a > 0$ → ∪, **parábola** ☝
  - ▪ $a < 0$ → ∩, **parábola** ☟

▪ **Grafica ´por corrimientos´ de una función cuadrática, $C(x) = ax^2+ bx +c$.**

1º) reconocemos el *tipo de función, su gráfica* → cuadrática, parábola , ramas.
2º) elegimos la *función prototipo* → $\mathbf{f(x) = a\, x^2}$
3º) completamos cuadrado para obtener el nuevo vértice: $C(x) = \mathbf{a}\,(x+ \mathbf{h})^2 + \mathbf{k}$
4º) trasladamos al punto V*(h,k) la parábola correspondiente a $f(x)=a\,x^2$.
(Para un mejor gráfico podemos calcular otros puntos además del vértice).

Ejemplo 4: $C(x) = 2x^2 - 4x - 6$

1º) $C(x) = 2x^2 - 4x - 6$

2º) $f(x) = 2x^2$ *(prototipo)*

- **cuadrática → *parábola***
- **a = 2 >0 → *ramas* ☝**
- **b ≠ 0; c ≠ 0 → *parábola ´trasladada´.***

3º) $C(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2.[x^2 - 2x - 3] = 2.[(x^2 - 2x + 1) - 1 - 3] = \mathbf{2(x-1)^2 - 8}$

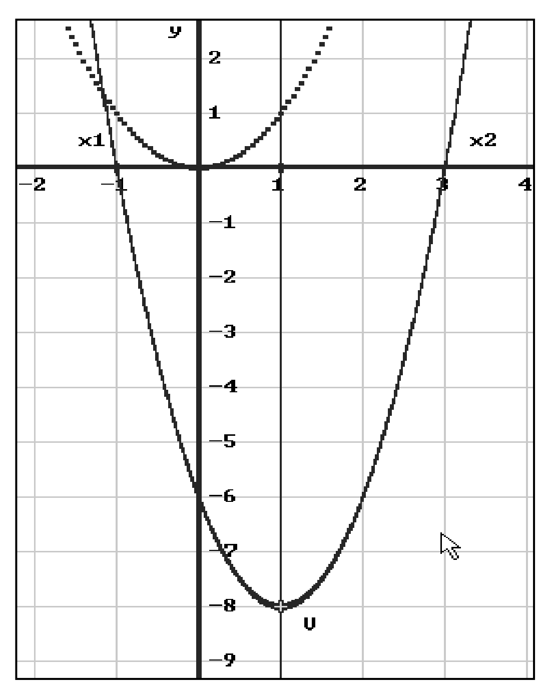
$C(x) = f(x-1) - 8$

4º) graf C = graf f trasladado a V*(1; - 8).

Para graficar con mayor precisión calculamos otros puntos de la gráfica, pero no puntos cualesquiera sino aquellos que *sobresalen (*)* : los correspondientes a la intersección de la parábola con cada uno de los ejes x-y .

PTOS SOBRES.	x	y =C(x)	P(x ; C(x))
P_y (0; C(0))	0	-3	(0; -3)
P_x (x; 0)	x/C(x)=0	0	(-1; 0) (3 ; 0)
V*(h ; k)	1	- 8	(1; - 8)

***eje simetría*: x =1**



(*) en la parábola distinguimos cuatro puntos *´sobresalientes´*: V, P_y, P_{x1} , P_{x2} ; o sea, vértice e intersección con los ejes coordenados respectivamente. También distinguimos una recta que *´sobresale´*: el eje de simetría; luego, una vez reconocida la función y la orientación de las ramas, podemos graficar la parábola con sólo determinar estos *elementos sobresalientes´*. Tenemos así otro *método* para graficar una cuadrática.

- **Procesos para graficar funciones (en general) .**

Método 1: por *corrimientos*.
1º) reconocer la clase a la que pertenece la función en estudio.
2º) elegir una función prototipo dentro de esta clase.
3º) trabajar algebraicamente la función dada hasta poner en evidencia la relación entre ella y la prototipo; o sea, hasta detectar las *operaciones gráficas* que permiten ´pasar´ de la prototipo a la dada.
4º) operar sobre la función prototipo acorde a lo detectado en (3º).

Método 2: por *elementos sobresalientes.*
1º) reconocer el tipo de función y sus elementos sobresalientes.
2º) calcular y graficar los elementos sobresalientes.
3º) unir con un trazo continuo los puntos sobresalientes obtenidos en el 2º paso, teniendo en cuanta la identificación hecha en el 1er. paso y los otros elementos sobresalientes (si existen)

Ejemplo 5: $C(x) = 2x^2 - 8x + 6$. Graficamos C, <u>por elementos sobresalientes</u>

1º) reconocemos <u>tipo de curva</u> y <u>elementos sobresalientes</u>

- **cuadrática → *parábola***
- **a = 2 → *ramas* ↑ ; b ≠ 0; c ≠ 0 → *trasladada***
- **Puntos de intersección con los ejes → parábola ∩ eje y; parábola ∩ eje x (*)**
- **eje de simetría → $x_{(eje)} = h$ (**)**

(*) parábola ∩ eje x = $P_x(x, 0)$ ⇒ **buscamos los x´s tal que C(x) =0 .**

$$C(x) = 0 \iff a x^2 + bx + c = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

***Pregunta:* el valor de Δ, ¿qué información da acerca de la intersección buscada ?.**

(**) $x_{(eje)} = h$ → ¿ h ?

El eje de simetría es paralelo al eje y ; luego, toda recta perpendicular al eje y corta a la parábola en dos, uno o ningún punto. *Si la corta, los puntos de corte equidistan del eje de simetría*.
Así, si P_{x1} y P_{x2} (∩ eje x) *existen*, *estos puntos equidistan del eje de simetría*.
En tal caso, el $x_{(eje)}$ es el punto medio entre x_1 y x_2 .

Conclusión 1: $h = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Conclusión 2: para todo Δ, $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2.a}$; luego, vale también, $h = \frac{-b}{2.a}$

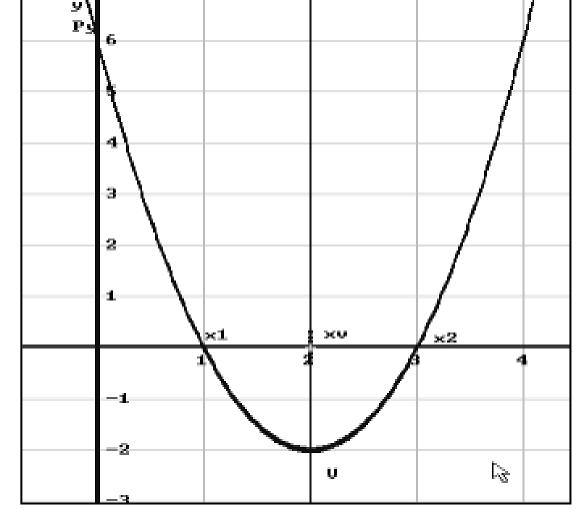
(***) **¿ V ? : $V(x_V, y_V)$** vértice de la parábola ⇒ V está sobre el eje de simetría ⇒ $x_V = h$

Conclusión: $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_V = C(x_V)$

2º) calculamos los puntos sobresalientes

PTOS SOBRES.	x	y=C(x)	P(x;C(x))
P_y (0; y)	0	C(0)= 6	(0; 6)
P_{x1} (x_1,0)	x_1 =1	C(1)=0	(1; 0)
P_{x2} (x_2,0)	x_2 =3	C(3)=0	(3; 0)
V (x_V ; y_V)	$x_V = \frac{1+3}{2}$	y_V=C(2)	(2; -2)

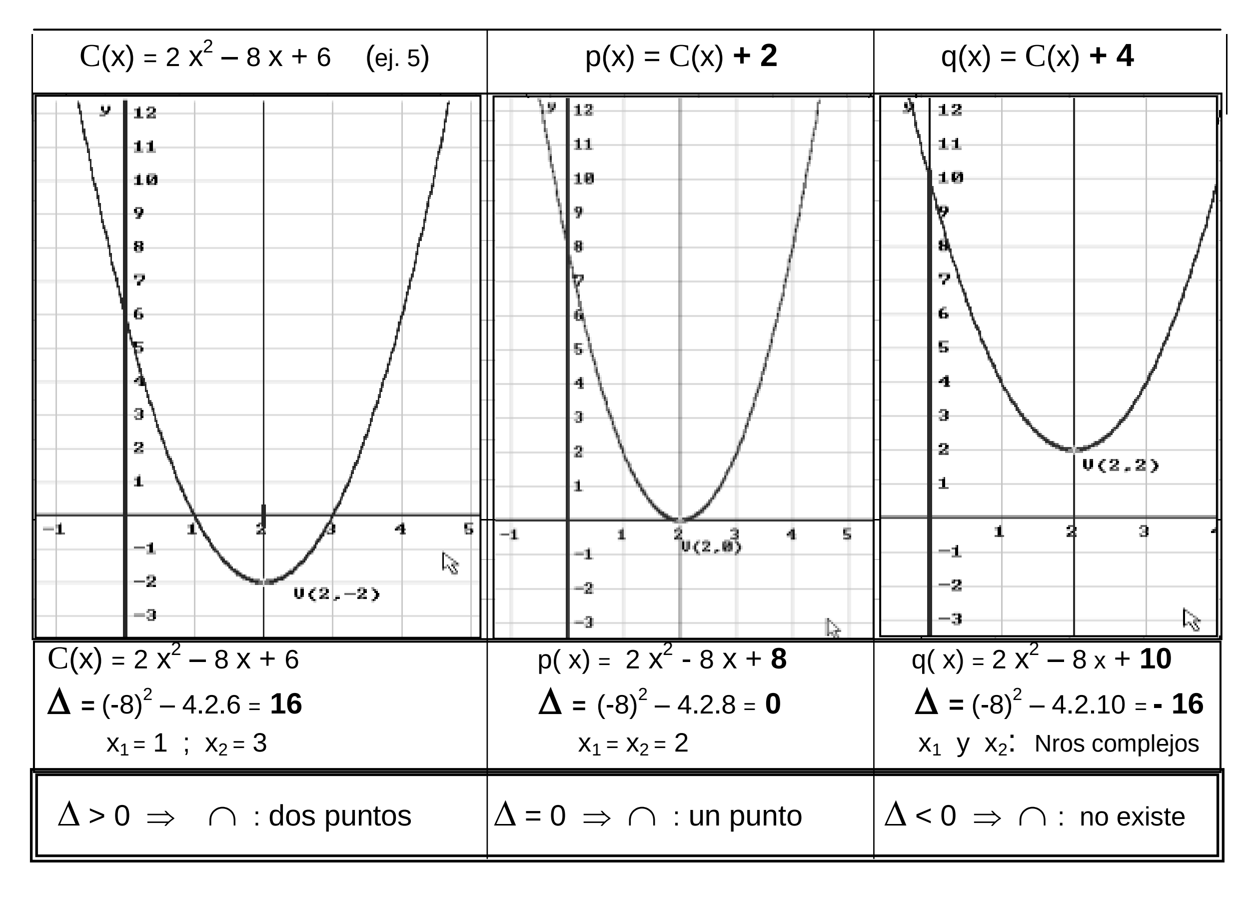
3º) graficamos la parábola.



<u>OBSERVACION</u>: para obtener los puntos de intersección de la curva con el eje x tenemos que resolver una ecuación. Así, en este caso, la cantidad de puntos de intersección depende del número y tipo de raíces de una ecuación de 2do grado.

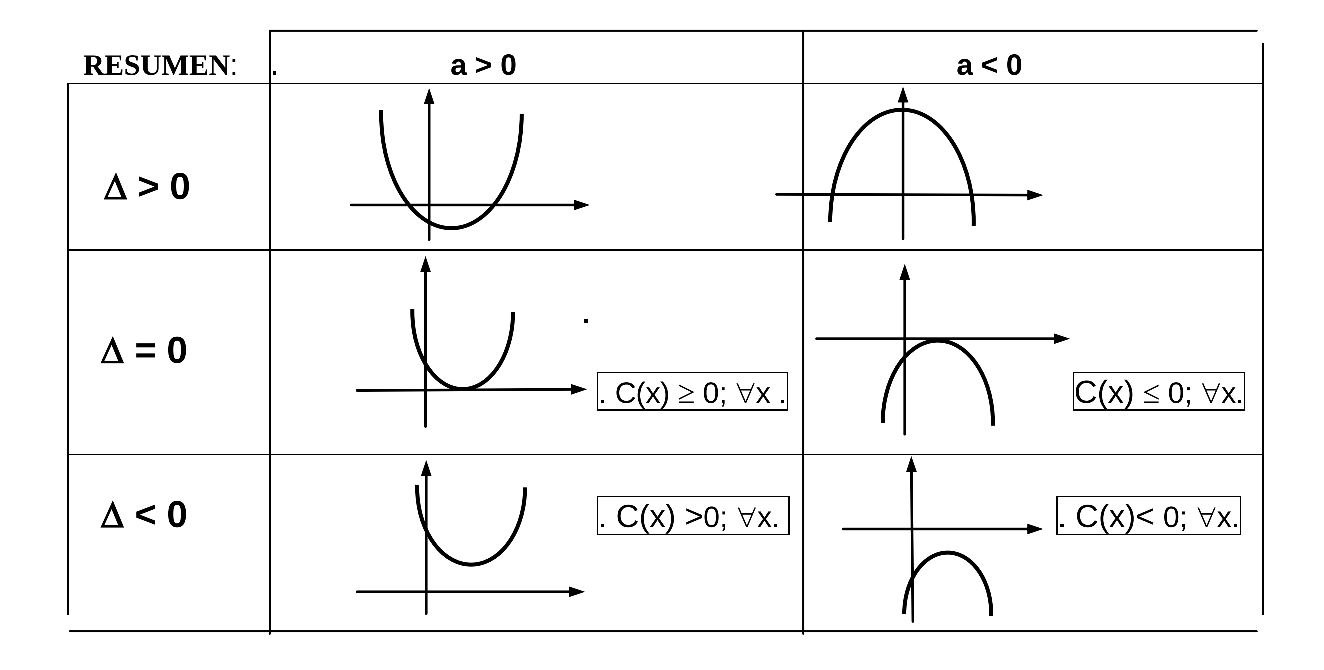
$$a x^2 + bx + c = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Analizamos algunos ejemplos a los efectos de concluir de qué depende la intersección buscada:

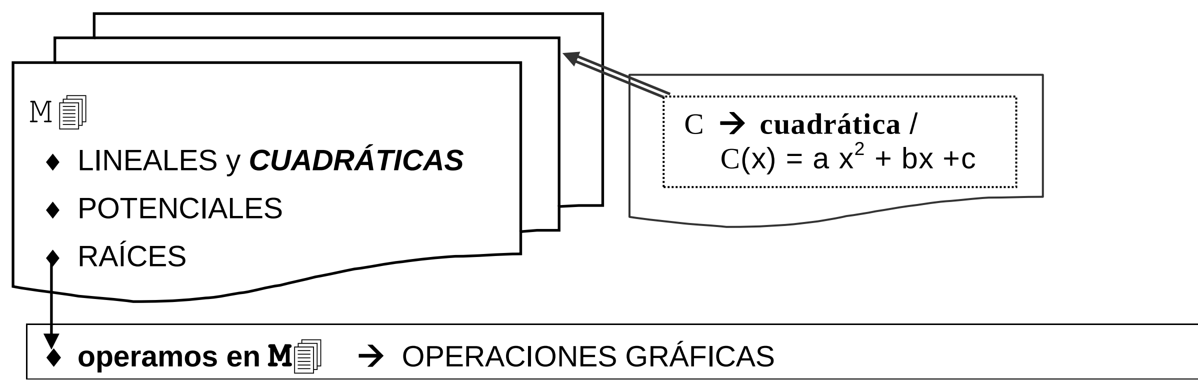


$C(x) = 2x^2 - 8x + 6$ (ej. 5)	$p(x) = C(x)$ **+ 2**	$q(x) = C(x)$ **+ 4**
V(2,-2)	V(2,0)	V(2,2)
$C(x) = 2x^2 - 8x + 6$	$p(x) = 2x^2 - 8x +$ **8**	$q(x) = 2x^2 - 8x +$ **10**
$\Delta = (-8)^2 - 4.2.6 =$ **16**	$\Delta = (-8)^2 - 4.2.8 =$ **0**	$\Delta = (-8)^2 - 4.2.10 =$ **- 16**
$x_1 = 1$; $x_2 = 3$	$x_1 = x_2 = 2$	x_1 y x_2: Nros complejos
$\Delta > 0 \Rightarrow \cap$: dos puntos	$\Delta = 0 \Rightarrow \cap$: un punto	$\Delta < 0 \Rightarrow \cap$: no existe

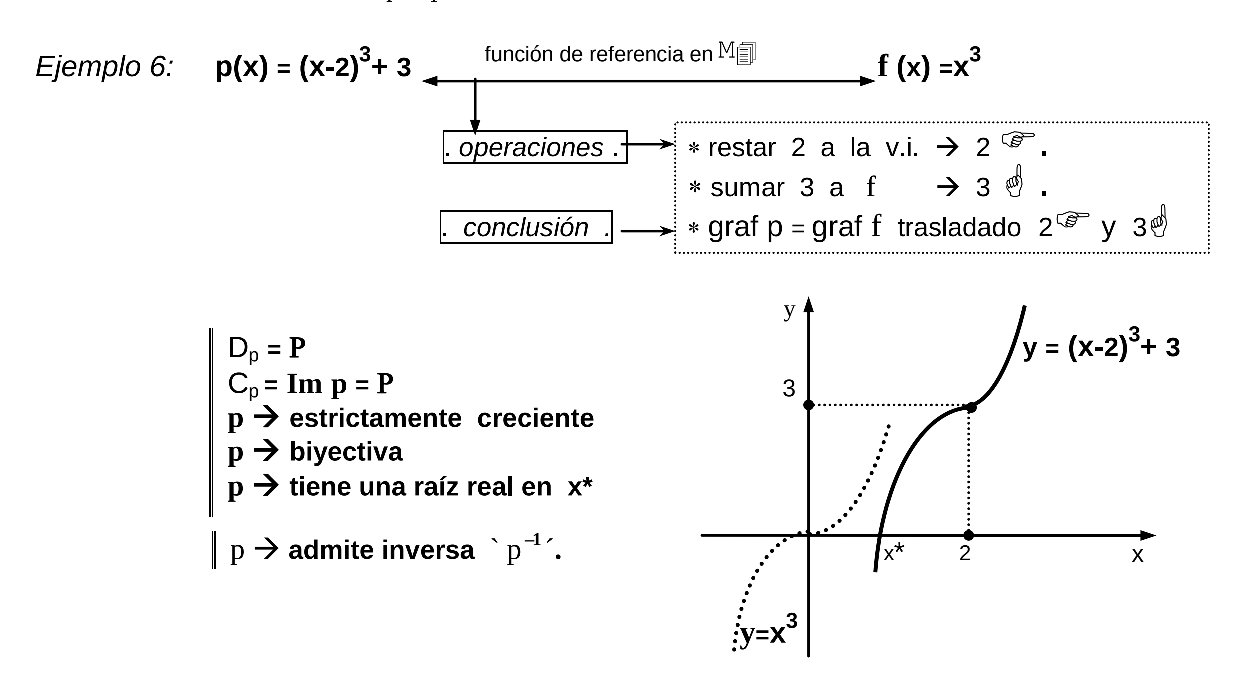
Conclusión: la intersección de la parábola con el eje x depende del signo de Δ, discriminante de la resolvente de la ecuación de 2do grado.



RESUMEN:	**a > 0**	**a < 0**
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$	. $C(x) \geq 0; \forall x$.	$C(x) \leq 0; \forall x$.
$\Delta < 0$	. $C(x) > 0; \forall x$.	. $C(x) < 0; \forall x$.



El proceso hecho con la función cuadrática se puede hacer con cualquier otra función. Es decir, a través de *´operaciones gráficas´* podemos relacionar una función *`desconocida´* con una de la Memoria y, a partir de allí, establecer la *´clase´* a la que pertenece la función *`desconocida´*.



Ejemplo 7: hallar p^{-1} inversa de $p(x) = (x-2)^3+ 3$

» p: P → P / **y=p(x) con p(x)= (x-2)³+3**

» p^{-1}: P → P

» ley p^{-1} **:**

$$p^{-1}(y) = x \iff p(x) = y \quad (*)$$

$$p^{-1}(y) = x \iff (x-2)^3+3 = y$$

$$p^{-1}(y) = x \iff (x-2)^3 = y-3 \quad R_3$$

$$p^{-1}(y)= x \iff (x-2) = \sqrt[3]{y-3} \quad \sqrt[3]{\ }*$$

$$p^{-1}(y)= x \iff x = \sqrt[3]{y-3} +2 \quad S_2$$

$$p^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-3} +2$$

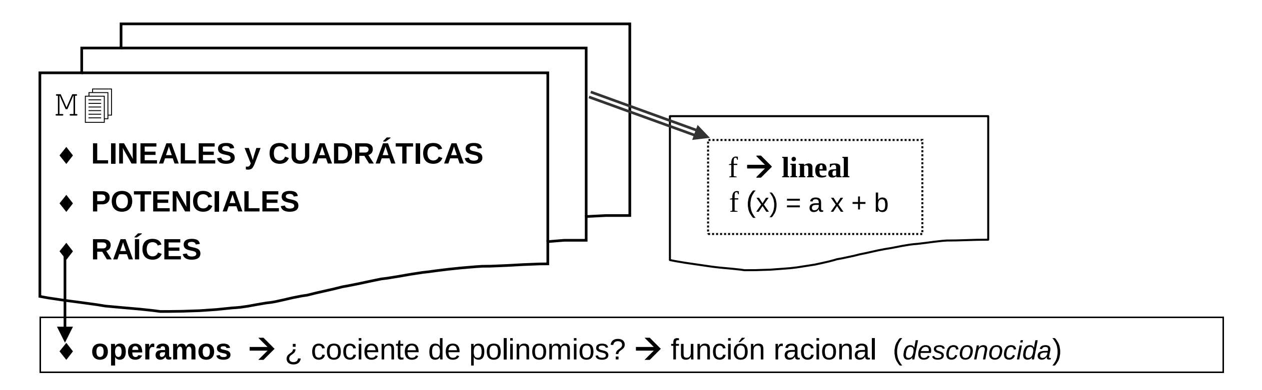
RECORDAR: para hallar inversa:

- **Damos la ley de p^{-1} inversa de p**, **´por definición´.(*)**
- **Tratamos de hallar (si existe) una** *fórmula* **para la ley de p^{-1}** .
- **Si existe una fórmula para p^{-1} ésta se obtiene de despejar** x **en p(x)** = **y ;**

y, *despejar* **≈** ***aplicar inversas.***

- **En este caso, las inversas de las funciones que componen ´p´ son** *conocidas* **; luego,**

podemos hallar una fórmula para p^{-1}



En este punto no tenemos todavía conocimientos suficientes para analizar funciones racionales en general Si podemos hacerlo para un caso particular: *el cociente de dos lineales*.

$$h(x) = \frac{a.x + b}{c.x + d} \xrightarrow{\text{dos opciones}} \begin{cases} c = 0;\ \ d \neq 0;\ \ h(x) = \dfrac{a}{d}.x + \dfrac{b}{d} \longrightarrow \text{lineal} \\ c \neq 0 \longrightarrow \text{función racional} \rightarrow \text{homográfica} \end{cases}$$

Observamos así que el cociente de dos lineales puede dar otra lineal (c=0) o una racional propiamente dicha ($c \neq 0$). Esta última es una función que no tenemos en la memoria; luego, es una función desconocida y, por ende, tenemos que estudiarla.

1.5.5 Función Homográfica: $h(x) = \dfrac{a.x + b}{c.x + d}$; $a, b, c, d \in R$; $c \neq 0$

Según lo establecido en la pag.64 para conocer la función homográfica procedemos a explorar a través de operaciones gráficas la relación entre dicha función y una función prototipo f conveniente al efecto. Vimos también que f generalmente es el caso más elemental posible para la función en cuestión; en este caso, el cociente entre una constante y la identidad.

$$h(x) = \frac{a.x + b}{c.x + d} \xrightarrow{a=0;b=1;c=1;d=0} f(x) = \frac{1}{x} \quad (\rightarrow \textit{recíproca})$$

La función recíproca no está en M ; o sea, es también una función desconocida. Luego, comenzamos por estudiar esta función.

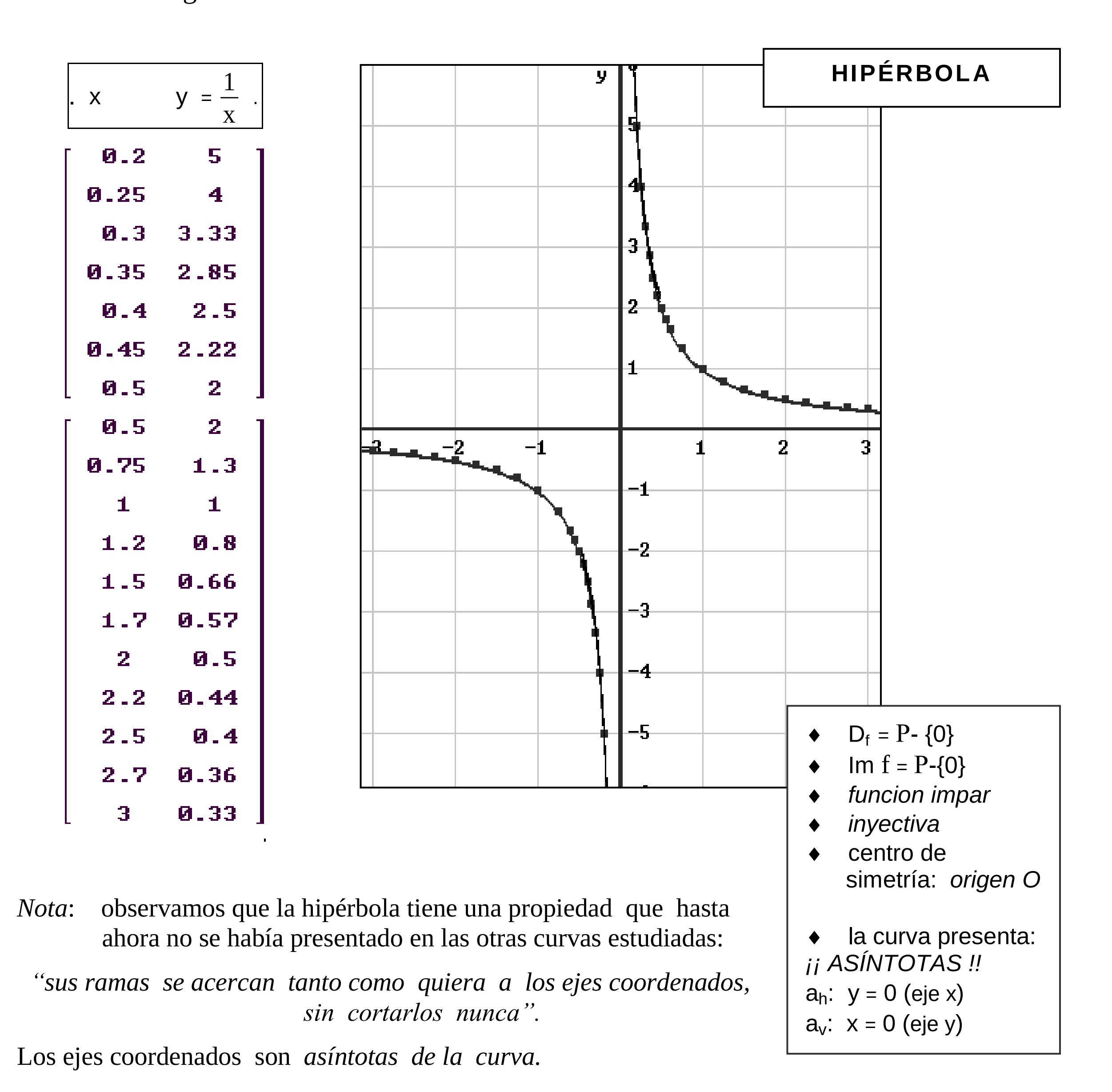
Caso elemental: $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{x}}$

▪ **Dominio de f** : al estudiar una función desconocida lo primero que debemos determinar es su dominio. En este caso **f** es el cociente de dos funciones; luego, el dominio resulta de la intersección de los dominios de las funciones que forman el cociente, *menos los puntos en que se anula la función del denominador*. Así , $\mathbf{D_f = P\text{-} \{ 0\}}$.

▪ **Gráfica de f** : en este caso para obtener la gráfica de la función no tenemos otra opción que acudir al proceso más elemental que disponemos al efecto; o sea, a la *tabla de valores.* Así :

- calculamos y completamos una *tabla de valores* hasta que aparece cierta *configuración*
- unimos los puntos según lo sugiere la configuración y obtenemos la curva.
- le damos un nombre a la curva ; en este caso: *HIPÉRBOLA*.

Nota: cuando para graficar debemos acudir a una tabla de valores resulta útil detectar propiedades de la función, pues muchas veces las mismas proporcionan datos útiles para la construcción de la tabla.
En este caso por ejemplo la función es *impar*; luego, su gráfica debe ser *simétrica respecto del origen*.
Esto implica que podemos construir la tabla sólo para x > 0, graficar la curva correspondiente a los puntos así obtenidos y luego, *por simetría*, completar la gráfica para los x < 0.
Procedemos a graficar f acorde a esta última observación.



x	$y = \frac{1}{x}$
0.2	5
0.25	4
0.3	3.33
0.35	2.85
0.4	2.5
0.45	2.22
0.5	2
0.5	2
0.75	1.3
1	1
1.2	0.8
1.5	0.66
1.7	0.57
2	0.5
2.2	0.44
2.5	0.4
2.7	0.36
3	0.33

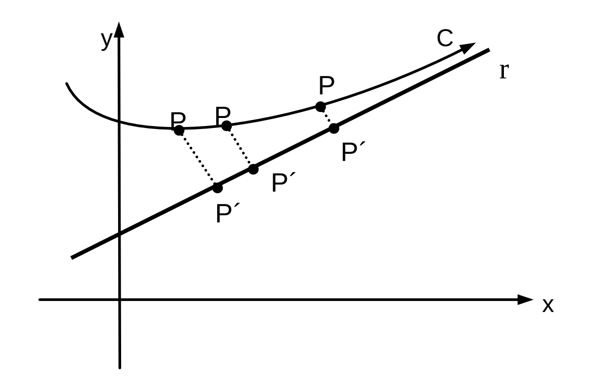
Nota: observamos que la hipérbola tiene una propiedad que hasta ahora no se había presentado en las otras curvas estudiadas:

"sus ramas se acercan tanto como quiera a los ejes coordenados, sin cortarlos nunca".

Los ejes coordenados son *asíntotas de la curva.*

DEFINICIÓN

asíntota de una curva	**Una recta r se dice que es una asíntota de una curva C si dado un punto P sobre C, la distancia entre P y P´ (proyección de P sobre r), se hace cada vez más chica a medida que P se mueve sobre la curva en algún sentido; es decir, d(P, P´) → 0 cuando P se desplaza sobre C.**



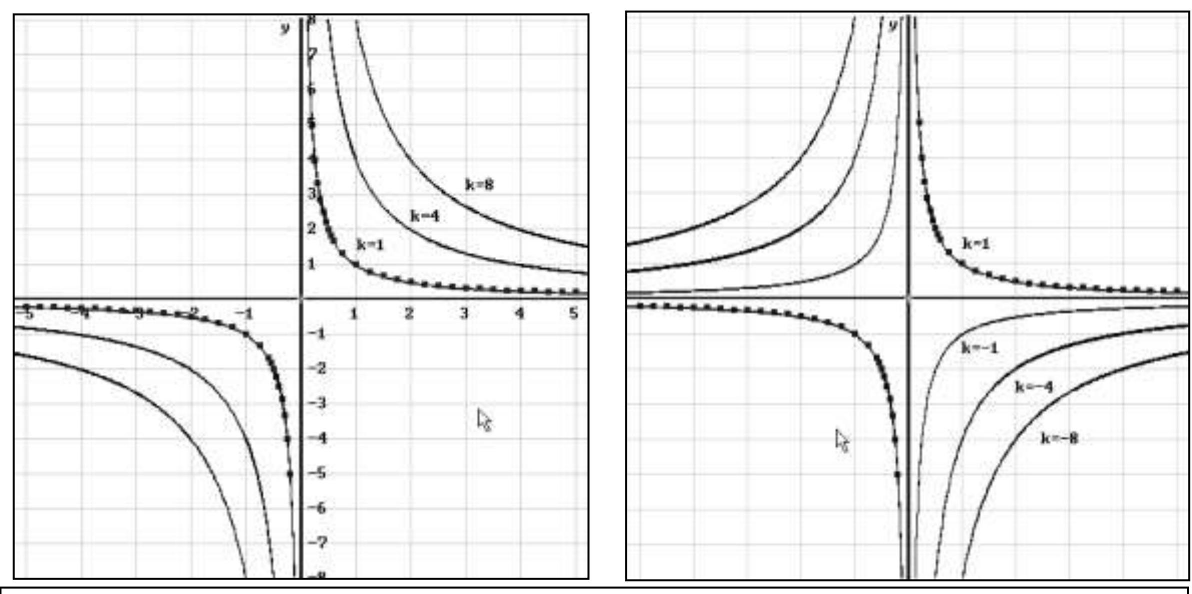
- La recta r es una asíntota para la curva C.
- En el caso de la homográfica las asíntotas son rectas horizontales (y = k) ó rectas verticales (x = h).

Estudiada la función recíproca, f(x) = 1/x , hipérbola con ramas en 1er y 3er cuadrante, nos apoyamos en esta función a los efectos de concluir para las funciones homográficas en general.

Así, en lo que sigue exploramos a través de operaciones gráficas y distintos ejemplos la relación entre homográficas cualesquiera y la función recíproca f .

Ejemplo 1: a = d = 0 → $h(x) = \dfrac{b}{c.x} = \dfrac{b/c}{x} \xrightarrow[b/c = k]{} \mathbf{h(x) = \dfrac{k}{x}}$

En este caso, h(x) = k. f(x); luego y según la tabla de transformación de funciones de la pag. 48 la gráfica de h será una hipérbola alargada, comprimida o reflejada respecto del eje x según sea el valor y signo de la constante k.

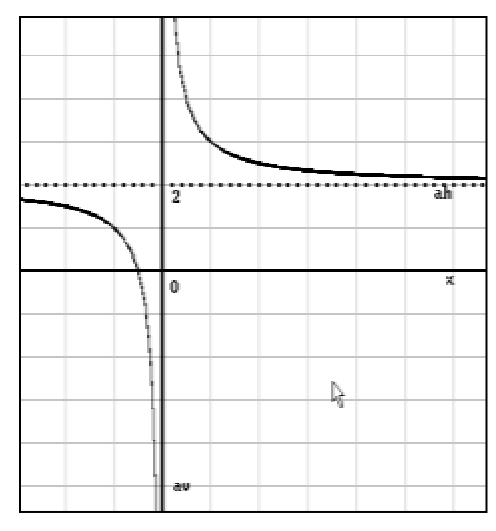


k > 0 → HIPERBOLAS ramas: I C y III C	**k < 0 → HIPERBOLAS ramas: II C y IV C**

Ejemplo 2: h(x) = $\frac{2.x+1}{x}$

NOTA: en este caso la relación entre h y f no es evidente. Luego, trabajamos algebraicamente la función h hasta descubrirla; para ello, *dividimos*.

h(x) = 2 + $\frac{1}{x}$ $\xrightarrow{f(x)=1/x}$ $h(x)=f(x)+2$



(*) Sumo 2 a la función f; luego:

. graf h = graf f , 2 ☝ .

. graf h = ´hipérbola´ subida 2 unidades

∗ Dh = R – {0}

∗ a_V: x =0 (eje y)

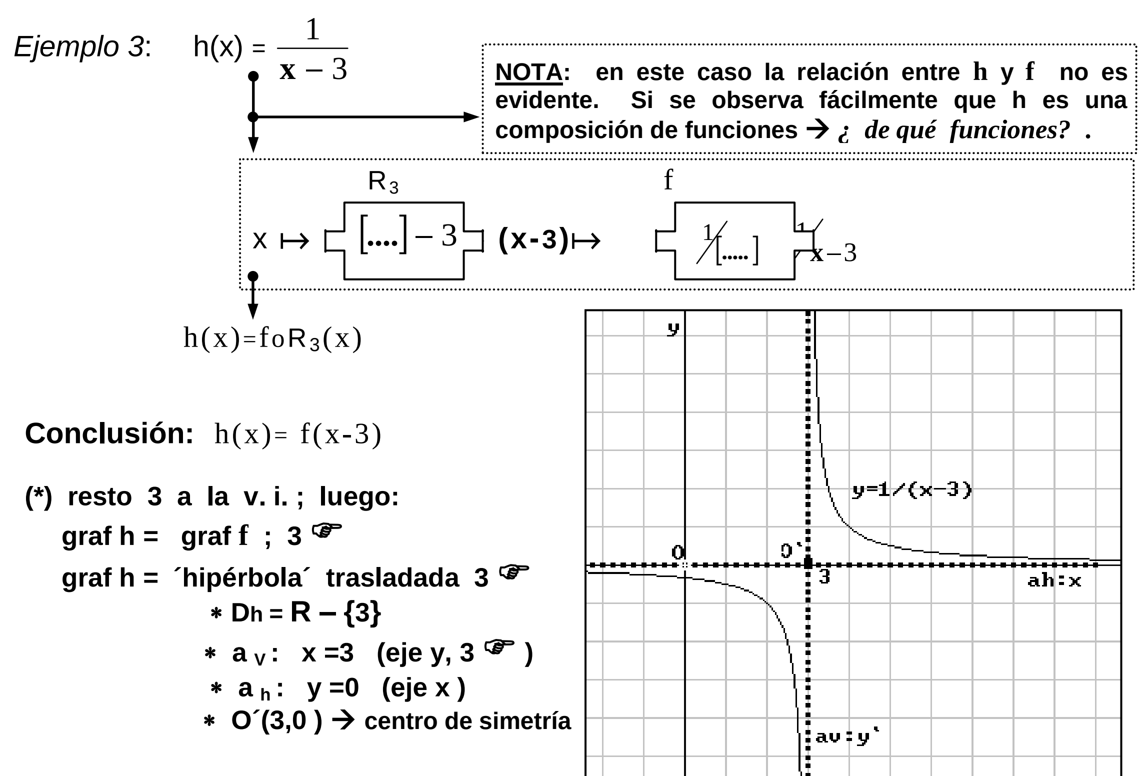
∗ a_h: y =2 (eje x , 2 ☝)

∗ O´(0,2) → centro de simetría

(**) Para graficar la hipérbola trasladada basta con trasladar las asíntotas y el centro de simetría, tomar estos elementos como sistema coordenado auxiliar x´-y´, y graficar allí la *hipérbola tipo* correspondiente a f .

Ejemplo 3: h(x) = $\frac{1}{x-3}$

NOTA: en este caso la relación entre h y f no es evidente. Si se observa fácilmente que h es una composición de funciones → *¿ de qué funciones?* .



Conclusión: h(x)= f(x-3)

(*) resto 3 a la v. i. ; luego:

graf h = graf f ; 3 ☞

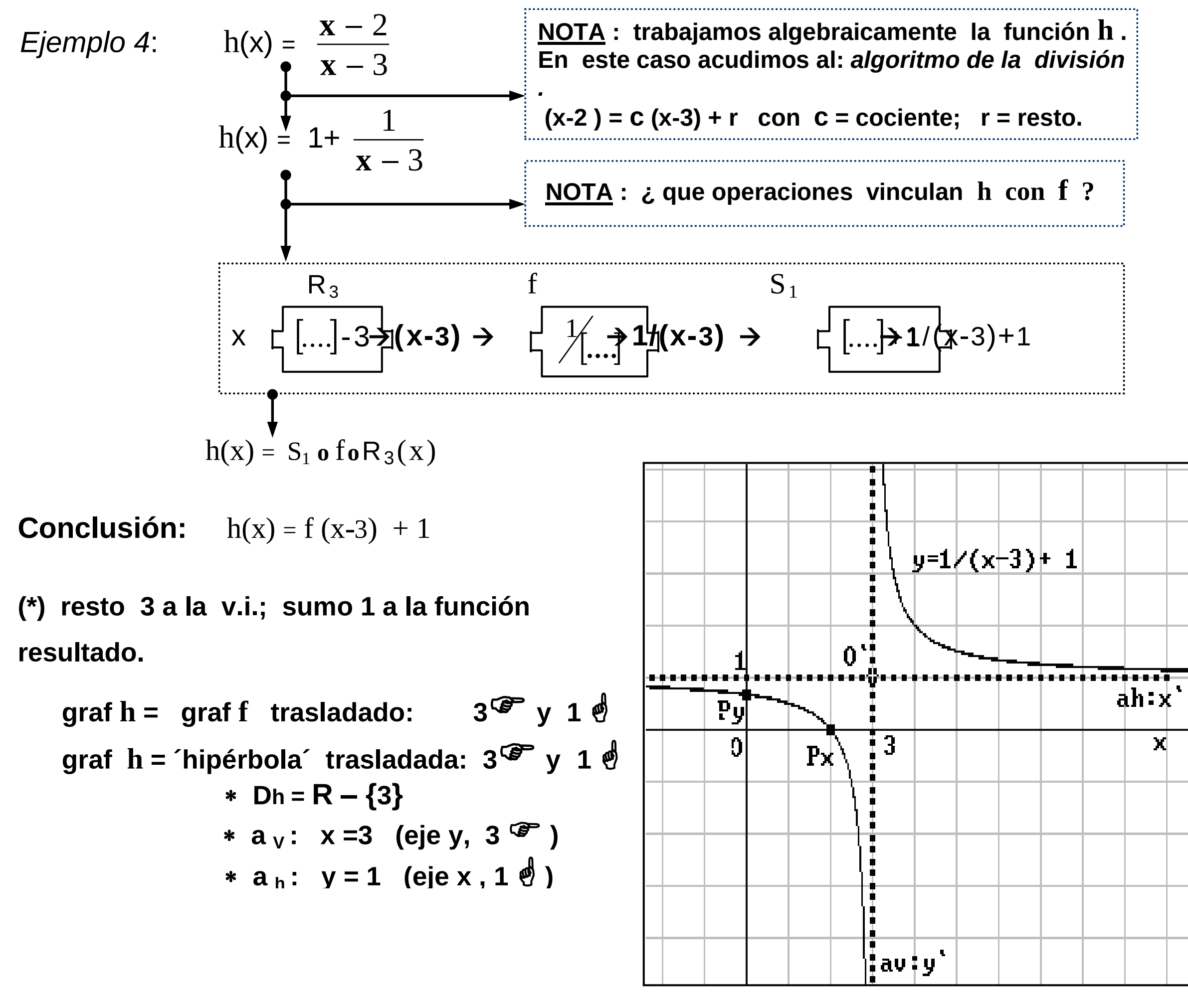
graf h = ´hipérbola´ trasladada 3 ☞

∗ Dh = R – {3}

∗ a_V: x =3 (eje y, 3 ☞)

∗ a_h: y =0 (eje x)

∗ O´(3,0) → centro de simetría



Observaciones:

Los ejemplos vistos van poniendo en evidencia algunos hechos :

▪ La asíntota horizontal es la recta y=k, donde k indica lo que que trasladamos la hipérbola en forma vertical. (☝ ó ☟)

▪ La asíntota vertical es la recta x=h, donde h indica lo que que trasladamos la hipérbola en forma horizontal (☞ ó ☜)

▪ La asíntota vertical pasa por el punto que excluimos del dominio de la función. (este hecho proporciona un método muy simple para determinar donde se halla esta asíntota, el de buscar el punto donde se anula el denominador) .

ⓘ Lo observado hasta ahora nos animaría a conjeturar que el gráfico de una homográfica es siempre una hipérbola. Ahora bien, ¿nos animamos a dar por válida esta conjetura sin más ?, ¿alcanzan los ejemplos vistos para concluir acerca de la verdad de tal supuesto?. Un buen matemático sabe que no, que no hay ninguna cantidad de ejemplos que alcance para demostrar la validez de una conjetura, que las demostraciones matemáticas se basan en el método deductivo; sabe también que basta un contraejemplo para demostrar que un supuesto es falso.
Entonces.., ¿cómo procedemos para concluir en este caso?.
Tenemos distintos caminos para asegurarnos de la validez de los resultados obtenidos , uno de ellos, *trabajar en forma genérica*. En lo que sigue, optamos por este método.

Ejemplo 5: $h(x) = \dfrac{\mathbf{a.x + b}}{\mathbf{c.x + d}}$

$h(x) = \boldsymbol{k} + \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{c.x + d}}$

Trabajamos algebraicamente la función h acudiendo al: *algoritmo de la división .*
(a.x+ b) = k **(c.x+d) +** r **con** k **= cociente;** r =

ⓘ La expresión obtenida indica que la graf h es una hipérbola ⇔ $\mathbf{r} \neq 0$; o sea, si el resto de dividir numerador por denominador <u>no es cero</u>.

ⓘ ¿ **r =** 0 ?. Investigamos en que caso se da esta situación y concluimos que:

$$\mathbf{r} = 0 \iff a = \boldsymbol{k}.c \; ; \; b = \boldsymbol{k}.d \iff \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} \quad ó \quad \mathbf{a.\,d - b.\,c = 0}\ .$$

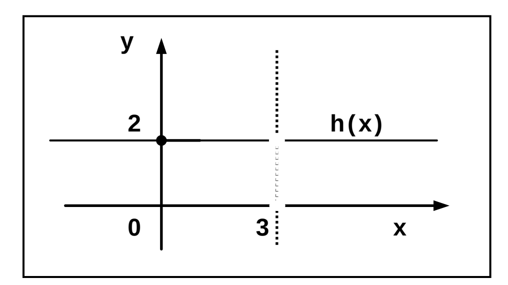
¿Qué sucede en tal caso ?: vemos un ejemplo.

$$h(x) = \frac{2.\mathbf{x} - 6}{\mathbf{x} - 3} \qquad [\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}}\ ], \qquad \mathbf{Dh} = R - \{3\}$$

$$h(x) = \frac{2.(\mathbf{x} - 3)}{\mathbf{x} - 3} \underbrace{=\!=}_{\mathbf{x} \neq 3} 2\ .$$

Luego, comparando h con la función g tal que, $g(x)=2 \ \forall\, x \in R$, tenemos:

$\forall\, x \neq 3$ → $h(x) = g(x)$
$x = 3$ → $h(3) \neq g(3)$ pues h (3): ∄



<u>*Conclusión*</u>*:* h coincide con una función constante excepto en un punto.
Luego , su gráfica coincide con la de la recta y = 2 excepto en un punto, por ello decimos que la misma es una ´recta perforada´ (o agujereada).

RESUMEN: ***homográfica***

- $h(x) = \dfrac{\mathbf{a.x + b}}{\mathbf{c.x + d}}$; $c \neq 0$
- D_h= P - {- d/c }
- graf h → depende de la existencia o no de proporcionalidad entre los coeficientes.

(I) $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}}$ ⇒ graf h = *recta perforada*

(II) $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \neq \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}}$ ⇒ graf h = *hipérbola trasladada* (*)

(*) en este caso la hipérbola es el resultado de operaciones gráficas efectuadas sobre $f(x)= \alpha/x$; así y según la TABLA de la pag. 48, h resulta vinculada a f a través de la siguiente expresión $h(x) = \alpha.\, f(x + d/c) + k$, donde:

- d/c , indica el corrimiento en sentido horizontal.
- k , indica el corrimiento en sentido vertical.
- α (= r/c), indica la abertura de las ramas de la hipérbola y el cuadrante donde están.

$\mathbf{h(x)} = \dfrac{\mathbf{a.x + b}}{\mathbf{c.x + d}} \xrightarrow{\textbf{dividiendo}} \mathbf{h(x)} = k + \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{c.x + d}} = k + \alpha \cdot \dfrac{1}{\mathbf{x + d / c}}$

graf h = hipérbola

corrimiento: ☞ ó ☜ .

corrimiento : ☝ ó ☟

(*) Elementos geométricos que caracterizan la hipérbola:

* asíntota vertical → a_v : x = - d/c (☞ ó ☜).
* asíntota horizontal → a_h : y = *k* (☝ ó ☟)
* centro de simetría → O´ (-d/c, *k*)
* ramas →
  - **α > 0 → I y III C**
  - **α < 0 → II y IV C**

Ejemplo 6: $h(x) = \dfrac{3.\mathbf{x} - 5}{\mathbf{x} - 4}$; D_h= P - { 4 }

1º) reconocemos el <u>tipo de función</u> →

- **c ≠ 0 → homográfica;**
- **3 / 1 ≠ (-5)/ (-4) → HIPÉRBOLA**
- **b ≠ 0 y d ≠ 0 → *trasladada***
- **nuevo sistema → eje x´=** a_h **; eje y´ =** a_v

2º) efectuamos el cociente:

$h(x) = \dfrac{3.\mathbf{x} - 5}{\mathbf{x} - 4} \xrightarrow{\textbf{dividiendo}} h(x) = 3 + \dfrac{7}{\mathbf{x} - 4}$

graf h = hipérbola   3 ☝   4 ☞

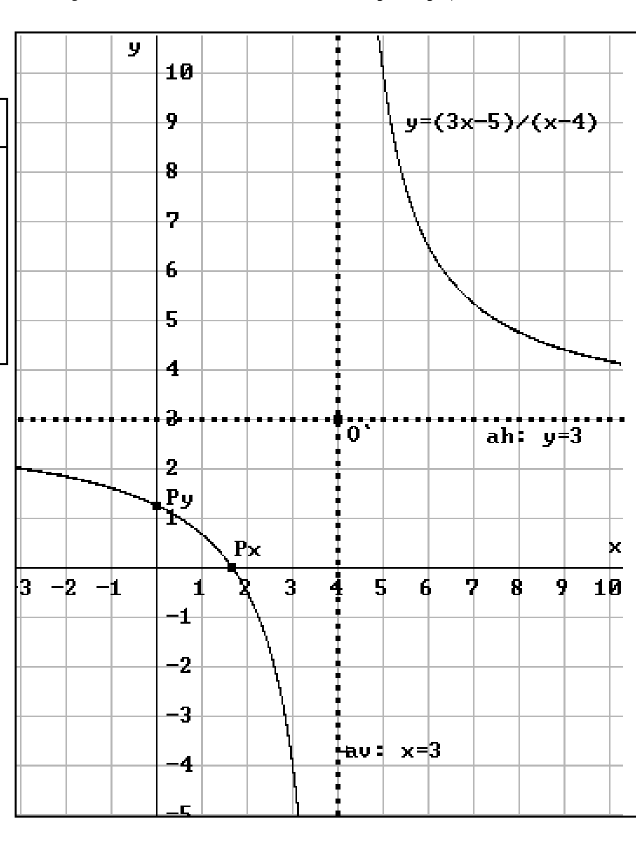
3º) elegimos la <u>función tipo de referencia</u> : f (x) = 7 / x → ramas I y III C

4º) O´(4 ; 3) ; a_v : x = 4 ; a_h : y = 3

5º) trasladamos f (x) = 7/ x al sistema x´-y´ formado por las asíntotas y O´.

(para graficar con mayor precisión buscamos otros puntos sobresalientes tales como la intersección de la curva con cada uno de los ejes coordenados → Px y Py)

PTOS SOBRES.	x	y = h(x)	P(x; y)
P_y (0; h(0))	0	5/4	(0 ; 5/4)
P_x (x ; 0)	x /h(x)=0	0	(5/3; 0)
O´ (☞; ☝)	4	3	(4 ; 3)



(*) elementos sobresalientes de la hipérbola:

<u>tres puntos</u> *:*

- P_y , P_x , intersección con los ejes .
- **O´** , centro de simetría.

<u>dos rectas</u>: las asíntotas.

Estos elementos permiten *ubicar* fácilmente la hipérbola una vez *reconocida* (paso 1º); o sea, permiten que para graficar la curva usemos el otro método, el del gráfico por *"elementos sobresalientes"* .

Ejemplo 7: $h(x) = \dfrac{6.\mathbf{x} - 8}{2.\mathbf{x} - 4}$ **;** D_h= P - { 2 }

Graficamos h , por elementos sobresalientes:

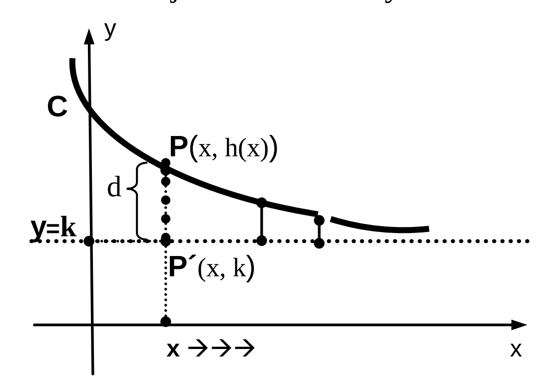
1º) reconocemos el tipo de función y sus elementos sobresalientes

- **c ≠ 0 → homográfica;**
- **6 / 2 ≠ (-8)/ (-4) → *hipérbola***
- **b ≠ 0 y d ≠ 0 → *trasladada***
- **nuevo sistema → eje y´= a_v → x = 2 (*)**
  eje x´ = a_h → y = k (**)
  O´ (h ; k) → O´ (2 ; k)

(*) Como ya observáramos la asíntota vertical pasa por el punto que no pertenece al dominio de h .

(**) Para poder graficar la hipérbola por elementos sobresalientes se hace necesario hallar una forma de detectar directamente de la ley el punto por donde pasa la asíntota horizontal ; o sea, una forma de reconocer **k** sin tener que realizar la división.

• Con este objeto recordamos y analizamos la definición de asíntota.



➢ **La recta y = k es asíntota de** C **si y sólo si d (P; P´) → 0 a medida que x se hace *cada vez más grande.* O sea; si para** *x muy grande,*

• Luego; para detectar la asíntota horizontal, o sea el valor de **k** , basta con identificar el número al cual se aproxima h(x) para valores de x muy grandes.

• ¿Es posible identificar tal número?. Si, si trabajamos algebraicamente la función y la escribimos de otra forma podemos entonces reconocer este valor.

$$h(x) = \frac{\mathbf{a.x + b}}{\mathbf{c.x + d}} \xrightarrow{\div\ \mathbf{m.a.m.\ por.x}} h(x) = \frac{\mathbf{a} + \left[\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}}\right] \xrightarrow{\mathbf{x\ ´grande´}} \approx 0}{\mathbf{c} + \left[\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{x}}\right] \xrightarrow[\mathbf{x\ ´grande´}]{} \approx 0} \approx \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$$

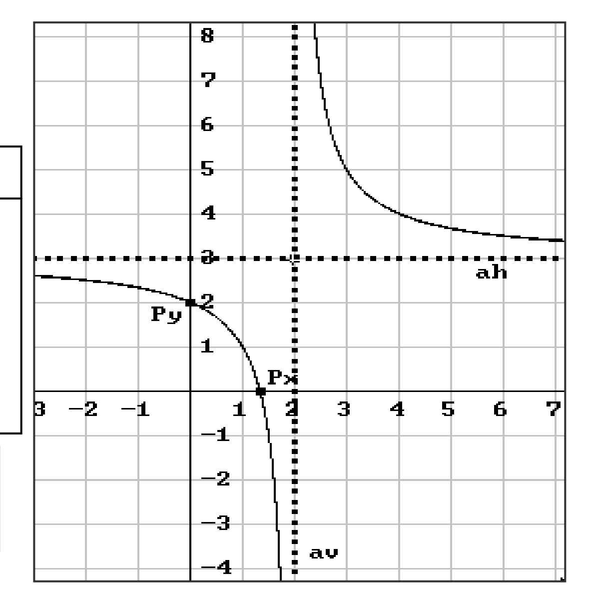
<u>Conclusión</u> : para x´s muy grandes, $h(x) \approx \frac{a}{c}$; luego este es el valor buscado.

Por lo tanto $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$ y la asíntota horizontal es , $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$; o sea, a_h se obtiene de hacer el *cociente entre los coeficientes de la variable independiente.*

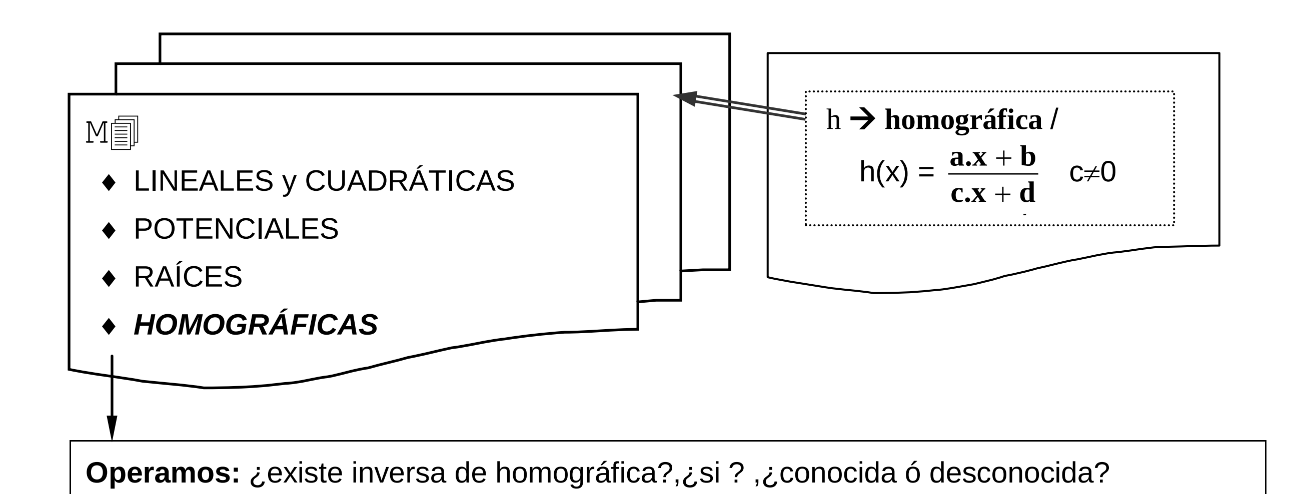
2º) calculamos los elementos sobresaliente de $h(x) = \frac{6.\mathbf{x} - 8}{2.\mathbf{x} - 4}$

PTOS SOBRES.	x	y = h (x)	P(x; y)
P_y (0; h(0))	0	2	(0 ; 2)
P_x (x ; 0)	4/3	0	(4/3; 0)
O´ (☞; ☝)	2	3	(2; 3)

eje y´ = a_v → **x = 2**
eje x´ = a_h → **y = 3**



3º) graficamos la hipérbola con esos datos



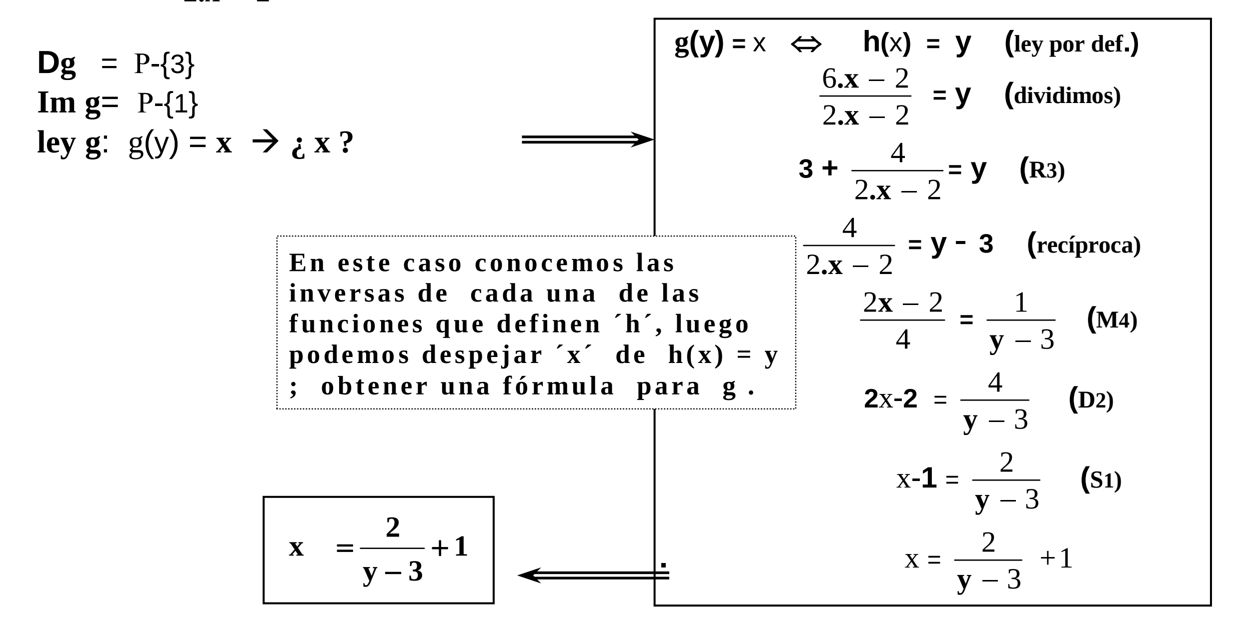
Operamos: ¿existe inversa de homográfica?,¿si ? ,¿conocida ó desconocida?

- Sea f (x) = 1/x con f : P-{0} → P-{0} entonces f es biyectiva y existe g, inversa de f .

ley g**:** f o g= id ⇒ f o g (x) = x ⇒ f (g (x))=x ⇒ 1/g(x)= x ⇒ g (x)= 1/x ⇒ **g ≡ f**

(*) En este ejemplo vemos otra forma de hallar la función inversa: trabajar con la propiedad de que la composición de una función y su inversa es la ´identidad´
(*) Comprobamos además que la inversa de la recíproca es : ¡¡ la recíproca !!.
(*) Si observamos la gráfica de la recíproca vemos que esta, además de ser simétrica respecto del origen también lo es respecto de la recta y=x. Esto ya era un indicio de que la función y su inversa debían coincidir.

- h (x) = $\frac{6.\mathbf{x} - 2}{2.\mathbf{x} - 2}$; h: P-{1} → P-{3} ; biyectiva ⇒ ∃ **g = inversa de h**

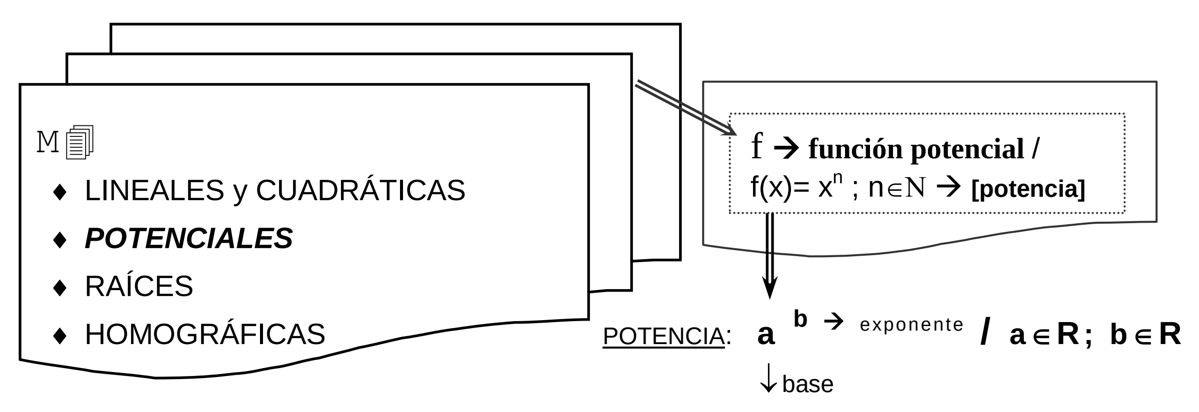


Conclusión: **g(y) =** $\frac{2}{\mathbf{y} - 3} + 1$ → homográfica → ¡conocida!!

Si deseamos graficarla en el mismo sistema que h, intercambiamos el nombre de las variables y aplicamos cualquiera de los métodos vistos para graficar homográficas:

x → y
y → x

$\mathbf{y} = \frac{2}{\mathbf{x} - 3} + 1$ → hipérbola desplazada (3☞ y 1☝)



La función potencia tiene la base variable y el exponente fijo (ej: x^3); ahora nos preguntamos , ¿qué sucede si consideramos la base fija y el exponente variable, ¿obtenemos una función?. Si así fuera: ¿conocida o desconocida ? . En lo que sigue analizamos: **f (x) = a$^{\mathbf{x}}$** .

- Dado x∈R; **x**• —único→ **a$^{\mathbf{x}}$** . Luego la correspondecia puede definir función.
- a^x , ¿ existe para todo x, cualquiera sea la base ? .
- Vemos dos ejemplos: **4$^{\mathbf{x}}$** y **(-4)$^{\mathbf{x}}$**

x	4^x	$(-4)^x$
o	$4^0 = 1$	$(-4)^0 = 1$
1	$4^1 = 4$	$(-4)^1 = -4$
2	$4^2 = 16$	$(-4)^2 = 16$
3	$4^3 = 64$	$(-4)^3 = -64$
-1	$4^{-1} = ¼$	$(-4)^{-1} = -¼$
-2	$4^{-2} = 1/16$	$(-4)^{-2} = 1/16$
½	$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$	$\sqrt{(-4)}$ no tiene solución en **P** **(*)**
-½	$4^{-1/2} = ½$	$(-4)^{-1/2}$ no tiene solución en **P** **(*)**
$x \in$ P	$4^x \in P^+$	$(-4)^x$ **puede o no ser un nro real**

(*) $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,\sqrt{-1} = 2\,i$

$(-4)^{1/2} \in C$, **nros**

CONCLUSIÓN: $f(x) = a^x$ es función real a variable real $\Leftrightarrow$ $a > 0$

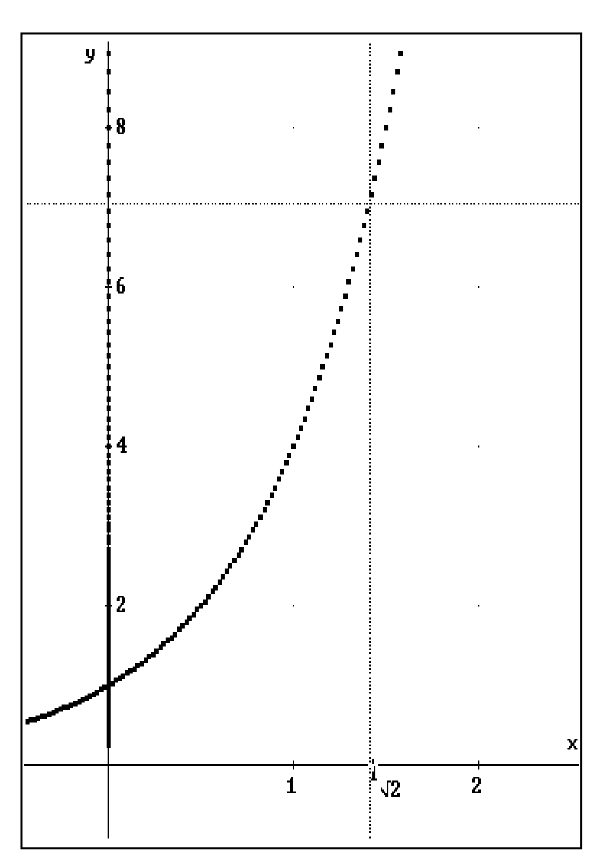
OBSERVACIÓN 1: si $a > 0$ entonces $a^x > 0 \;\; \forall\, x \in P \;\Rightarrow\; Im\, f = P^+$
OBSERVACIÓN 2: para x´s crecientes; $f(x) = 4^x$ crece.
OBSERVACIÓN 3: como cualquiera sea la base, Im f = P^+ y f es monótona, entonces *no puede ser una función tipo potencia.* Luego, estamos ante una función desconocida; por lo que le damos un nombre, función exponencial, la estudiamos y luego la incorporamos a M.
OBSERVACIÓN 4: en la página 30 clasificamos a las funciones en dos grandes grupos: algebraicas y trascendentes. Allí dijimos que la exponencial es una función trascendente. En esta instancia cabe preguntarnos porqué es trascendente y no algebraica sí, según vemos de la tabla para calcular potencias tenemos que hacer productos y/ó raíces. Para contestar esta pregunta repasamos el significado de a^x

- x = n ; n entero positivo, entonces: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots\cdots a}_{n \text{ factores}}$
- x = - n; n entero positivo, entonces: $a^{-n} = 1/a^n$.
- x = p/q, p y q enteros y q>0; entonces: $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

} **Nros RACIONALES**

- x = nro irracional , por ejemplo: π, $\sqrt{2}$; entonces, ¿ cómo calculamos a^{π} ; $a^{\sqrt{2}}$?.

Nota: para trabajar en Cálculo es necesario tener definida la exponencial para todo número real, racional ó irracional. Si trabajamos sólo con racionales, la gráfica de $\mathbf{a}^{\mathbf{x}}$ resulta una curva creciente ´infinitamente perforada´ (infinitos puntos no tendrían imgen). ¿Cómo definimos la exponencial para los irracionales?



Consideremos el caso de $\mathbf{a}^{\sqrt{2}}$.
El valor que asignemos a $\mathbf{a}^{\sqrt{2}}$ debe ser tal que ´rellene´ el hueco que se observa en la gráfica para $x = \sqrt{2}$. Para realizar esta tarea acudimos a un nuevo proceso: el de aproximación.

Para ello tenemos en cuenta que la expresión decimal infinita $\sqrt{2} = 1.414214....$ indica que $\sqrt{2}$ es el número real que satisface la siguiente lista de desigualdades:

1	<	$\sqrt{2}$	<	2
1.4	<	$\sqrt{2}$	<	1.5
1.41	<	$\sqrt{2}$	<	1.42
1.414	<	$\sqrt{2}$	<	1.415
....				

☞ los valores que acotan $\sqrt{2}$ son racionales; por lo tanto, para ellos, la exponencial está definida.

Si $a = 4$; $4^{\sqrt{2}}$ satisface las siguientes desigualdades, obtenidas de calcular 4^x para el listado anterior.

4	<	$4^{\sqrt{2}}$	<	16
6.96440	<	$4^{\sqrt{2}}$	<	8
7.06162	<	$4^{\sqrt{2}}$	<	7.16020
7.10089	<	$4^{\sqrt{2}}$	<	7.11074
7.10286	<	$4^{\sqrt{2}}$	<	7.10384
7.10.....	<	$4^{\sqrt{2}}$	<	7.10....

CONCLUSIÓN : definimos $\mathbf{4}^{\sqrt{2}}$ como el número que satisface la lista de desigualdades que resulta de aplicar 4^x a la lista de desigualdades que satisface $\sqrt{2}$. Este número existe y es irracional.
Los números de la última lista proporcionan aproximaciones de $\mathbf{4}^{\sqrt{2}}$:
$\mathbf{4}^{\sqrt{2}} \approx 7.10286$ (con tres decimales exactos) ; $\mathbf{4}^{\sqrt{2}} \approx 7.10299$ (con cinco decimales exactos).
Finalmente, para todo x, número irracional, a^x se define en forma similar al ejemplo y, de este modo, la función exponencial queda definida para todo número real .

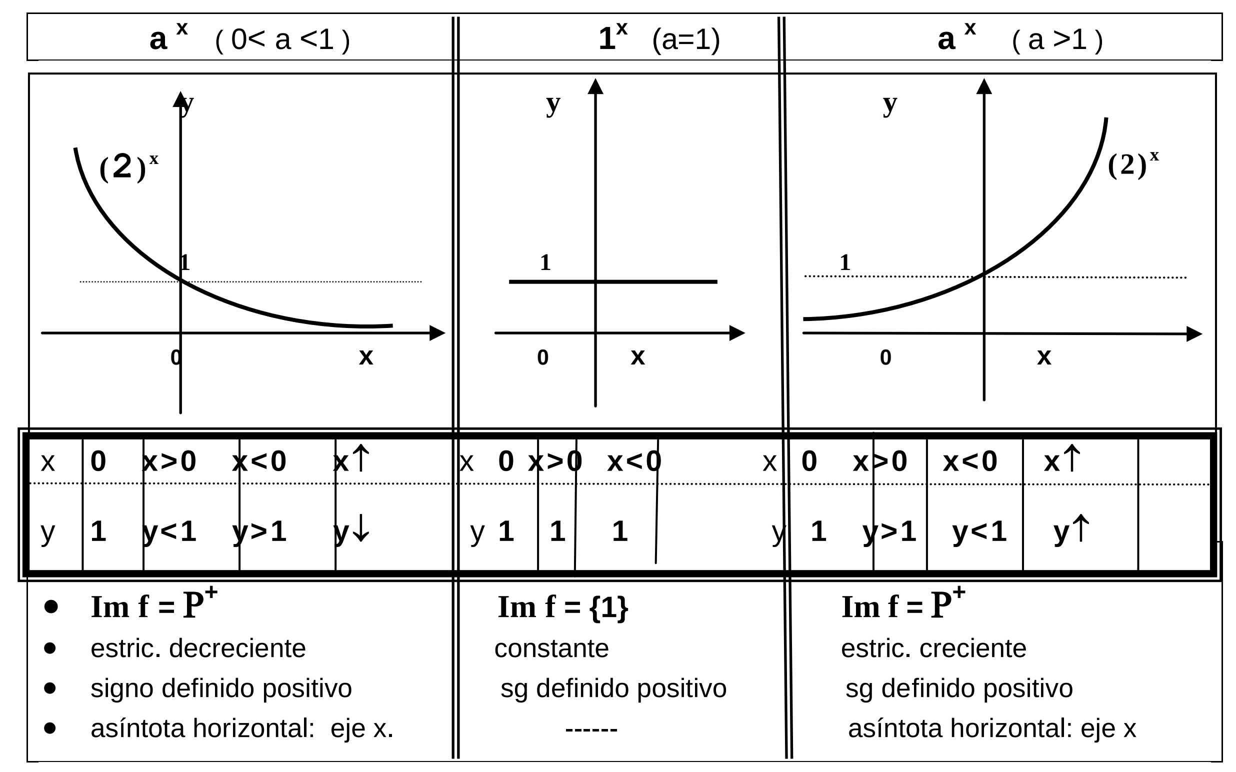
1.5.6 Función Exponencial: $f(x)=a^x$; con $a>0$, $a\neq 1$, $D_f = R$

NOTA 1: $1^X = 1$, $\forall\, x\in P$. Luego, para $a = 1$; $f(x) = 1$ $\forall\, x\in P$ (f función lineal, ya conocida), por ello excluimos el caso de la base igual a 1.

NOTA 2: $\mathbf{a}^{\mathbf{x}} \in P \quad \forall\, x\in P \iff \mathbf{a} > \mathbf{0}$, por ello pedimos base positiva y no nula.

NOTA 3: si $\mathbf{a}>\mathbf{0}$ entonces $\forall\, x\in P$, $\mathbf{a}^{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$

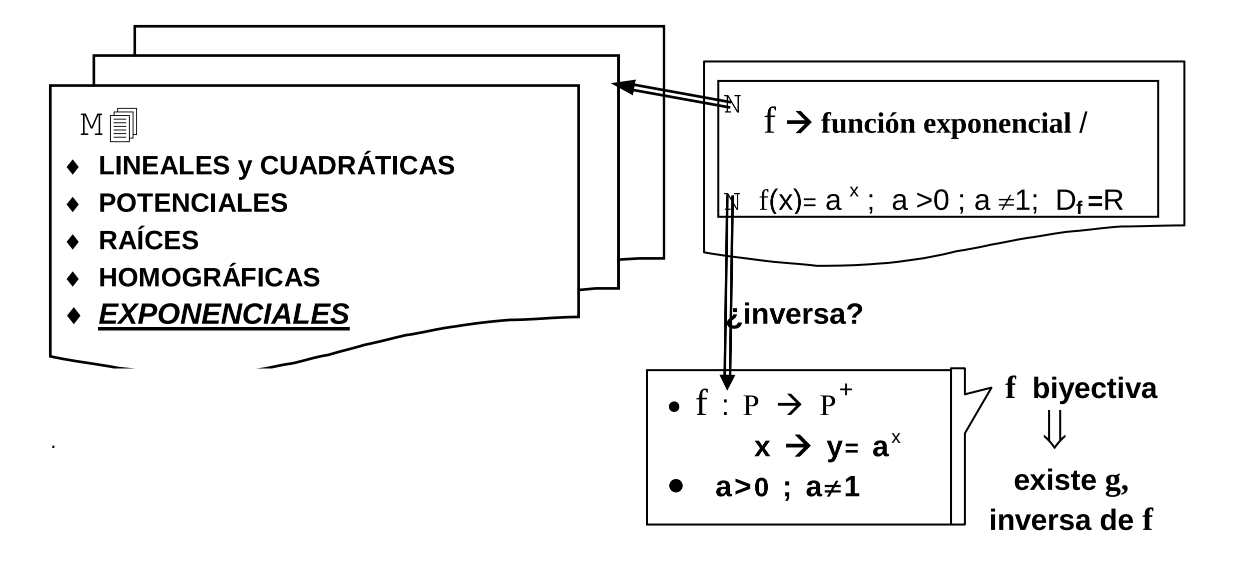
NOTA 4: el comportamiento tendencial de la función depende de la base; así,
- si $0< a <1$; $x_1 < x_2 \Rightarrow \mathbf{a}^{x_1} > \mathbf{a}^{x_2}$. Luego, f es decreciente.
- si $a >1$; $x_1 < x_2 \Rightarrow \mathbf{a}^{x_1} < \mathbf{a}^{x_2}$. Luego, f es creciente.



x	0	x>0	x<0	x↑	x	0	x>0	x<0	x	0	x>0	x<0	x↑	
y	1	y<1	y>1	y↓	y	1	1	1	y	1	y>1	y<1	y↑	

a^x (0< a <1)	1^x (a=1)	a^x (a >1)
• **Im f = P^+**	**Im f = {1}**	**Im f = P^+**
• estric. decreciente	constante	estric. creciente
• signo definido positivo	sg definido positivo	sg definido positivo
• asíntota horizontal: eje x.	------	asíntota horizontal: eje x

Incorporamos la función exponencial a nuestra memoria.



1.5.7 Inversa de Exponencial

» f : P → P^+ / **y=f(x) con f(x)=a^x**

» g: P^+ → P

» **ley g *(por definición)***

g(y) = x ⇔ **f**(x) = **y**

g(y) = x ⇔ a^x= **y**

g(y) = x ⇔ x = **…**

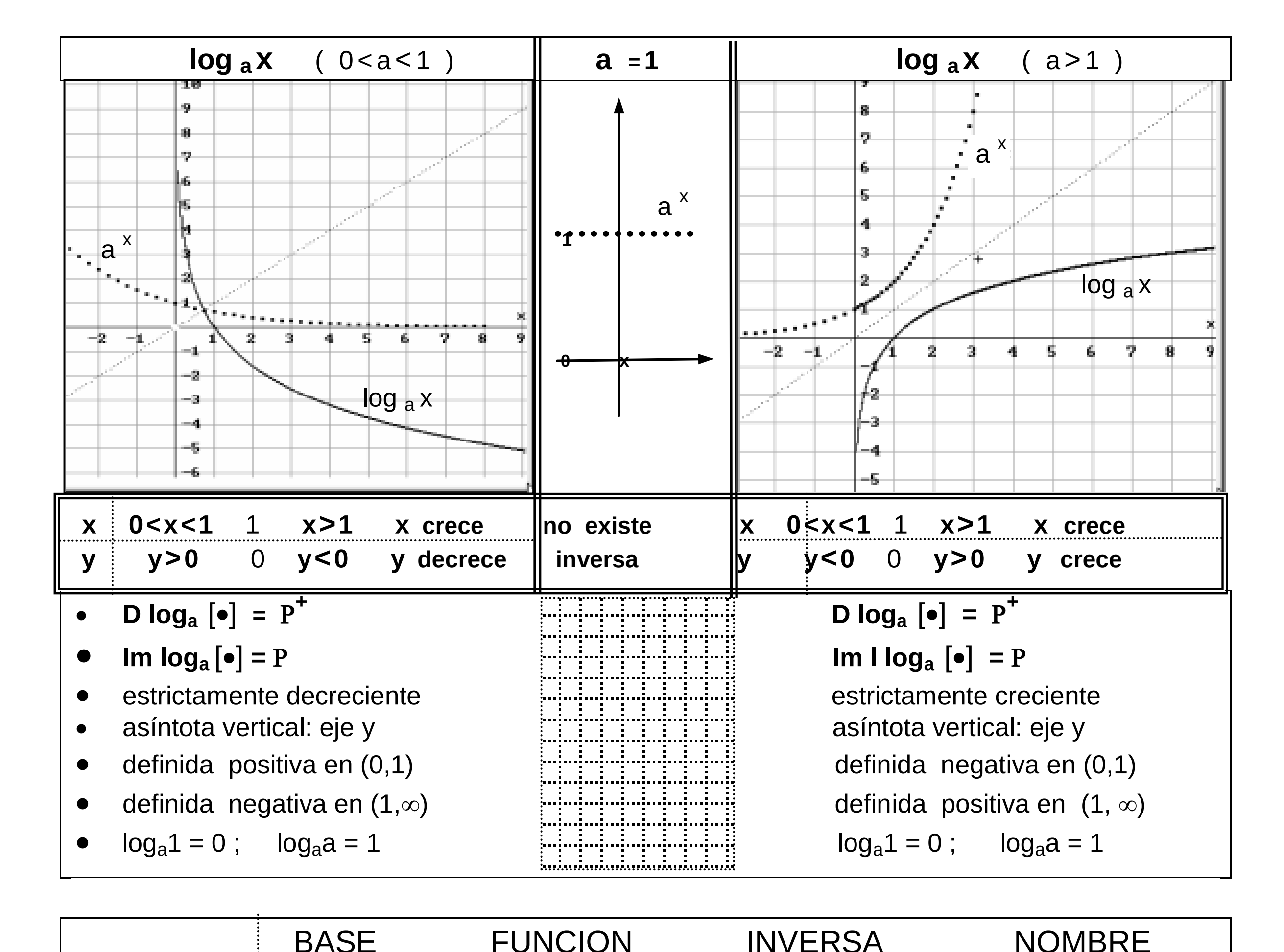
no se puede "despejar" x a través de funciones

Comprobamos entonces que <u>no existe una fórmula para f $^{-1}$</u> y, consecuentemente, que hemos encontrado un <u>nuevo tipo de función</u>. Ideamos un nombre y un símbolo para indicar este tipo de función; la llamamos: **LOGARITMO.**

CONCLUSIÓN:

- **g** es una nueva función [∉M▤].
- <u>NOMBRE</u>: **logaritmo en base a**
- <u>SIMBOLO</u>: **log** $_a$ [•]
- Restricciones: **a >0 ; a ≠1**

> ▫ Dom. **log $_a$ [•]** = P$^+$
> ▫ Im **log $_a$ [•]** = P
> ▫ ley: $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$



log $_a$x (0<a<1)	**a =1**	**log $_a$x** (a>1)
x: 0<x<1 · 1 · x>1 · x crece	no existe	**x**: 0<x<1 · 1 · x>1 · x crece
y: y>0 · 0 · y<0 · y decrece	inversa	**y**: y<0 · 0 · y>0 · y crece
D log$_a$ [•] = P$^+$		**D log$_a$ [•] = P$^+$**
Im log$_a$ [•] = P		**Im l log$_a$ [•] = P**
estrictamente decreciente		estrictamente creciente
asíntota vertical: eje y		asíntota vertical: eje y
definida positiva en (0,1)		definida negativa en (0,1)
definida negativa en (1,∞)		definida positiva en (1, ∞)
$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$		$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$

	BASE	FUNCION	INVERSA	NOMBRE
Casos	a =10	f (x) = 10^x	g(x) = log x	*log decimal*
particulares:	a = **e**	f (x) = $\mathbf{e}^x$	g(x) = ln x	*log natural*

ln x **log x**

<u>fórmula de cambio de base</u>:

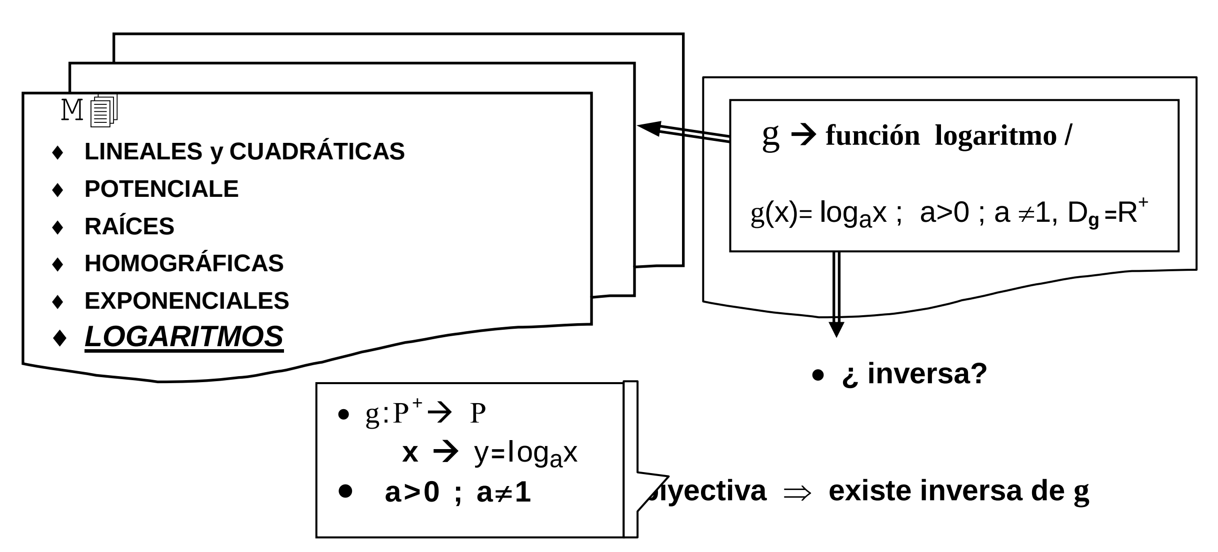
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

➢ $$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

log x = 0,434 . ln x

➢ $$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

ln x = 2,302 log x



Observación : por definición de logaritmo: **ln x = y** ⇔ **e^y = x** .
Resulta claro entonces que la función que “deshace” lo que hace el logaritmo (o sea su “inversa”) es, **la exponencial**. Esto vale en general; o sea que si g es la inversa de f, entonces f es la inversa de g.
Recordando que la composición de una función y su inversa da como resultado la función identidad, tenemos así dos importantes resultados:

» $\ln(e^x) = x \;;\; \forall x \in R$
» $e^{\ln x} = x \;;\; \forall x > 0$

1.5.8 Funciones Trigonométricas

En el Apéndice C comentamos algo acerca del origen de las funciones trigonométricas, de su relación histórica con las ´razones trigonométricas´. Así mismo damos allí las definiciones que finalmente y a través de un largo proceso (en el que varía la noción de ángulo) se establecen para estas funciones (aquellas en las que el dominio de aplicación no se encunetra restringido a ángulos agudos sino que comprende cualquier tipo de ángulo, ya sea, agudo, obtuso, de más de una vuelta, positivo o negativo).

DEFINICIÓN

funciones trigonométricas	**Dado un ángulo α en posición estándar y P(x,y) un punto cualquiera del lado final del ángulo, si la distancia de P al origen la indicamos con r (*radio vector*), definimos las funciones**

➢ sen $\alpha = \dfrac{y}{r}$
➢ cos $\alpha = \dfrac{x}{r}$
➢ tg $\alpha = \dfrac{y}{x}$

y
P(x,y) y
r α
x O x

En particular, para r=1, tenemos :
➢ sen α = y **(ordenada de P)**
➢ cos α = x **(abscisa de P)**

Cofunciones: llamamos así a las recíprocas de las funciones trigonométricas básicas. Les damos un nombre a cada una de ellas. Tenemos así:

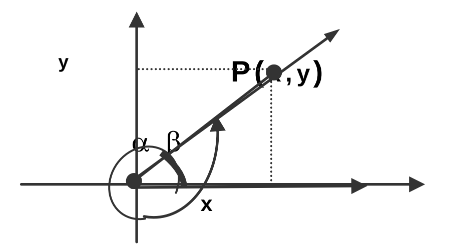
- recíproca del seno → **cosec α = r/y**
- recíproca del coseno → **sec α = r/x**
- recíproca de la tangente → **ctg α = x/y**

ⓘ Nos abocamos al estudio de las trigonométricas *básicas* ya que, conocidas la propiedades de estas, las de sus recípocas se deducen automáticamente. Por ejemplo, conocido el signo del seno y coseno, se tiene el signo de todas las demás funciones.

ⓘ En general el seno o coseno de un ángulo es un número irracional. Fácilmente podemos apreciar también que estas funcioneslaro no resultan de un número finito de *operaciones algebraicas* sobre la variable. Luego son *funciones trascendentes.*

ángulos congruentes

Dos ángulos se dicen congruentes cuando difieren un número entero de giros. Así α y β son congruentes si β = α + k giros, con k∈Z. Luego, sus medidas difieren en 2kπ (β = α + 2kπ) y el lado final de β coincide con el de α.



Así, para las funciones de ángulos congruentes, tenemos:

- **cos β** = **cos α = x** → **cos** (**α** + **2 k π**) = **cos α**
- **sen β** = **sen α = y** → **sen** (**α** + **2 k π**) = **sen α**

funciones periódicas

Son funciones cuyos valores se repiten ´cíclicamente´ o ´periódicamente´ ; o sea aquellas que, cubierto un ´ciclo´, comienzan luego a tomar los mismos valores y así continuan indefinidamente. Las funciones seno y coseno (y en consecuencia todas las demás) son funciones periódicas ya que luego de una vuelta (360º) sus valores comienzan a repetirse indefinidamente: cos (α + 360º) = cos α ; sen (α +360º)=sen α

DEFINICIÓN:

función periódica

f periódica con período no nulo T ⇔ f (x+T) = f(x) ∀ x ∈ D_f

<u>Observaciones</u> :

» si T es período entonces kT (k ∈ Z) también lo es.
  Por ejemplo: f (x + 2T) = f ((x+T) + T) = f (x+T) = f (x)

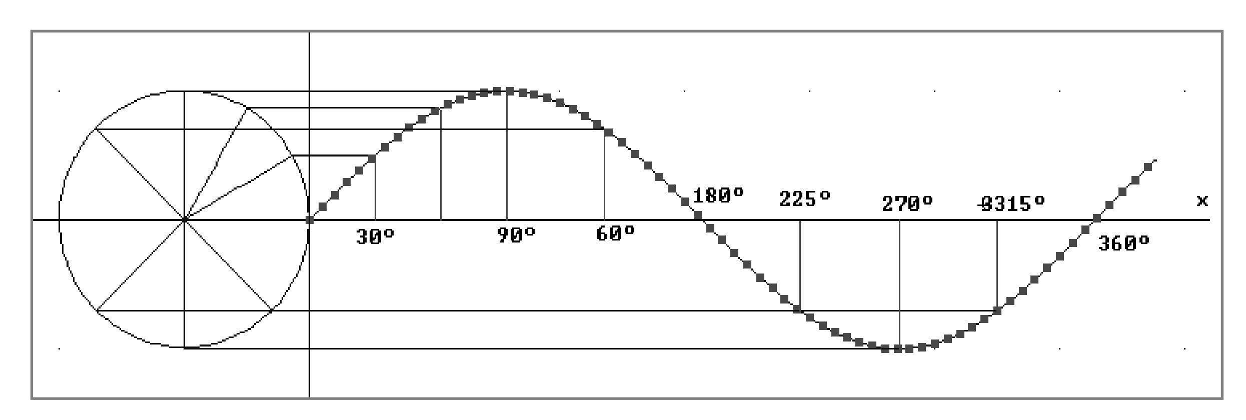
» Al menor de los períodos se lo llama <u>período de f</u>.

<u>Ejercicio</u>: demostrar que el período del seno y coseno es 2π, que el de la tangente es π. O sea; demostrar que:

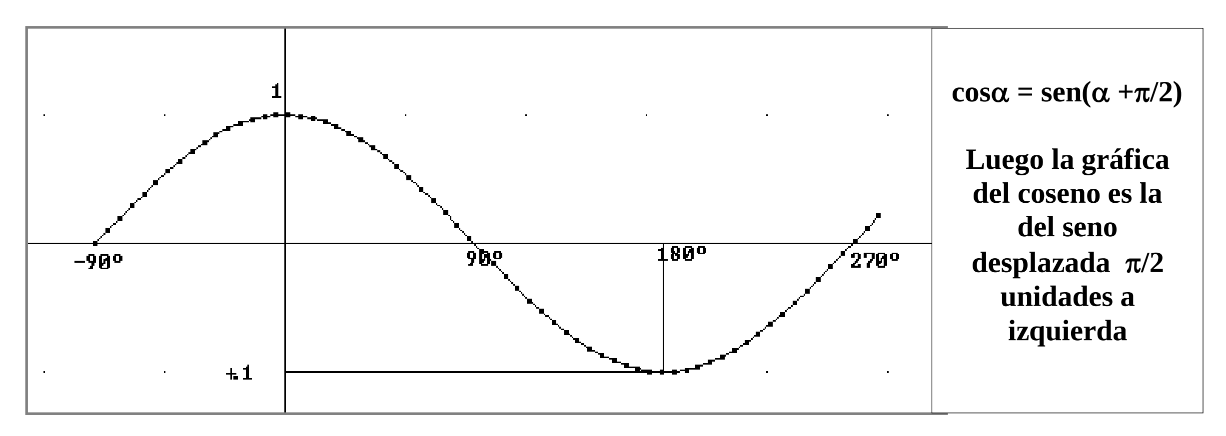
sen (α + 2 π) = sen α ; cos (α + 2 π) = cos α ; tg (α + π) = tg α

» Aplicando identidades trigonométricas tenemos que **cos α = sen (α +π/2)**; luego si conocemos la gráfica del seno, por ´transformaciones´ tenemos la del coseno.
» La gráfica del seno la obtenemos apoyándonos en la circunferencia trigonométrica.
»

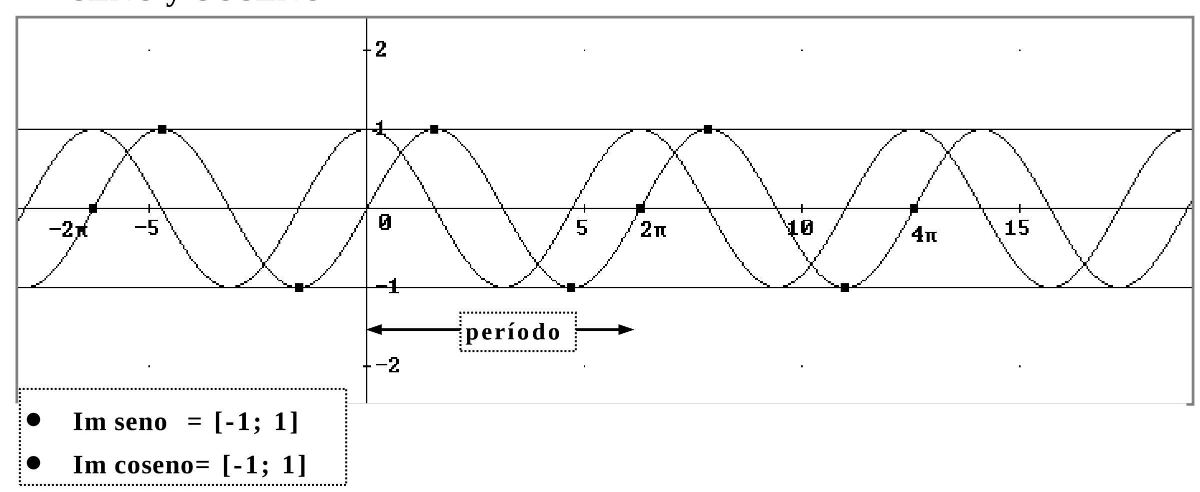
➢ **GRAFICA de la FUNCIÓN SENO** (sinusoide)



➢ **GRAFICA de la FUNCIÓN COSENO**



➢ **SENO y COSENO**

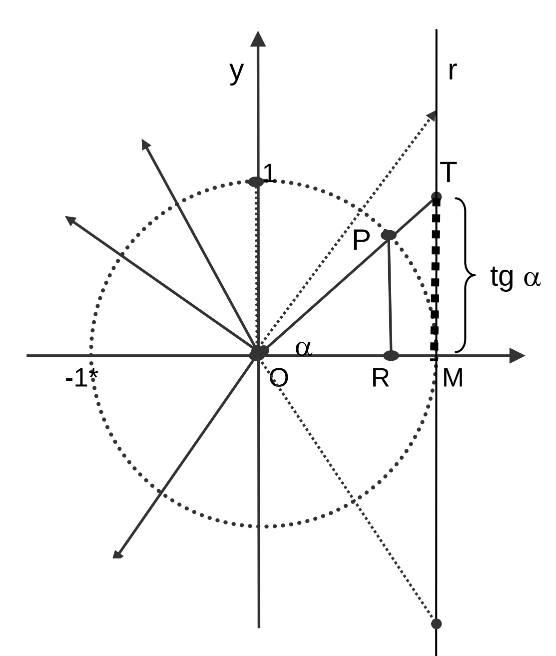


Del gráfico observamos que seno y coseno son funciones acotadas; es decir sus valores permanecen entre dos valore fijos: –1 y 1.

DEFINICIÓN

función acotada	• **f acotada superiormente en D ⇔ ∃ c∈R / f(x) ≤ c , ∀x∈D** • **f acotada inferiormente en D ⇔ ∃ d∈R / f(x) ≥ d , ∀x∈D** • **f acotada en D ⇔ ∃ c, d∈R /** d ≤ f(x) ≤ c **, ∀x∈D**

➢ **GRAFICA de la FUNCIÓN TANGENTE** : $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\text{ordenada P}}{\text{abscisa P}}$

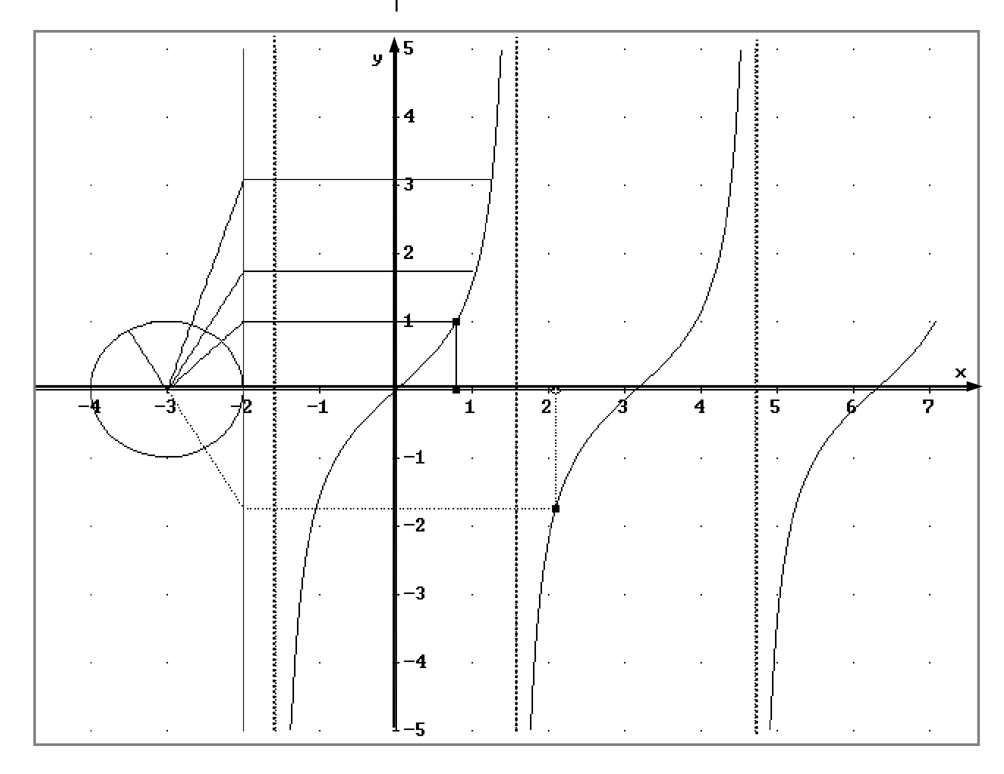


- C: circunferencia de radio 1
- P (cos α , sen α)
- Los triángulos OQP y OMT son triángulos semejantes; luego:

$$\frac{|MT|}{|OM|} = \frac{|RP|}{|OR|} \Rightarrow \frac{|MT|}{1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$|MT| = \operatorname{tg}\alpha$$

- T **(1, tg α)** ⇒ **la ´tg α´ es la** **<u>ordenada del punto T</u>, punto donde el lado final del ángulo corta a la recta r ⊥ eje x.**
- **<u>NOTA</u>: si α= 90º entonces el lado final y r no se cortan** ⇒ **<u>no existe tg</u>**



Propiedades de la tg:

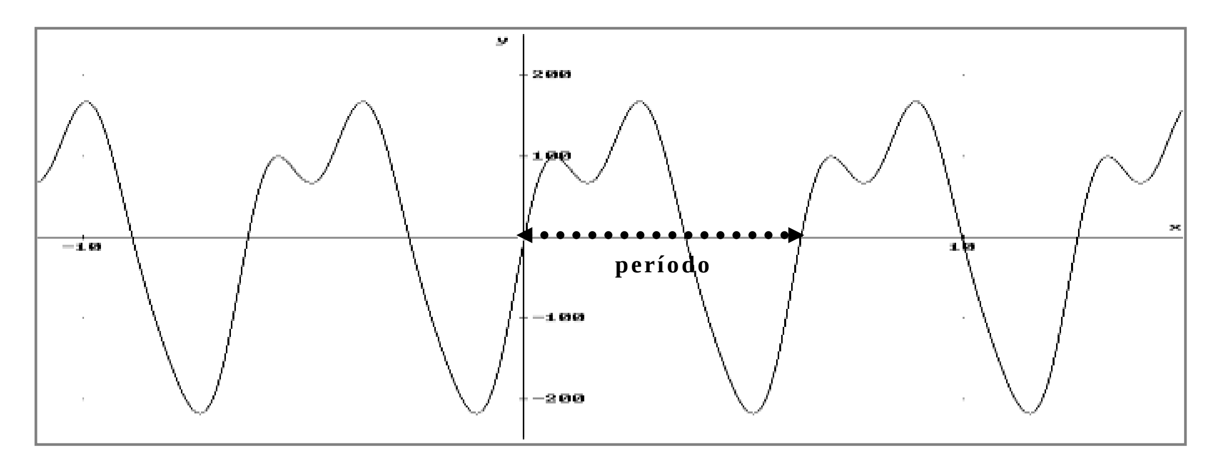
- Dominio tg = { x∈R / x ≠ (2k+1).π/2 con k∈Z }
- Imagen tg = R
- Período: p = π
- Asíntotas verticales: a_v : x = (2k+1).π/2 ; k∈Z
- Función impar.

OBSERVACIONES:

» Las funciones periódicas son el medio para estudiar gran cantidad de fenómenos naturales. Dado que la condición de perioricidad es muy ´amplia´ existe una gran variedad de funciones periódicas. Sin embargo, un célebre matemático, Joseph Fourier, demostró (¡ oh sorpresas de la matemática!) que en general toda función periódica puede ser aproximada por suma de funciones periódicas de sólo dos tipos, ¿Cuáles son estas funciones?, pues nada más ni nada menos que, ¡ seno y coseno !!.

» Dada esta particularidad (la descubierta por Fourier), las funciones trigonométricas desempeñan en la teoría de funciones avanzadas un papel tan importante como el que juegan el ´eje x´ y el ´eje y´ en la descripción de puntos del plano.

Como ejemplo de lo dicho vemos que los sonidos producidos por intrumentos musicales o la voz humana pueden ser modelizados por funciones trigonométricas. Así, el gráfico adjunto aproxima una “onda sonora” , la correspondiente al sonido producido por un violín. O sea, tenemos una grafica de “sonido contra tiempo”. Graficamente vemos que estamos ante una función periódica. ¿cuál es el período de esta función?. ¿y su ley?



Pues, sorprendentemente, la ley de esta función es una suma de senos y cosenos.
Así: $y = 151\cdot SIN(t) - 67\cdot COS(t) + 24\cdot SIN(2\cdot t) + 55\cdot COS(2\cdot t) + 27\cdot SIN(3\cdot t) + 5\cdot COS (3\cdot t)$

» El ejemplo anterior obliga a realizar ciertas reflexiones sobre el dominio de la función seno (ó coseno). En el gráfico, en el eje de las abscisas se representa tiempo, magnitud que se mide con números reales. Por otro lado, las funciones trigonométricas las hemos definido para ángulos; o sea, la pregunta aquí es: ¿tiene sentido aplicar funciones trigonométricas a números reales?. Justamente para resolver este problema es que, para medir ángulos, se inventa el sistema circular ó radian. Este sistema (adimensional) establece una correspondencia uno a uno entre ángulos medidos en grados y números reales (a través de la correspondencia básica $360º \leftrightarrow 2\pi$). De esta manera si usamos el sistema radian las funciones trigonométricas resultan aplicadas a números reales y, entonces, el ángulo (que en tal caso es igual a la longitud del arco subtendido) puede representar tiempo; particularmente, el tiempo que tarda una partícular en recorrer ese arco. No sería correcto, por ejemplo, hablar de 30º de tiempo, si se puede hablar de $\pi/6$ segundos.

» En función de todos los considerandos hechos y para abarcar todos lo casos posibles, a partir de ahora trabajaremos siempre con los ángulos medidos en radianes; es decir, con números reales. O sea que; dominio natural de la función seno y coseno: R

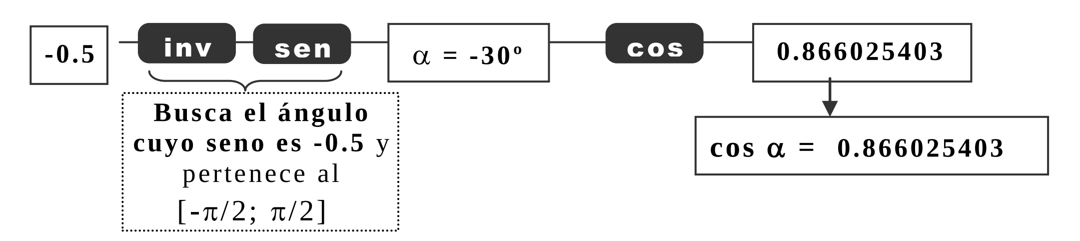
1.5.9 Funciones Trigonométricas Inversas

FUNCIÓN	Biyec.	INVERSA
• Seno; D = R ; C = Im (seno)	NO	• no existe
• Seno; D = [-π/2 ; π/2]; C=[-1; 1]	SI	• existe g inversa de f
f: [-π/2 ; π/2] → [-1; 1] x → y arc sen x sen x		g: [-1; 1] → [-π/2 ; π/2] y → x • **ley:** **g(y) = x ⇔ sen x = y ∧ x∈[-π/2; π/2]** **(g(1/2)= x ⇔ sen x =1/2 ⇒ x =π/6)** • **no se puede obtener una fórmula para g; tenemos una *nueva función*** • **Nombre: ARCO SENO ó sen^{-1}** - **Dominio = [-1; 1]** - **Imagen = [-π/2 ; π/2]** - **Ley:** **arc sen y= x ⇔ senx =y ∧ x∈[-π/2; π/2]** • **Cambiamos el nombre a las variables** **arcsen x = y ⇔ seny = x ∧ y∈[-π/2; π/2]** • **Graficamos.**
• Coseno; D=R ; C=Im (coseno)	NO	• no existe
• Coseno; D=[0 ; π]; C= [-1; 1]	SI	• existe g inversa de f
f: [0 ; π] → [-1; 1] x → y		g: [-1; 1] →[0 ; π] y → x g= ARCO COSENO ó cos^{-1}

- no se puede obtener una fórmula para g; estamos ante una *nueva función*.
  - Dominio = [-1; 1]
  - Imagen = [0; π]
  - Ley: arc cos $y = x \Leftrightarrow \cos x = y \wedge x \in [0; \pi]$

Ejercicio: hallar una región donde la función tangente sea biyectiva y definir la inversa de la tangente: *arco tg* ó tg^{-1}

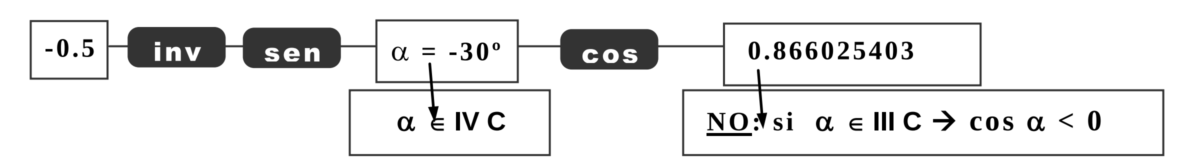
Ejemplo : Sabiendo que sen $\alpha = -\frac{1}{2}$; hallar "cos α"
Acudimos a la calculadora y a la inversa del seno para obtener " α " .



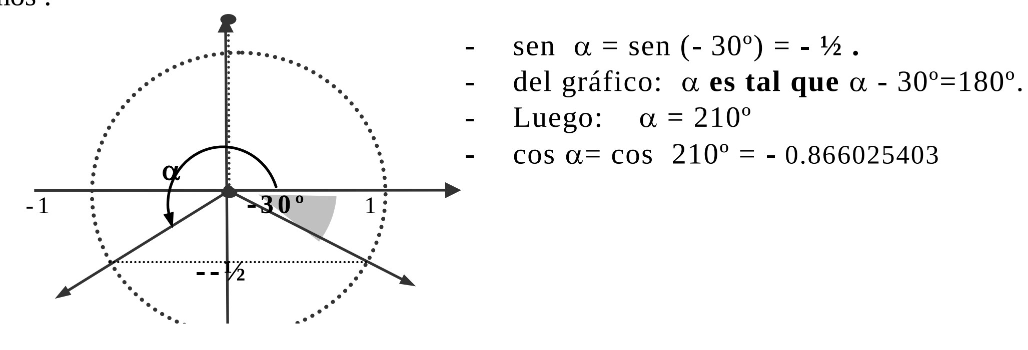
Ejemplo : Sabiendo que sen $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $180^o < \alpha < 270^o$, hallar "cos α" .

Si para resolver este problema acudimos a la calculadora y procedemos a trabajar con ella ´en forma mecánica´, lo más probable es que lleguemos al mismo resultado que en el ejemplo anterior, (incorrecto ya que para $\alpha \in$ IIIC, $\cos \alpha < 0$). Si tuviéramos el hábito de reflexionar sobre los resultados, esto no sería problema ya que nos daríamos cuenta del error, pero, esto, en general no es así. Lo más frecuente es informar el resultado, apenas obtenido, sin reflexionar sobre las características del mismo, si las cumple o no.

¿Cómo debemos proceder para obtener la respuesta correcta?:
- primero, tener claro que la calculadora procede internamente acorde a un programa, así, al apretar las teclas ´inv sen´, ella busca el ángulo del I ó IV cuadrante cuyo seno sea $-\frac{1}{2}$; o sea, no puede buscar , por sí, el ángulo del III C cuyo seno sea $-\frac{1}{2}$. ; no se la programó para esto.



- luego, debemos planificar una pequeña estrategia para encontrar el ángulo deseado. Para ello acudimos a nuestros conocimientos teóricos, hacemos un gráfico muy simple para orientarnos y concluimos :



- sen α = sen (- 30º) = **- ½ .**
- del gráfico: α **es tal que** α - 30º=180º.
- Luego: α = 210º
- cos α= cos 210º = - 0.866025403

1.6 Modelos Matemáticos. Ajuste de Curvas

- Un **modelo matemático** es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o de una ecuación) de un fenómeno del mundo real. La finalidad del modelo es comprender el fenómeno y, en lo posible, usarlo para hacer predicciones a futuro acerca de los hechos que el mismo comprende. Es importante tener en cuenta que un modelo matemático nunca va a resultar una representación exacta del fenómeno que modeliza; que es una *idealización* del mismo. Generalmente, para que el modelo sea matemáticamente resoluble los datos de la realidad se someten a ciertas simplificaciones. Es importante tener en cuenta esto, particularmente para saber hasta que punto o instancia el modelo es útil; cuales son sus limitaciones.

En el párrafo 1 hemos visto algunos ejemplos sencillos de ´modelización´. Si repasamos estos ejemplos vemos que siempre y como primer paso procedemos a identificar las variables que intervienen en el problema, el carácter de las mismas (dependiente o independiente). Luego, acudiendo a nuestros conocimientos de la situación en sí misma y a nuestros conocimiento matemáticos tratamos de hallar una ecuación que relacione las variables. Si esto se logra el tipo de función que ligue las variables nos dará mucha y muy rica información acerca del tipo de dependencia entre ellas .

- No siempre tendremos una ley (física u otra) que permita llegar a la formulación del modelo a través de una sucesión de pasos algebraicos; o sea, no siempre resultará posible obtener *´directamente´* la expresión algebraica de la función modeladora. Se acude entonces al **modelo empírico**, modelo esencialmente sustentado en **datos** que se reúnen a través de una o más observaciones o repeticiones experimentales del fenómeno en estudio.

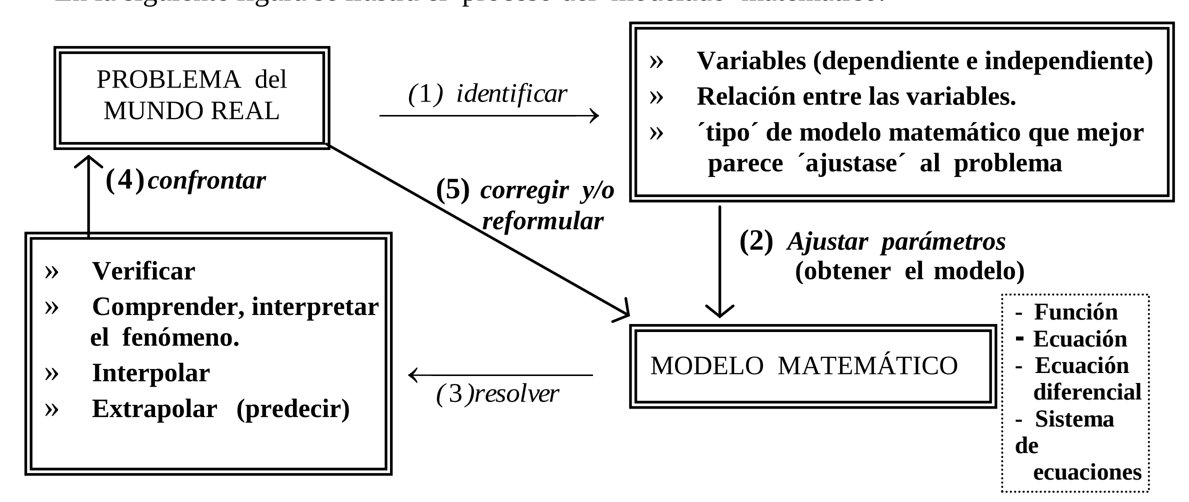
En este caso, una vez reunidos los datos se analizan los mismos en búsqueda de un **patrón de comportamiento.** Para ello resulta importante la **forma disponer los datos**, ya que existen disposiciones que facilitan la búsqueda al poner al descubierto propiedades de la función modeladora o hacerlas más fácilmente apreciables.

» En una primera instancia se procede entonces a la tabulación de los datos; o sea, a la representación de la función en *forma numérica*.

» Si de la ´tabla de valores´ podemos pasar a la *representación gráfica*, las probabilidades de hallar patrones de comportamiento crecen en forma importante ya que gran cantidad de propiedades pueden ser leídas directamente de un gráfico. Además, en muchos casos la misma gráfica *´sugiere´* la ecuación adecuada; más aún, existen métodos perfectamente probados que, para cierto tipo de curvas, permiten obtener la ecuación que mejor la ´ajusta´ ; o sea la que mejor captura la tendencia básica de los puntos datos.

» Si de la representación gráfica podemos obtener la *representación algebraica* estamos sin dudas en condiciones óptimas de estudiar el fenómeno, incluso estaremos también en condiciones de hacer interpolaciones y/o extrapolaciones .

- En la siguiente figura se ilustra el proceso del modelado matemático.

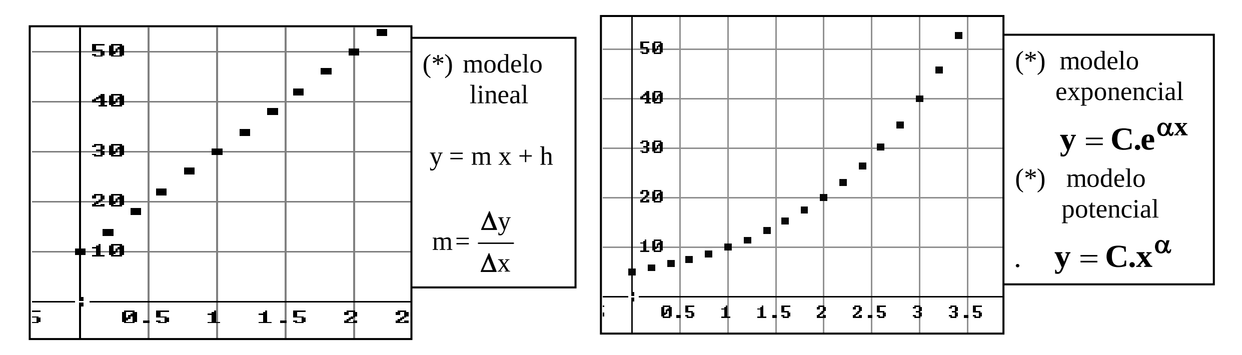


(1) *Identificar el tipo de modelo*: uno de los pasos más difíciles en el proceso de modelización, el que en general más requiere del trabajo interdisciplinario.

En este paso, a los efectos de establecer alguna hipótesis acerca del tipo de relación que liga las variables normalmente debemos acudir tanto a conocimientos matemáticos, como a conocimientos y habilidades de orden más general. Además, y como ya dijimos, el análisis de los datos del problema puede hacerse de distintas maneras, unas más convenientes que otras, según los datos; luego, en esta instancia también debemos decidir esta cuestión.

(2) *Ajustar parámetros*: en este caso la representación gráfica puede resultar de gran utilidad , ´sugerir´ cual puede ser la fórmula adecuada para la función que se busca.

Los siguiente ejemplos son gráficos obtenidos a partir del registro de ´datos´ (observados o experimentales) y las funciones que les pueden corresponder:



Análisis

Normalmente, al observar un fenómeno, resulta fácil ver si el mismo responde a un proceso de ´crecimiento´ ó ´decrecimiento´ (por lo menos en un intervalo de tiempo). Luego, y en tal caso, una de las cuestiones más importantes a determinar es la *´velocidad´* a la que el proceso se desarrolla; particularmente, si esta es constante o no.

Esta cuestión, ***matemáticamente***, se resuelve a través del estudio de ***la razón de cambio*** ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$).

Aquí se pueden presentar dos situaciones:

(I) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathbf{k}$ $\Rightarrow$ f es una función lineal con pendiente ´k´ ; o sea : **f(x) = k x + h**

(II) $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \mathbf{cte}$ $\Rightarrow$ f , función ´no´ lineal. → **(*) En este caso procedemos a buscar f a través de proponer una función y analizar luego si la misma se ´ajusta´ o no a la gráfica** .

(*) ¿Cómo elegimos la función de ´ajuste´ ?: normalmente para elegir la función de ´ajuste´ basta con acudir a las funciones tipo que hemos estudiado en este capítulo (exponenciales, potenciales, recíprocas, ..). Vemos aquí dos casos:

Si sospechamos que la función que mejor ajusta es una **exponencial** o una **potencial**:

≈ proponemos: $\mathbf{y = C.e^{\alpha.x}}$ ó $\mathbf{y = C.\, x^{\alpha}}$ (según corresponda).

≈ *rectificamos*(*) la curva a los efectos de determinar los parámetros C y α;

≈ reemplazamos los parámetros hallados en la función propuesta y la graficamos;

≈ confrontamos ambos gráficos (experimental y analítico) y decidimos.

(*) La forma de ´rectificar la curva´ depende del tipo de función; pues:

a) *´una función es exponencial si y sólo si el gráfico de ln y versus x , es una recta´.*

b) *´una función es potencial si y sólo si el gráfico de ln y versus ln x , es una recta´.*

a) $$y = C e^{\alpha x} \xrightarrow{\text{aplicamos ln}} \ln y = \ln C + \alpha x \xrightarrow{\text{hacemos } Y=\ln y} Y = \underbrace{\ln C}_{h} + \underbrace{\alpha}_{m}.x$$

$\alpha = m$ (pendiente) $\Rightarrow$ $$\alpha = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

$\ln C = h$ (ordenada al origen) $\Rightarrow$ $C = e^{h}$ (h se lee del gráfico x-Y)

b) $$y = C x^{\alpha} \xrightarrow{\text{aplicamos ln}} \ln y = \ln C + \alpha \ln x \underset{\ln x = X}{\overset{\ln y = Y}{\to\to\to}} Y = \underbrace{\ln C}_{h} + \underbrace{\alpha}_{m}.X$$

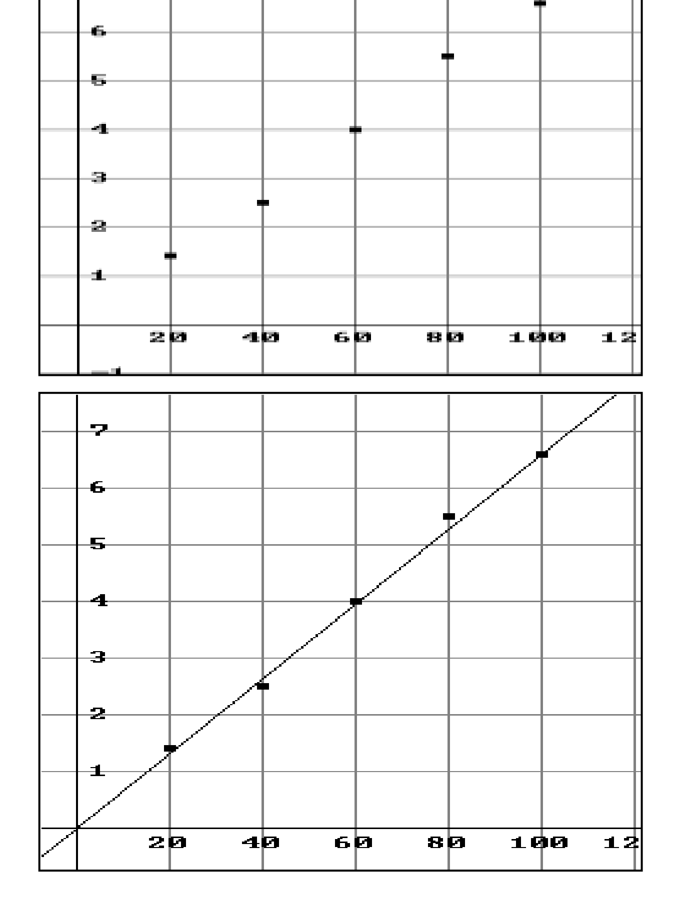
Luego: $\alpha = m$ (pendiente) $\Rightarrow$ $$\alpha = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$$

$\ln C = h$ (ordenada al origen) $\Rightarrow$ $C = e^{h}$ (h se lee del gráfico x-Y)

EJEMPLO 1:

En la pág. 2 vimos la Ley de Hooke, la cual en su forma última dice que la fuerza F necesaria para estirar (comprimir) un resorte es proporcional a la variación de longitud (*d*) que experimenta el resorte; o sea: F= k *d* , donde k es la medida de la resistencia del resorte a la deformación (*constante elástica).* Esta constante es propia del resorte y su determinación se puede hacer en forma experimental. Para ello dado un resorte se registran en una tabla los estiramientos *d* (en cm.) sufridos por el mismo cuando se le aplican distintas fuerzas F (en kilogramos fuerza).

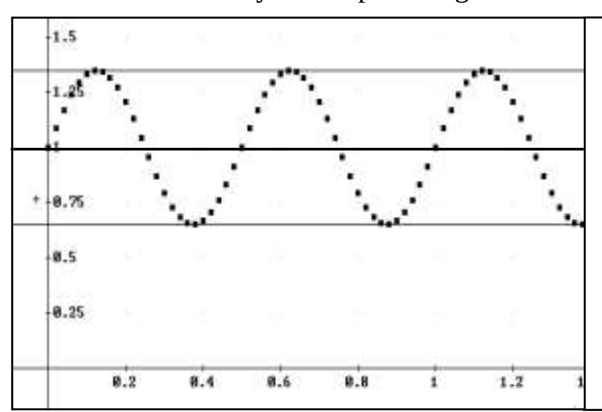
» F	20	40	60	80	100
d	1.4	2.5	4.0	5.3	6.6



- **Los puntos datos parecen estar sobre una recta; luego, lo natural es proponer un modelo lineal. (función lineal).**
- **Los puntos no están exactamente alineados; luego, debemos buscar la recta que mejor los ´ajuste´ Existen varios métodos para determinar tal recta.**
- **Un método: tomar la recta que pase por el primer y último punto dato.**
- **Así tenemos: F = 0.065 *d* + 0.1**
- **Observamos que si bien la recta hallada ajusta bastante bien los datos, esta no describe una relación de directa proporcionalidad como requiere la Ley de Hooke (t.i.≠ 0). Luego intentamos ajustar nuevamente recordando que el origen también es un punto dato (trivial): o sea, *tomamos el origen como primer punto***
- **Así tenemos: F = 0.066 *d***
- **Esta recta, además de contemplar la directa proporcionalidad, también ajusta muy bien, prácticamente se superpone con la otra; luego, la**

NOTA: Otro método para determinar la recta que mejor ajusta es un procedimiento conocido con el nombre de regresión lineal. Este método proporciona la recta para la cual la *distancia* entre cada punto experimental y el correspondiente de la recta de ajuste *sería mínima*; o sea, la recta para la cual se minimiza el *error* . La recta así obtenida se llama recta de regresión.
El método para hallar los coeficientes de esta recta se llama método de mínimos cuadrados e involucra complicadas fórmulas para la pendiente y la ordenada al origen las cuales se obtienen con la ayuda del Cálculo para Dos Variables. Existen numerosos dispositivos que poseen paquetes estadísticos que calculan los coeficientes y dan la recta de regresión.

EJEMPLO 2:
Un detector registra el movimiento oscilatorio de un peso suspendido de un resorte. Tal registro, que se hace en forma gráfica , muestra el desplazamiento (x) del peso respecto a la posición de equilibrio según el tiempo (t) transcurrido desde que comienza a oscilar. El desplazamiento se mide en centímetros y el tiempo en segundos.



- Del gráfico deducimos sin ninguna dificultad que la función que ajuste los puntos dato tiene que ser periódica, luego, un seno ó coseno. Además, que está *subida uno*. Luego la ley de la función sería de la forma: $x = A \text{ sen } (wt) + 1$
- Leemos amplitud y período del gráfico:
  Amplitud: 0.35
  Período : 0.5 $\Rightarrow$ $w = 2\pi / 0.5 = 4\pi$
- Finalmente: $x = 0.35 \text{ sen } (4\pi t) + 1$, sería un modelo matemático adecuado a este caso.

EJEMPLO 3:
Estudiando el crecimiento de un potrillo que al comienzo de las observaciones pesaba 50 kg. un biólogo observa que al cabo de un mes el animal pesa 60 kg.; es decir, que su peso ha aumentado un 20% respecto al de partida. Un mes más tarde vuelve a observar lo mismo, ya que ahora pesa 72 kg, Si el proceso siguiese de esta manera, o sea aumentando cada mes un 20 % respecto del peso del mes anterior; ¿es posible deducir una ley que lo modele?.

» Comenzamos por identificar variables y darles nombre. Así el peso del potrillo es la variable dependiente y, el tiempo, la independiente:
  P_o = peso inicial (50 kg),
  P_1 = peso al cabo del primer mes (60 kg),
  P_2 = peso al cabo del segundo mes (72 kg),....................
» Tratamos de hallar cierta regularidad o comportamiento cuantificable; para ello reescribimos los datos *sin efectuar las operaciones* para, de esta forma, ver si detectamos algún patrón de comportamiento.

$$P_1 = P_o + 20\,\%\,P_o = P_0\left(1 + \frac{20}{100}\right)$$

$$P_2 = P_1 + 20\,\%\,P_1 = P_1\left(1 + \frac{20}{100}\right) = P_0\left(1 + \frac{20}{100}\right).\left(1 + \frac{20}{100}\right) = P_0\left(1+\frac{20}{100}\right)^2$$

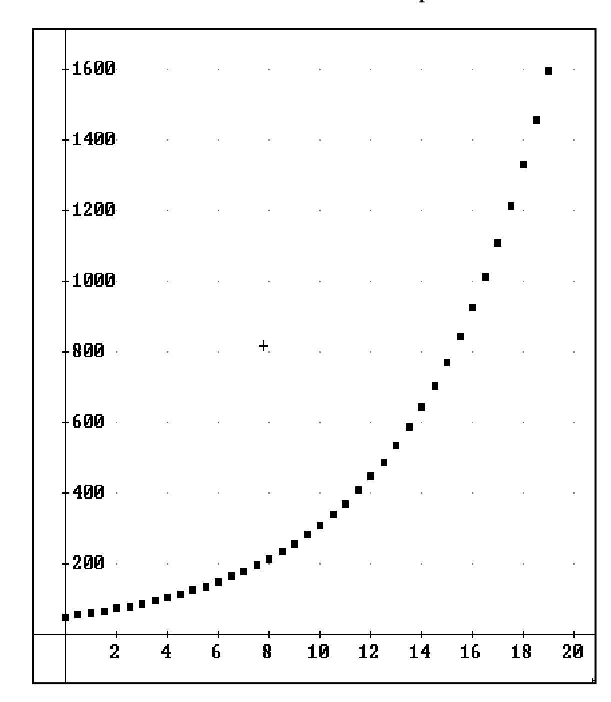
$$P_3 = P_2 + 20\,\%\,P_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = P_0\left(1+\frac{20}{100}\right)^3$$

....

$$P_n = P_{n-1} + 20\,\%\,P_{n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = P_0\left(1+\frac{20}{100}\right)^n$$

» Conclusión : $\mathbf{P_n = P_0\,(1.2)^n}$ (n: enésimo mes) → modelo exponencial

» Confrontamos el modelo exponencial obtenido con lo que pasa en la realidad:



1º) el crecimiento de un animal no es a "a saltos" sino en forma continua, por lo que, en lugar de la expresión obtenida resulta más razonable escribir el peso del animal en el tiempo "t":

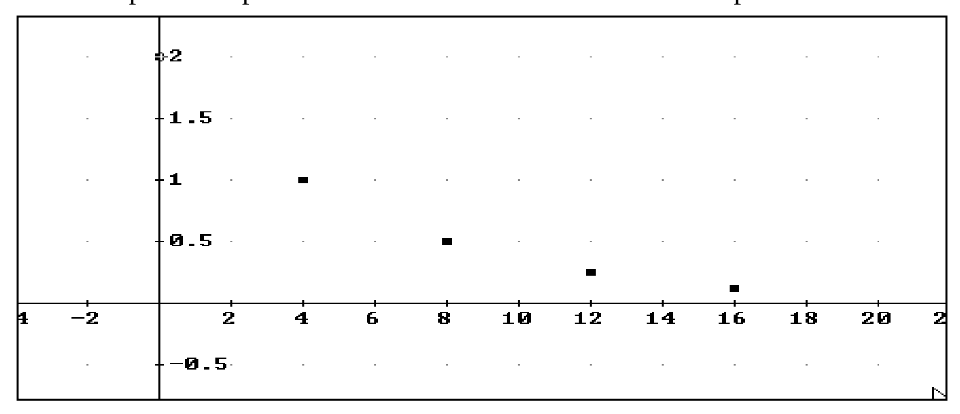
$P = 50 \cdot (1.2)^t$; con t real positivo ó cero.

2º) que el peso del animal aumente en un 20 % cada mes puede ser una aproximación razonable a lo real durante los primeros meses. Obviamente deja de tener sentido transcurridos estos. (si no fuera así a los 3 años (36 meses) pesaría más de 35000 Kg. y, ¿alguna vez vieron caballo semejante?).
Aquí tenemos dos opciones: buscar el dominio natural de la función (o sea, establecer claramente el intervalo de tiempo para el cual la fórmula hallada tiene validez) o, directamente buscar *otra ley*, válida aún para cuando el animal alcanza su peso adulto.

EJEMPLO 4:
Para determinar la vida media del paladio 100 , ^{100}P , se registran datos acerca de su descomposición en el tiempo. La muestra observada tiene un peso inicial de 2 gramos.
La tabla siguiente contiene los valores medidos a intervalos de cuatro días.

» T	0	4	8	12	16
m	2.000	1.000	0.500	0.250	0. 125

» Graficamos los puntos experimentales a los efectos de deducir el tipo de curva.



- Los puntos datos parecen estar sobre una exponencial con base menor que uno, luego resulta natural pensar que los mismos responden a un modelo exponencial.
- Podemos proceder como en el ejemplo anterior o aplicar lo visto en pag. 84.

Vemos aquí que es lo que se obtiene en cada caso:

- <u>1er método</u>: reconocemos que, cada 4 días, la masa se reduce a la mitad. Así, como en el ejemplo anterior, planteamos:

$t = 0 \rightarrow \quad m_o = 2$

$t = 4 \rightarrow \quad m_4 = \frac{1}{2} . \, m_o$

$t = 8 \rightarrow \quad m_8 = \frac{1}{2} m_4 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \, m_o = \frac{1}{2^2} m_o$

$t = 12 \rightarrow \quad m_{12} = \frac{1}{2} \, m_8 = \ldots\ldots = \frac{1}{2^3} m_o$

$t = 4n \rightarrow \quad m_{t=} \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2^{\mathbf{n}}} . \, m_o$

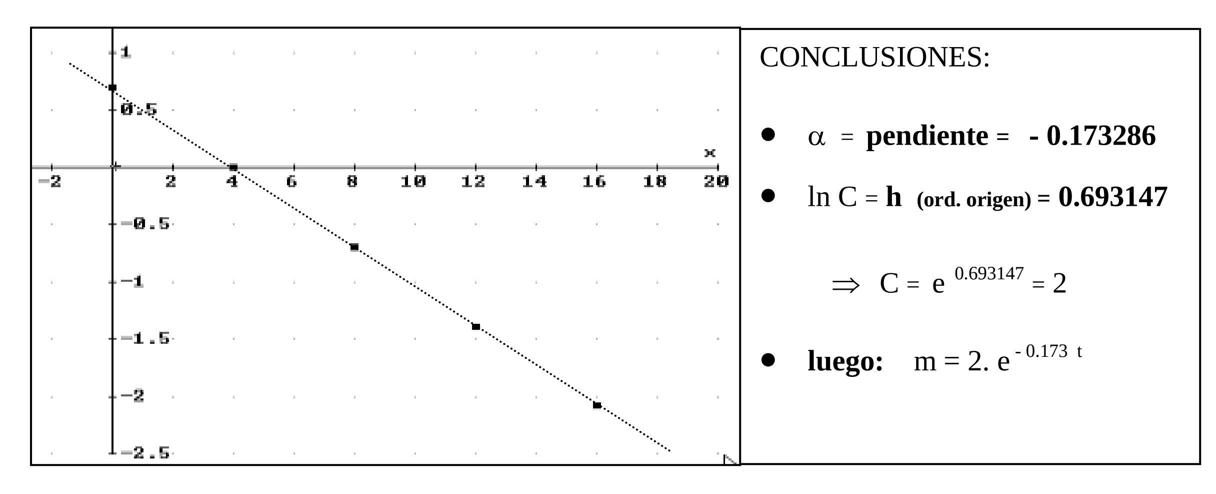
$t \rightarrow \quad m_{t=} \frac{1}{2^{\mathbf{t/4}}} . m_o = 2. \; 2^{-t/4}$

- <u>2do método</u> : proponemos, con coeficientes indeterminados, la función tipo a la cual creemos que responden los puntos datos. Procedemos a ´rectificar´ la curva según lo indicado en pag. 95.
- Proponemos: $m = C \, e^{\alpha t}$
- Calculamos $M = \ln m$, para cada ´m´ de la tabla.
- Graficamos los nuevos puntos (t ; M); y verificamos si los mismos se disponen o no, según una recta.
- Si lo hacen, a partir de allí obtenemos los coeficientes intederminados, C y α
- Vemos en detalle este proceso, el *método del cambio de escala* (*)

(*) Calculamos M= ln m, para cada uno de los datos de la tabla y graficamos M versus t .

» ***t***	***0***	***4***	***8***	***12***	***16***
m	2.000	1.000	0.500	0.250	0. 125
M= ln m	**0.693**	**0**	**- 0.693**	**-1.386**	**-2.079**

Graficamos M versus t ; vemos que los puntos se disponen efectivamente sobre una recta. Calculamos la ecuación de la recta y obtenemos y = 0.693147 - 0.173286· t



CONCLUSIONES:

- α = **pendiente = - 0.173286**
- ln C = **h** **(ord. origen) = 0.693147**

  $\Rightarrow \; C = e^{0.693147} = 2$

- **luego:** $m = 2. \, e^{-0.173 \, t}$

- <u>*Observación*</u>: en general, las funciones obtenidas con distintos métodos son distintas. En este caso resulta interesante observar que las fórmulas obtenida con ambos métodos corresponde a una misma función, aún cuando por su escritura pareciera que fueran funciones distintas.

→ ***2do método:*** $\mathbf{m = 2. \; e^{-0.173 \; t}}$

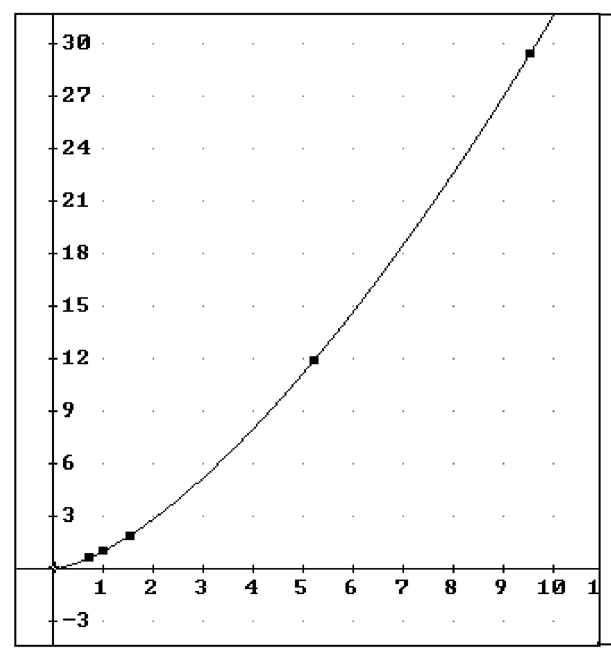
→ ***1er método:*** $\mathbf{m} = 2. \; 2^{-t/4} = 2. \, e^{\ln 2^{-t/4}} = 2.e^{(-t/4).\ln 2} = 2. \; e^{-0.173 \; t}$

EJEMPLO 5:

En la siguiente tabla se muestra la distancia (d) de los planetas al Sol (tomando como unidad la distancia de la tierra al sol) y sus períodos T (tiempo de revolución alrededor del sol en años terrestres).

» Planeta	**Venus**	**Tierra**	**Marte**	**Júpiter**	**Saturno**
d	**0.723**	**1.000**	**1.523**	**5.203**	**9.541**
T	0.615	1.000	1.881	11.861	29.457

Graficamos los puntos datos para descubrir el comportamiento tendencial de los mismos; o sea, que relación existe entre *d* y T .



- **Si bien los puntos parecen disponerse según una exponencial, si se procede como el caso anterior y se grafica ln T versus *d* se observa que no ´rectifican´. Luego, una exponencial no es un buen modelo para este problema.**
- **Si se grafica lnT versus ln *d* si se se observa que los puntos ´rectifican´.**
  Luego, proponemos: $T = C\,d^{\alpha}$
- **Calculamos *ln T* y *ln d*, para cada *´T´* y *´d´* de la tabla.**
- **Graficamos los nuevos puntos (*ln d* ; *ln T*); y verificamos que los mismos se disponen según una recta. Hallamos la ecuación de esta recta.**
- **obtenemos los coeficientes intederminados:**
  $C = 1$ y $\alpha = 3/2$

Observación:

La tercera ley de Kepler del movimiento planetario afirma:
´el cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia al sol´
El modelo hallado: ¿cumple esto?.

1.7 Ejercicios

1.- Indicar cuál de las siguientes tablas define una función de **A** = {1 ,2, 3 } en **B**= **N .**
Si define función indicar dominio, codominio e imagen de la misma **.**
Si no lo hace, analizar si modificando algún dato la nueva tabla define función**.**

TABLA 1	x	1	2	3
	y	2	5	10

TABLA 2	x	1	2	3
	y	1	2	3

TABLA 3	x	1	2	3
	y	2	2	2

TABLA 4	x	1	2	2	3
	y	2	3	4	5

TABLA 5	x	1	2	3
	y	1	1.5	2

TABLA 6	x	0	1	2	3
	y	2	5	8	10

2.- Dados los siguientes conjuntos **A** ={libros de una biblioteca } ; **B= N** , se pide:

- dar, *verbalmente*, tres funciones de **A** en **B .**
- dar, como quiera ó pueda, una función de **B** en **A.**
- decidir si la siguiente expresión describe una función de **A** en **B .**
  " a cada libro se le asigna los divisores del número de su última hoja".

3.- Sea **f** una función cuyo dominio son los cinco primeros números naturales y su ley es $f(x) = 2x - 4$. Ilustrar **f** mediante una tabla de valores, un gráfico y un diagrama de correspondencia.

4.- Sea **p**: $X \rightarrow X$, con X ={ 1,2,3,4,5} y la ley de **p** indicada por la tabla:

TABLA	x	1	2	3	4	5
	p(x)	2	3	4	5	1

(**p** se llama permutación y como su nombre lo indica, permuta el orden en un conjunto de números.)

Se pide:

- dar la ley de **f** por una tabla si $f(x) = p(p(x))$; $\forall x \in X$. (**f** aplica **p**, *dos veces*)
- idem, si $f(x) = p(p(p(x)))$; $\forall x \in X$ (**f** aplica **p**, *tres veces*)
- ¿ cuántas veces debe **f** aplicar **p**, para que la función resultante sea la **identidad** ?.

5.- La TABLA adjunta define $y = f(x)$.

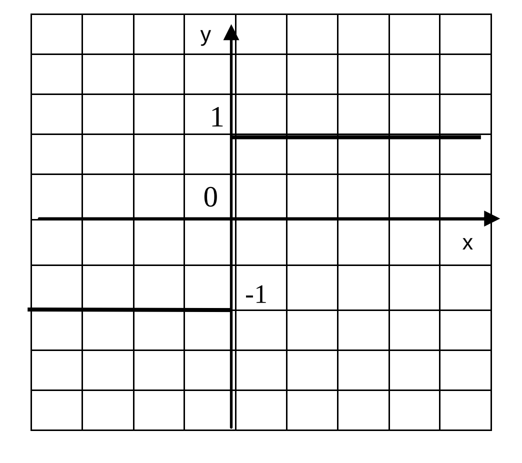
x		¼	½	1	2	3	4		-1/4	-1/2	-1	-2	-3	-4
f(x)		4	2	1	½	1/3	¼		-4	-2	-1	-1/2	-1/3	-1/4

(a) realizar el gráfico de esta función.
(b) Si $h(x) = x.f(x)$. Ilustrar h mediante una tabla de valores.
(c) Obtener una fórmula para la ley de f. Discutir si esta fórmula define la misma **función** que la tabla.

6.- El gráfico adjunto es el gráfico de la función signo "SG".

(a) Dar la LEY de la función "SG" a través de una (o más) fórmulas.
(b) Calcular
SG(3.5) ; SG(ln 0.1) ; SG(3.1416-π);
SG(a^2+1) ; SG(-a^2-1) ; SG(ln 1);
SG(3.1415- π) ; SG(| 3.1415 - π |).

(c) Indicar V ó F. Justificar la repuesta.
SG (a.b) = SG(a) . SG(b)
SG (a+b) = SG(a) + SG(b)
SG (2a) = 2 SG (a)
SG (-a) = - SG (a) .



7.- ¿ Qué *función* tiene por gráfica la parte de la circunferencia que está por encima del eje x ? ; ¿ y la que está en el primer cuadrante?.

8.- En cada uno de los siguientes casos dar una *fórmula para la función* descripta e indicar el *dominio natural* de la misma:

a) Un rectángulo tiene un área de 10 m^2. Expresar el perímetro en función de la longitud de uno de sus lados.
b) Un cajón rectangular abierto con un volumen de 2 m^3, tiene base cuadrada. Expresar el área superficial del cajón como función de la longitud del lado de la base.
c) Los lados iguales de un triángulo isósceles tienen 2m. de longitud. Expresar el área del triángulo en función de la longitud de la base.
d) Un rectángulo está inscripto en una semicircunferencia de 1 m de lado, con una de sus bases sobre el diámetro. Expresar el área del rectángulo en función de su base.

9.- Expresar cada afirmación con una fórmula:

a) P es directamente proporcional a t. Además si P= 4 entonces t =10 .
b) La distancia “d” recorrida por un móvil que viaja a velocidad constante es directamente proporcional al tiempo transcurrido “t” y a las 2 hs. había recorrido 250 km.

10.- La presión del agua bajo la superficie del mar es directamente proporcional a la profundidad. Llamamos ´x´ a la profundidad medida en metros y ´p´ a la presión medida en atmósferas.

a) Sabiendo que a 97 ms. de profundidad la presión es de 10.21 atmósferas, expresar **p** en función de **x** .
b) Hallar la presión a 50 m. ; 100 m. ; 200 m.
c) Un cuerpo sumergido soporta una presión de 8,4 atmósfera: ¿a qué profundidad está ?

11.- Si la temperatura de un gas encerrado en un recipiente permanece constante , la presión P del mismo es inversamente proporcional al volumen V . Se sabe que la presión de un gas en un globo esférico de 9 cm. de radio es 10 ls./cm^2:
(Vol. Esfera = $4/3\ \pi\ r^3$)

a) Hallar la expresión que permite calcular P en función de V.
b) Hallar la expresión que permite calcular P en función de r.
c) Si el radio del globo aumenta 12 cm, hallar P con la fórmula que más convenga.

12.- a) La variable ´x´ es inversamente proporcional a ´y´ ; ´y´ es directamente proporcional a ´z´ , la que a su vez es directamente proporcional a ´u´ . ¿ Qué relación existe entre ´x´ y ´u´ ?.

b) Durante una electrólisis, la cantidad de sustancia que se desprende en el electrodo es directamente proporcional a la conductividad del electrolito, esta última a su vez es proporcional a la concentración del electrolito. Dada cierta cantidad de sustancia , la concentración es inversamente proporcional al volumen del solvente. ¿Qué dependencia existe entre la cantidad de sustancia desprendida en el electrodo y el volumen de solvente?.

13.- Sea **f** la función definida como sigue:

"f(x) = edad en años de una persona cuya edad en meses es x "

Indicar Dn, Im f y gráfico f.

14.- La TABLA adjunta corresponde al registro de la temperatura (T) de un cuerpo de metal según el tiempo (t) transcurrido desde el inicio de una experiencia.

t (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T (ºC)	60	70	80	60	50	40	35	40	50	60	70	80	70	70	70

» La TABLA : ¿define T= f(t)?. Si así fuera, indicar: D_{nf} , C_{nf} e Im f .
» Responder las preguntas que se indican a continuación:
- ¿cual habría sido la temperatura máxima alcanzada por el cuerpo ?;
- ¿ en que tiempo(s) la habría alcanzado ?.
- ¿ cual la temperatura mínima ? ; ¿cuando la habría alcanzado ?.
- ¿ en qué intervalo de tiempo la temperatura parece estar "disminuyendo"?´. ¿ y permanecer constante?
- ¿ por qué las preguntas están hechas en potencial ?

15.- El siguiente diagrama de máquina corresponde a la función **f** . Expresar la ley de la misma a través de una fórmula. Indicar luego, dominio natural de **f**
.

✶ → **2** [✶] **+ 8** ⇒ **f (✶**) = ...

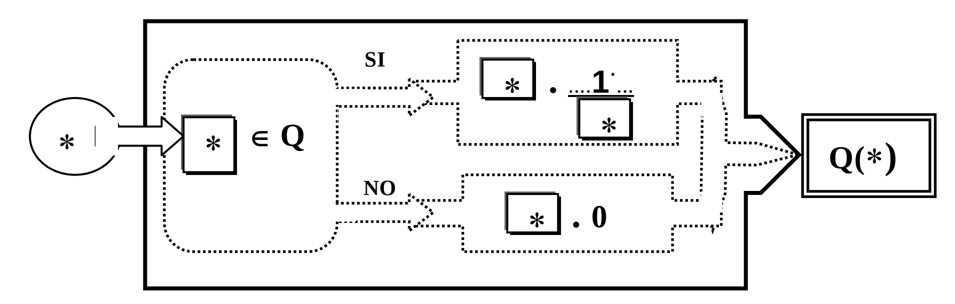
a) *Calcular*: f(2); f ($\sqrt{\mathbf{2}}$); f ($\sqrt{\mathbf{2}}$ -5); f (log 1); f (log 10^2); f ($\sqrt{\mathbf{-16}}$); f (30º); f (π/6); f (cos 2).

b) Indicar el ouput correspondiente a los siguientes input:

$g(x)= \sqrt{\mathbf{x}}$; $r(x)= \sqrt{\mathbf{x}} - 5$; $s(x)= \sqrt{\mathbf{x}} - 5/2$
$h(x)= \log x$; $k(x)= \cos x$; $p(x) = \log x^2$

(*) Comparar los ouput de la máquina en el item (a) y en el item (b) y señalar cual es la diferencia esencial entre un caso y otro.

16.- El siguiente diagrama de máquina corresponde a la función "Q", la cual ´separa racionales de irracionales´.

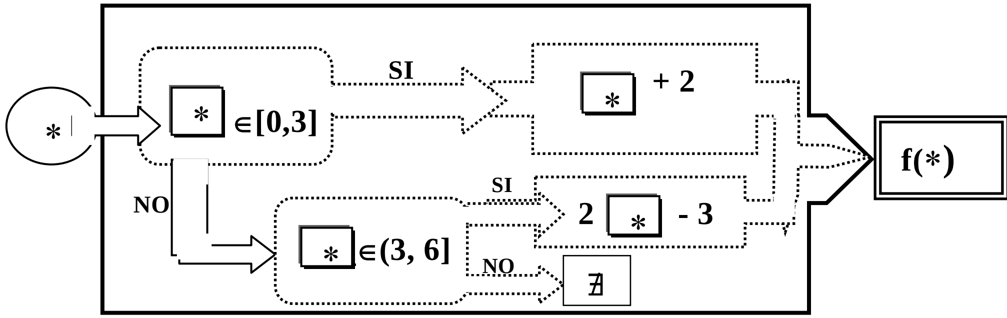


a) Analizar si "Q" procesa los siguientes valores; o sea, si los acepta como input. En caso que los acepte indicar cual es el output correspondiente.

1/2 ; 1/3 ; π ; π-3 ; π/2 ; 90º ; sen 30º ; sen 60º; tg 45º; tg 0º ; cos 180º; sen 90º; e ; e -2 , e/2 ; ln 1; ln e; ln e^2 ; ln$\sqrt{\mathbf{e}}$; log 0.1 ; log$\sqrt{\mathbf{10}}$

b) Indicar la ley de "Q" a través de una (ó más) fórmulas.

17.- El siguiente diagrama de máquina corresponde a la función *seccionalmente definida* **f.**



a) Calcular f(2); f($\sqrt{\mathbf{2}}$); f($\sqrt{\mathbf{2}}$ +3); f(π/2); f (10^{-8}); f(-2); f(π-5); f(π +2); f (e)
b) Indicar dominio natural de **f** .
c) Indicar l a ley de **f** a través de una (ó más) fórmulas.

18.- Dada $f(x)= x^2$ se pide encontrar y simplificar :

(a) f (2); **(b)** f (2+h); **(c)** f (2+h)- f (2); **(d)** [f (2+h)-f (2)] / h

(e) La expresión en (d) define una función a la que llamamos **CI** (cociente incremental) y cuya la variable independiente es ´h´. Indicar Dn y ley de **CI** .
(f) ¿Qué puede decir de los valores de CI(h) para "h" infinitamente pequeños? .

19.- Analizar cual de las siguientes ecuaciones determina una función "f" con fórmula " **y = f(x)** ".

(a) $2x + 5y = 4$
(b) $4x^2 - 2y = 8$
(c) $4x - y^2 = 0$
(d) $x^2 + y^2 = 25$
(e) $x.y = 1$
(f) $x^2.y = 1$
(g) $x^2.y^2 = 1$
(h) $x.(y+1)= y$
i) $x^2.y + x\,y^2 = 1$
j) $y = 3$
k) $| y | = 2$
l) $x - 2 = 0$

20.- *DEFINICION*: f se dice POSITIVA (fp) si y solo si $f(x) > 0$; $\forall x \in Df$

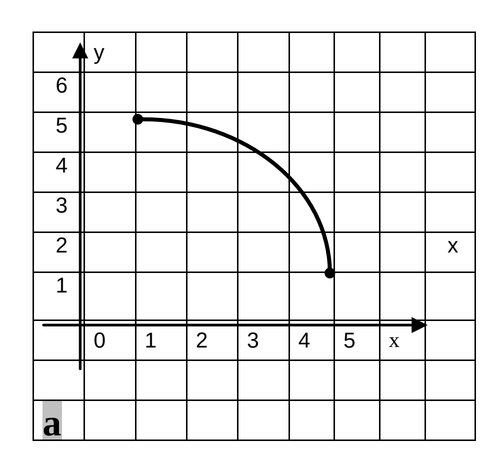
a) dar una definición equivalente de fp. en términos del gráfico de f.
b) definir función NEGATIVA (fn); NO POSITIVA (fnp) y NO NEGATIVA (fnn).
[diremos que una función tiene "SIGNO DEFINIDO" en su dominio si es POSITIVA en él (ó NEGATIVA, ó NO POSITIVA, ó NO NEGATIVA)].
En cada caso interpretar en términos del gráfico de la función
c) analizar si las siguientes funciones tienen "SIGNO DEFINIDO" en su dominio. Si lo tienen proceder a clasificarlas.

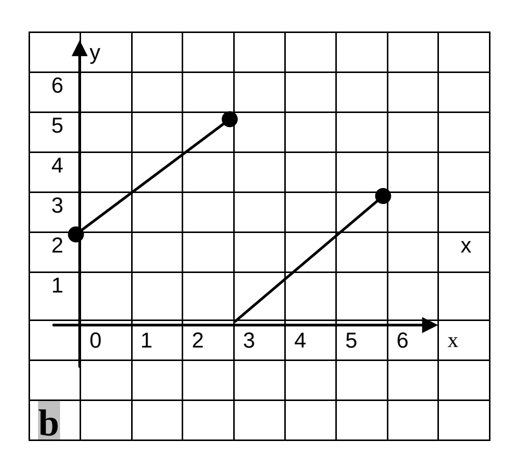
$f_1(x)= x^2$ $\quad$ $f_2(x)= x^2+1$ $\quad$ $f_3(x)= x^3$ $\quad$ $f_4(x)= | x |$;

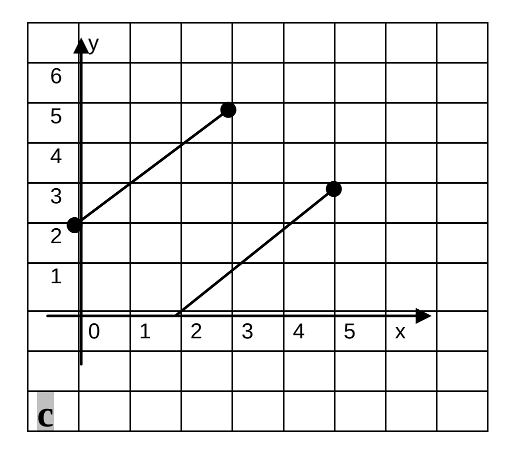
$f_5(x)= -| x |$ $\quad$ $f_6(x)= \sqrt{x}$ $\quad$ $f_7(x)= - \sqrt{x}$ $\quad$ $f_8(x)= \sqrt{x} +1$;

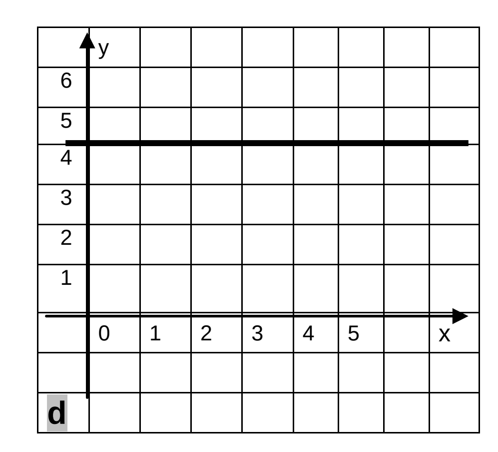
$g_1(x)=$ sen x $\quad$ $g_2(x)=$ senx - 1; $\quad$ $g_3(x)= |$ senx $|$ $\quad$ $g_4(x)=$ senx +2

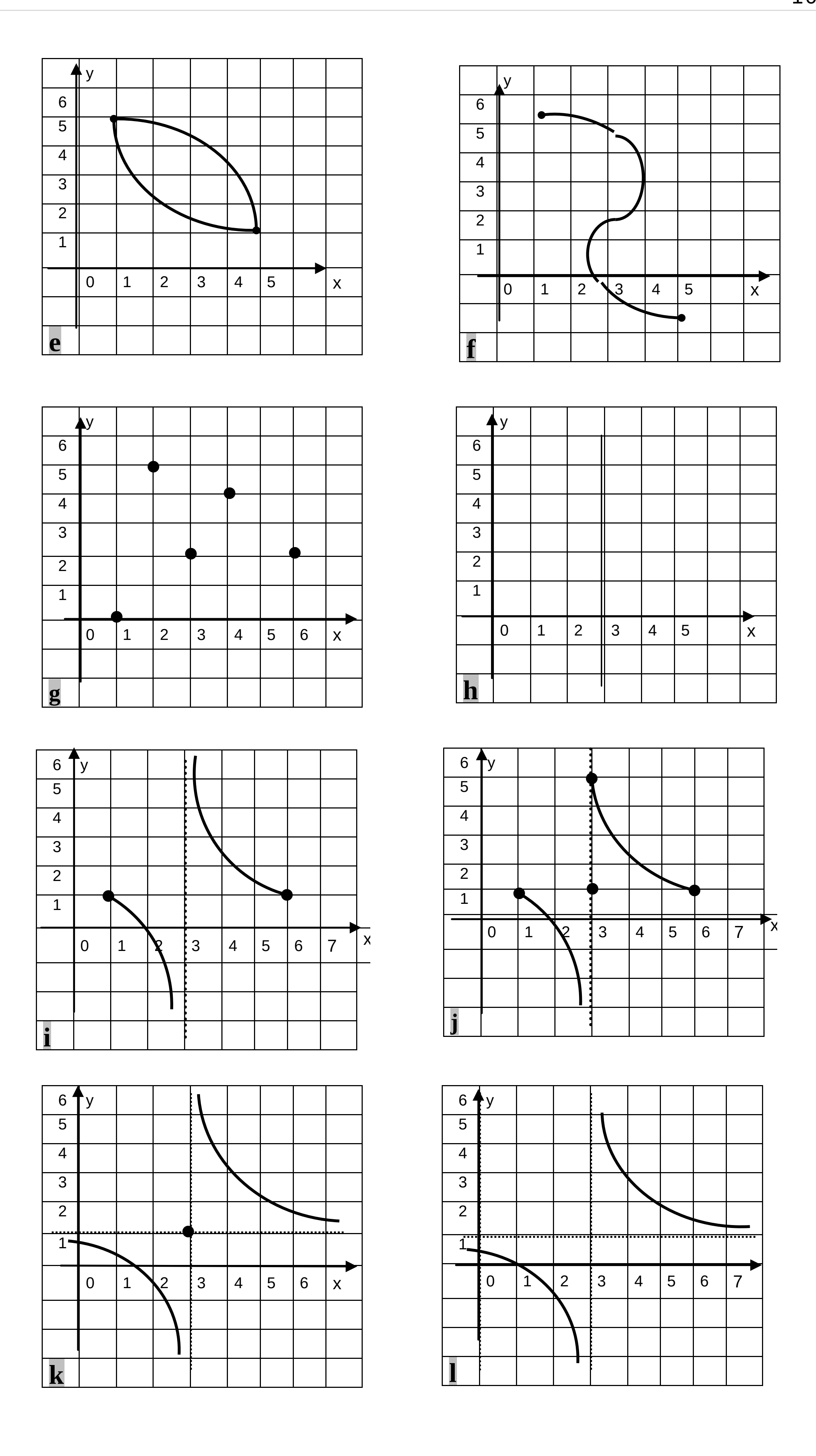
21.- Dadas las siguientes gráficas indicar cual de ellas define una función "f" con fórmula "**y = f(x)**". Si define función indicar dominio natural e imagen.









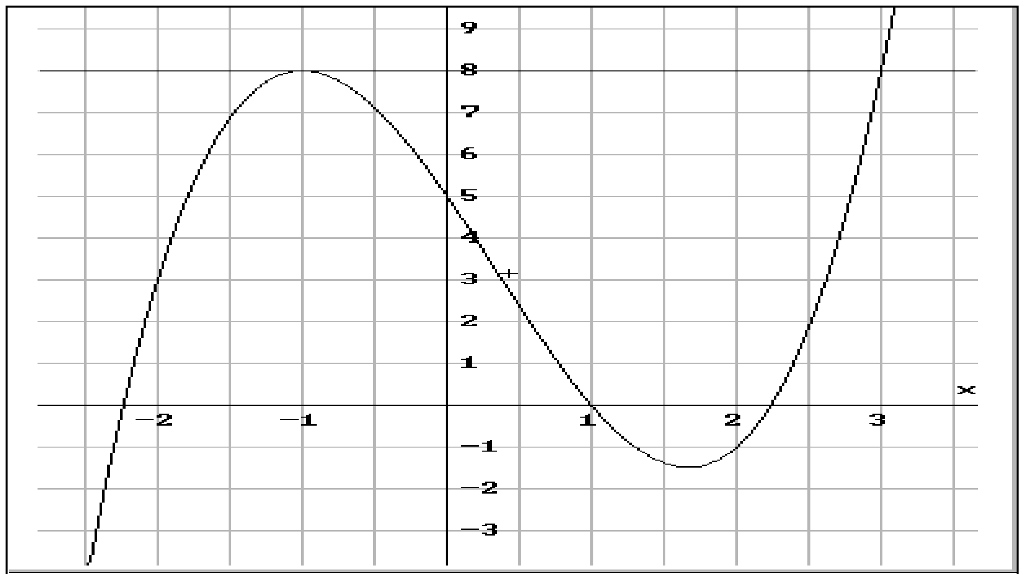


e
f
g
h
i
j
k
l

22.- Para cada gráfico del ejercicio anterior que haya definido función, analizar:

a) Si **f** tiene signo definido en su dominio.
b) Si **f** es monótona en su dominio. Si lo es indicar el tipo de monotonía.
c) Si **f** es monótona en algún subintervalo de su dominio.
d) Si **f** alcanza un valor *´máximo´* . Si lo alcanza, en que punto(s) lo hace.
e) Si **f** alcanza un valor *´mínimo´* . Si lo alcanza, en que punto(s) lo hace.

23.- La gráfica que sigue corresponde a una función polinómica:



En relación a la misma, se pide:

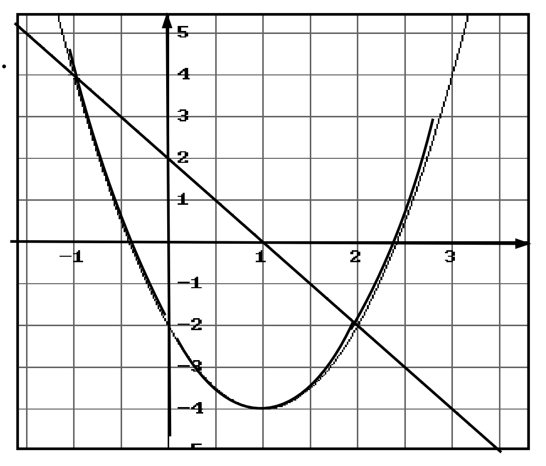
i) indicar dominio e imagen . ¿Alcanza la función un valor máximo?; ¿un mínimo?.
ii) leer del gráfico las imágenes correspondientes a las siguientes abscisas: -1 ; 0 ; 1 ; 3
iii) leer del gráfico *cuantos* ceros ó raíces presenta este polinomio.
iv) Indicar, leyendo del gráfico, un intervalo donde el polinomio esté creciendo.
v) Indicar, leyendo del gráfico, un intervalo donde $f(x) > 8$.
vi) Indicar, leyendo del gráfico, un intervalo donde $f(x) < 0$.
vii) Indicar, leyendo del gráfico, un intervalo donde $0 < f(x) < 8$.
viii) Si x toma sólo valores en el [-2; 1], ¿alcanza un valor máximo?, ¿mínimo?, ¿cuáles?
ix) de los polinomios que se proponen a continuación descartar los que ´con seguridad´ no corresponden a la gráfica dada. En cada caso, justificar la elección.

$p_1(x) = x^2 – 2x + 1$ $\quad$ $p_3(x) = x^3 – x^2 - 5x + 5$
$p_2(x) = x^3 – 5x^2 - x + 5$ $\quad$ $p_4(x) = - x^3 - 4x^2 + 5$

j) Discutir acerca de la posibilidad de que p_3 sea el polinomio graficado. Para ello, calcular las raíces de p_3, factorizar p_3 y usando la factorización, determinar los intervalos donde el polinomio es positivo ó negativo. Concluir.

- *Sugerencia*: para establecer el signo de $p_3(x)$ en cada uno de los subintervalos determinados por los ceros del polinomio podemos acudir al uso de ***valores de prueba***.
Para ello, tomamos x* en uno de los subintervalos, reemplazamos x por x* en la expresión factorizada del polinomio, $p(x^*)=(x^*-x_1)(x^*-x_2)(x^*-x_3)$ y decidimos el signo de $p_3(x^*)$ a partir del signo de cada factor (x^*-x_i). (*calculado o estimado usando desigualdades*).
En el ´subintervalo´ el signo del polinomio es el signo de $p_3(x^*)$.

24.- Las funciones **f** y **g** son respectivamente, la recta y la parábola del gráfico adjunto.

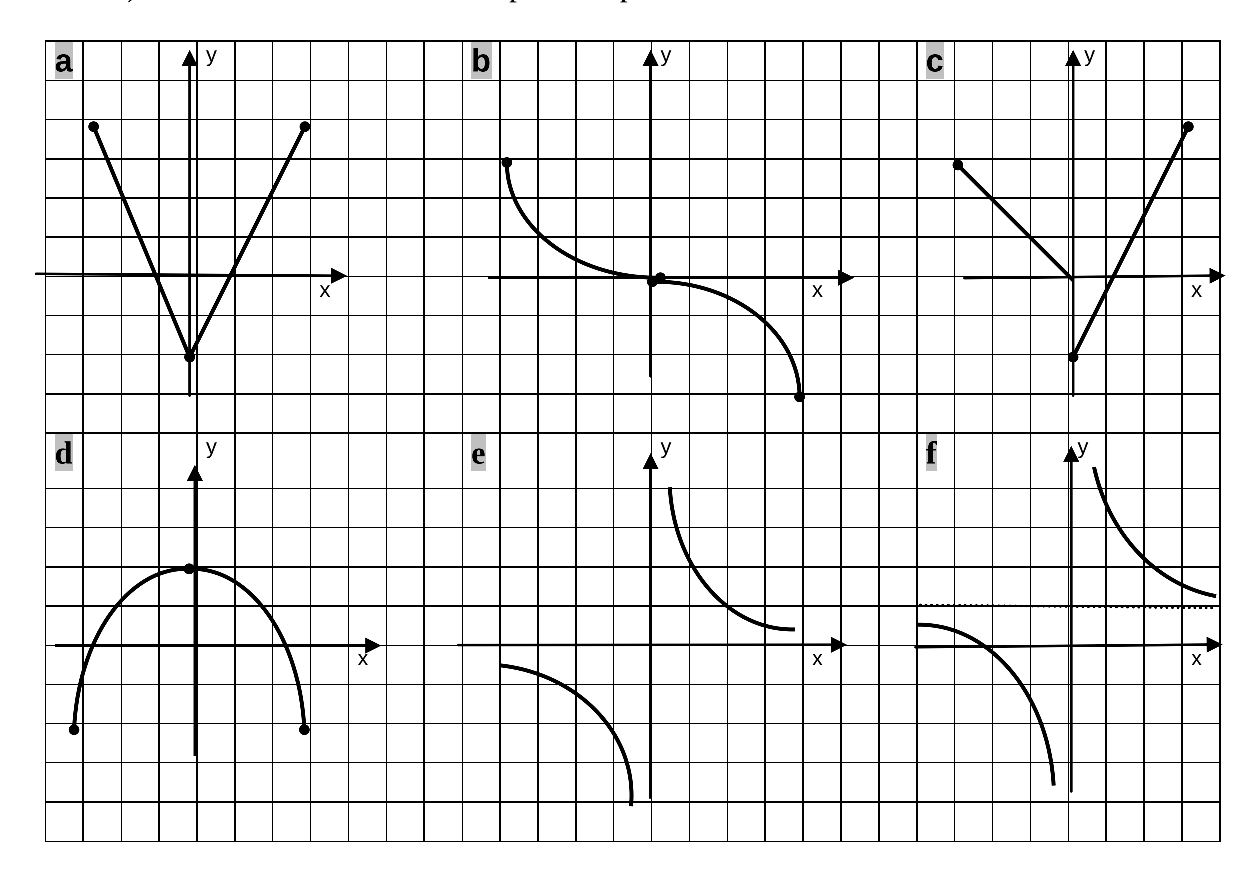


a) Leer del gráfico los puntos de intersección entre recta y parábola.

b) Si la función **h** se define como:
h = f – g
- indicar todos los ceros de **h**.
- indicar gráfica y analíticamente el conjunto **H** si **H** = { $x \in R$ / $h(x) \geq 0$ }.

25.- Para las funciones cuyos gráficos se proponen a continuación, se pide:

a) determinar y clasificar los intervalos de monotonía.
b) Analizar si la función es par o impar en su dominio.



26.- Determinar si **f** es par, impar ó ninguna de las dos cosas para:

a) $f(x) = x^2 - 4$
b) $f(x) = x^{-2}$
c) $f(x) = 3x$
d) $f(x) = 3x + 4$
e) $f(x) = \cos x$
f) $f(x) = \text{sen } x$
g) $f(x) = 3x^4 + 2x^2$
h) $f(x) = x^3 + x$
i) $f(x) = x^3 + x + 1$
j) $f(x) = 2 + |x|$
k) $f(x) = |2 + x|$
l) $f(x) = x^{-3}$

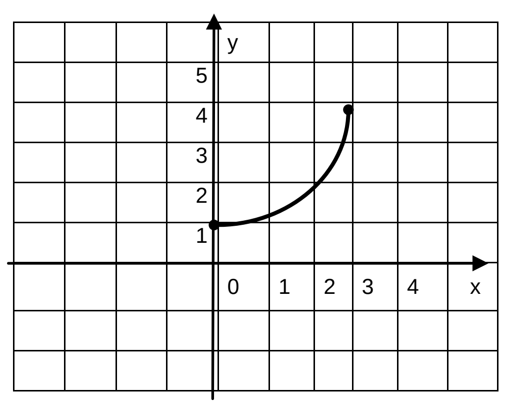
27.- Clasificar cada una de las siguiente funciones en FP (función polinómica); FR (función racional); FA (función algebraica); FT (función trascendente).

a) $f(x) = 2x + 5$
b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x^{-2}$
c) $f(x) = 2\cos x - \text{sen } x$
d) $f(x) = x + x^{½}$
e) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x^3 - 4}$
g) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - \sqrt{2}$
h) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - \sqrt{x}$
i) $f(x) = (x-2)(x-3)(x+1)$
j) $f(x) = \log(4x - 5)$
k) $f(x) = (x-2)(x-3)(x+1)^{-1}$

28.- Siendo **f** la función del gráfico adjunto se pide :

a) Dar dominio e imagen de f
b) Para las funciones que se indican a continuación dar dominio, imagen y gráfico usando la TABLA de transformaciones de la pag. 48.

$g(x) = -f(x)$
$h(x) = f(x) + 2$
$j(x) = f(x) - 3$
$p(x) = f(x - 1)$
$q(x) = f(x + 3)$
$r(x) = f(x + 2) - 2$
$s(x) = | f(x + 2) - 2 |$
$d(x) = 2 \cdot f(x)$
$m(x) = ½ \cdot f(x)$



c) Escribir las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f si sobre ella se realizan las siguientes transformaciones :
Se desplaza 4 u. hacia abajo.
Se desplaza 5 u. a la derecha.
Se refleja respecto del eje x y luego se desplaza 2 u. hacia arriba.
Se refleja respecto del eje y.
Se alarga verticalmente un factor 3.
Se alarga horizontamente un factor 3.

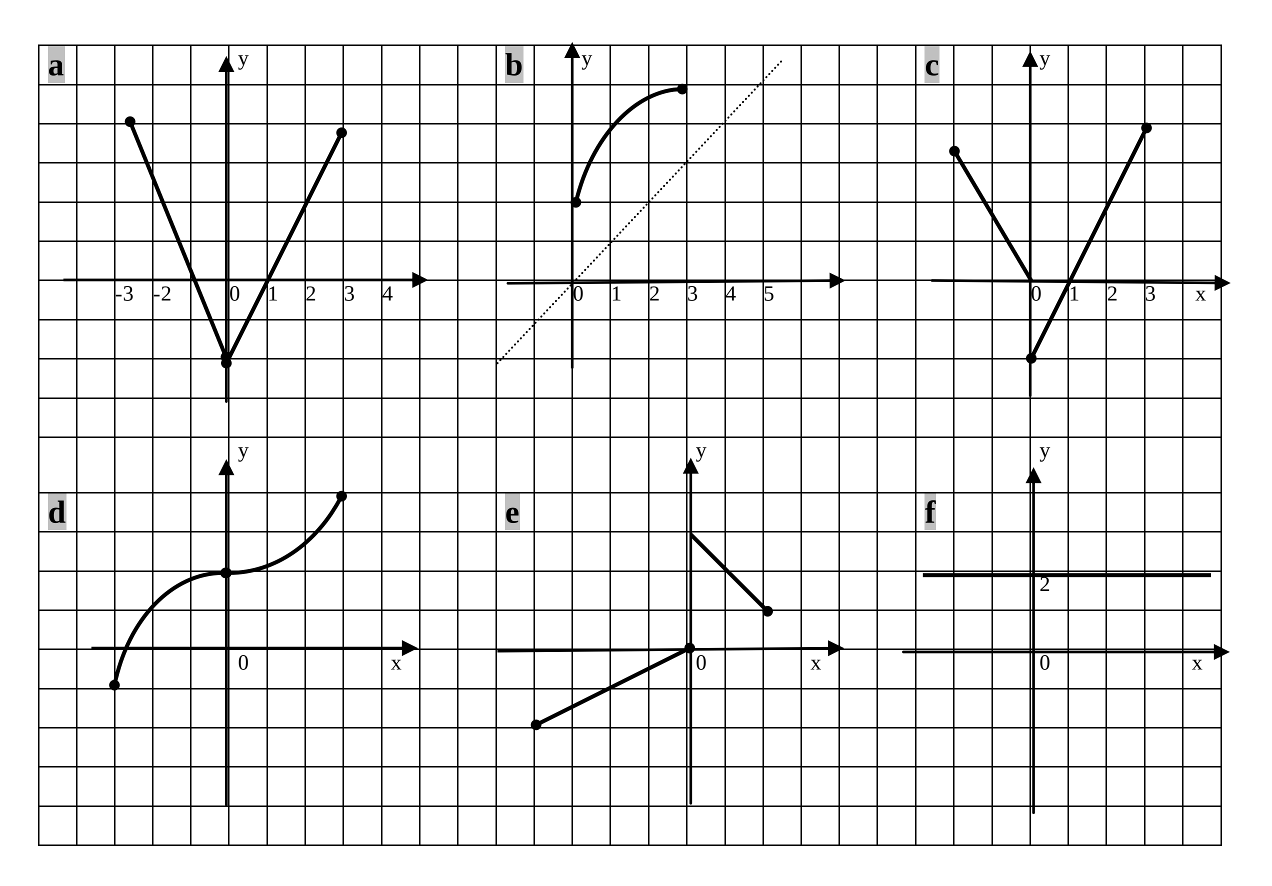
29.- Para las funciones que indicamos a continuación, se pide:

a) determinar si las mismas *admiten inversa* (en todos los casos considerar codominio de **f** = Im **f**). (Sugerencia : usar la prueba de la recta horizontal)

b) Indicar V ó F, justificando la respuesta:

i) si **f** es estrictamente creciente en D entonces **f** es inyectiva en D.
ii) si **f** es inyectiva en D entonces **f** es estrictamente monótona en D.
iii) Sea **g** inversa de **f** luego**,** si $f(1) = 4$ entonces $g(4) = 1$.
iv) Si $f(1) = 4$ y $g(4) = 1$ entonces **g** es la inversa de **f** .
v) Si **g** inversa de **f** entonces $g(f(x)) = x^{-1}$.
vi) Si **g** inversa de **f** entonces $(1, 4) \in$ graf f si y sólo si $(4,1) \in$ graf g.

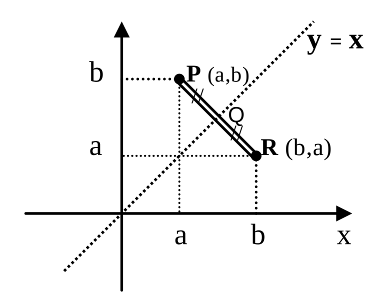
c) en el caso que exista **g** inversa de **f** determinar, leyendo del gráfico, dominio y codominio de **g.** Indicar luego en cada caso y leyendo del gráfico, g(2) .



d) Por definición de función inversa si **g** es la inversa de **f** entonces,

(a,b)∈ graf f ⇔ (b,a)∈ graf g.

Verificar que (a,b) y (b,a) son simétricos respecto de la recta y=x. (d(P,Q) = d(Q,R))



ⓘ <u>Conclusión</u>: graf. g es simétrico del graf. f respecto de la recta y = x.

Para los gráficos dados se pide graficar, en caso que exista, **g** inversa de **f**

30.- I) Indicar la ley de las siguientes composiciones si el subíndice que acompaña a la función indica lo que se suma(S), resta(R), multiplica(M) ó divide (D) a “x” (ej: $S_8(x) = x+8$):

a) $M_4 \circ S_2$ c) $R_6 \circ S_9$ e) $R_5 \circ S_5$ g) $D_3 \circ M_3$
b) $S_2 \circ M_4$ d) $M_3 \circ [R_6 \circ S_2]$ f) $S_5 \circ R_5$ h) $M_3 \circ D_3$

(II) Indicar la función g que en cada caso haga cierta la igualdad que se indica discutiendo previamente quien debe ser g. Verificar la afirmación .

a) $g \circ D_3 = id$ c) $g \circ [S_5 \circ M_2] = id$ e) $g \circ [S_5 \circ S_2] = id$
b) $g \circ R_8 = id$ d) $g \circ [D_2 \circ S_8] = id$ f) $g \circ [R_8 \circ [M_2 \circ S_4]] = id$

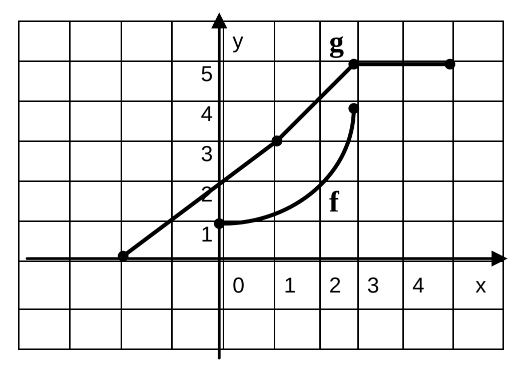


(III) Dadas las siguientes funciones expresarlas como composición de funciones algebraicas elementales (S; R; M ó D)

a) p(x)= 3x +5 b) $q(x) = \frac{4x + 7}{5}$ c) r(x) = 9/5. (x/2 + 4)

31.- Usar las gráficas de **f** y **g** para evaluar cada expresión o bien, explicar por qué no está definida.

a) g o f (0)
b) g o f (2)
c) g o f (3)
d) f o g (0)
e) f o g (1)
f) f o g (-2)
g) f o g (4)
h) g o g (-2)
i) g o g (-1)
j) g o g (0)
k) g o g (1)
l) g o g (2)
m) g o g (3)
n) g o g (4)
o) g o g (5)



- Usar estas estimaciones para trazar una gráfica aproximada de g o g

32.- Indicar el dominio natural de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
b) f(x) = x / (x+2)
c) f(x) = x / (x^2- 4)
d) f(x) = x / (x^2+1)
e) $f(x) = \sqrt{x-2}$
e) f(x) = (x-1) / (3x-3)
f) f(x) = cos x
g) f(x) = 1/ cos x
h) f(x) = tg x
i) f(x) = cos x + 1/x
j) f(x) = sen (cos x)
m) f(x) = tg x + 1/x
n) f(x) = (x+2) / (x^2 – 4)
o) $f(x) = \sqrt{x-2} \,.\, \sqrt{x}$
p) $f(x) = \sqrt{(x-2).x}$
q) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

33.- Hallar, si existe, f(0); f(2); f($\sqrt{2}$); f (a) ; f (a+2); f (a+2) –f(a); f (1/a) ; 1/f(a) para:

a) f(x) = x^2 –1 b) f(x) = x . (x+2) c) f(x) = x / (x-2) d) f(x) = $(x^2-2)^{-1}$

34.- Identificar y graficar las funciones cuyas gráficas sean *rectas, semirrectas, segmentos ó consecución de ellos*. En cada caso indicar dominio e imagen.

a) f(x) = 2 x + 4
b) f(x) = 2 x^{-1} +4
c) f(x) = - x -2
d) f(x) = $(x+1)^2$
e) f(x) = 2x+4; $D_f = R^+$
f) f(x) = 2x+4; D_f = [-2,1]
g) $f(x) = \frac{2x+4}{x}$
h) f(x) = $(x+1)^2 - x^2$
i) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
j) f(x) = | x | - 2
k) f(x) = | x-2 |
l) f(x) = | x-2 | + x
m) $f(x) = \frac{4x-8}{2}$
n) $f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \in [-4, 0] \\ 2 & , x \in (0, 2] \end{cases}$
ñ) [x] = mayor entero que es menor ó igual que ´x´. (función *PARTE ENTERA*)

35.- Para cada una de las funciones que siguen se pide:

a) Graficar. Indicar Im f.
b) Determinar y clasificar intervalos de monotonía. (gráficamente)
c) Estudiar la existencia de simetrías (gráficamente). Si existe, clasificar la función.
d) Estudiar la existencia de inversa. Si existe dar dominio , codominio y ley de la misma. Graficar y analizar si conserva las propiedades de la función de partida.

i) $f(x) = 2x$

ii) $f(x) = 2x$; $D_f = [-2,2]$

iii) $f(x) = -2x$

iv) $f(x) = -2x + 4$

v) $f(x) = -2x + 4$; $D_f = R^+$

vi) $f(x) = \dfrac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}}$

vii)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 , & x \in [0,4] \\ -x+2 , & x \in [-4,0) \end{cases}$$

viii)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 , & x \in (0,4] \\ 1 , & x = 0 \\ x , & x \in [-4,0) \end{cases}$$

ix)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 , & x \in (0,4] \\ 0 , & x = 0 \\ x-2 , & x \in [-4,0) \end{cases}$$

x)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 , & x \in (0,4] \\ 0 , & x = 0 \\ 2 , & x \in [-4,0) \end{cases}$$

36.- i) Para los puntos que se dan a continuación se pide: graficar en un mismo sistema coordenado la recta que determinan y obtener (si existe) la pendiente de tales rectas . Hallar luego (si existe), la ley de la función correspondiente. Analizar si estas rectas presentan alguna particularidad y cómo se obtiene esta información si sólo se cuenta con la ley de la función. Escribir una proposición con la conclusión obtenida.

a) P (0 , 1) ; Q (2, 5)
b) P (0 , -1) ; Q (2, 3)

ii) Idem que el item (i) pero para los siguientes puntos:

c) P (0 , 2) ; Q (1, 3)
d) P (0 , 2) ; Q (-1, 3)
e) P (0 , 2) ; Q (3, 2)
f) P (0 , 2) ; Q (0, 4)
g) P (0 , 2) ; Q (4, 0)

iii) Idem que el item (i) pero para los siguientes puntos:

h) P (-2,- 4) ; Q (2, 4)
i) P (0 , 2) ; Q (4, 0)
j) P (2 , -1) ; Q (-6, 3)
k) P (0 , -3) ; Q (-6, 0)

Acorde a las conclusiones obtenidas en los items anteriores si
r_1) $y = 4x-5$ y r_2) $y = -0.5x+4$; se pide:

a) Dar dos rectas paralelas r_1 .
b) Dar dos rectas perpendiculares a r_2 .
c) Analizar si r_1 y r_2 son paralelas ó perpendiculares. Si no son paralelas hallar $r_1 \cap r_2$.
d) Analizar si las siguientes rectas intersecan a r_1 . Si lo hacen, hallar dicha intersección.

(r3)	$y = 2x - 3$	(r6)	$y = 4x-2$
(r4)	y = - … x	(r7)	$2x - ½ y - 2.5 = 0$
(r5)	y = - … x - 5	(r8)	$x + 2y + 1 = 0$

37.- Dar la ley de la función lineal **f** que verifica:

a) Su gráfica corta al eje x en, $x^* = 3$; al eje y en, $y^* = 6$.
b) Su gráfica es el eje x.
c) Su gráfica asciende dos unidades por cada unidad de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el origen.
d) Su gráfica asciende dos unidades por cada unidad de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el punto (0,5).
e) Su gráfica asciende 6 unidades por cada 2 unidades de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el punto (0,5).
f) Su gráfica desciende dos unidades por cada unidad de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el punto (0,5).
g) Su gráfica asciende una unidad por cada cuatro unidades de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el punto (0,5).
h) Sus imágenes ´crecen´ a razón de 3 u. por cada cambio unitario en x.
i) $f(5) = 3$ y su gráfica es paralela al eje x.
j) $f(0) = 3$ y su gráfica es paralela a la de $y = 4x - 2$.
k) Corta a la recta $y = 4x-2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y es paralela a $y = 5$.

38.- El aire seco al moverse hacia arriba se enfría a razón de aproximadamente 1ºC por cada 100 m. Esto se da hasta unas 12 km. del suelo.

a) Si la temperatura al ras del suelo es de 20ºC, escribir una fórmula para la temperatura en función de la altura al suelo. Indicar la *función* correspondiente según los datos empíricos.
b) ¿Qué rango de temperaturas barre un avión desde que despega hasta estar a una altura de 5 km.?
c) ¿cuál es la temperatura que se tiene en el punto límite de validez de la fórmula?.
d) Hallar la función inversa. ¿Qué nos informa esta función? , ¿la pendiente?
e) Si los sensores de un avión registran una temperatura de 10ºC: ¿ a qué altura está el avión?.

39.- Hallar la función lineal que permite obtener la temperatura de un cuerpo en grados Fahrenheit (F) conocida la temperatura del mismo en grados Celsius (C), si se sabe que el agua se congela a 0ºC (ó 32 ºF) y hierve a 100 ºC (ó 212 ºF).

a) Calcular a cuantos grados Fahrenheit equivalen 5 ºC .
b) ¿Qué *variación* en grados Fahrenheit corresponde a una *variación* de 5ºC?
c) Graficar la función ; indicar cual es la pendiente y qué representa.
d) ¿ Qué intervalo sobre la escala Fahrenheit corresponde al rango de temperaturas $20 \leq C \leq 30$?
e) Hallar y graficar la función inversa. ¿Qué expresa esta función? , ¿la pendiente?.
f) La Sra. Amalita Gonzalez del Cerro compró un juego de ollas importadas. En el prospecto indica que las mismas no pueden someterse a temperaturas superiores a los 194 ºF. La Sra tiene un grave dilema, no sabe si en estas ollas tan lindas puede hervir agua: ¿la ayudamos?.

40.- Presión, volumen y temperatura son tres parámetros que definen el estado de una masa gaseosa. Para hallar la relación que los vincula (*ecuación de estado*) se comienza por los casos más simples, por ejemplo, dejando fijo *uno de los parámetros*. Así si se trabaja en un recipiente deformable se puede mantener la *presión constante* y estudiar la relación entre volumen y temperatura. Con este objetivo se procede a variar la temperatura y medir el volumen resultante en cada caso. Los datos obtenidos se presentan en la siguiente tabla.

t (ºC)	0	50	100	150	200	250	300
V (cm^3)	20	23.65	27.30	30.98	34.60	38.25	42.00

a) ¿son t y V directamente proporcionales?, ¿ tienen una relación lineal?. Si es así hallar la ley de la función que expresa la relación " t-V ".
b) Si la temperatura a la cual, y según la ley obtenida, se tendría ´cero´ volumen se la llama ´*cero absoluto*´: ¿ a cuántos ºC equivale el ´*cero absoluto*´?.
c) Si el recipiente usado para la experiencia puede, como máximo, contener 100 cm^3 : ¿cuál es el dominio natural de esta función? .
d) Calcular el volumen para : t_1 = -30ºC ; t_2 = 180ºC ; t_3 = 500ºC ; t_4 = 1500ºC .
e) Interpretar físicamente el significado de los coeficientes de la función que relaciona V y t.
f) Hallar la función inversa e indicar que nos informa esta función.

41.- Una compañía reembolsa a sus representantes $ 50 diarios por traslado y comida, más $5 por kilómetro recorrido . Si C representa el coste diario para la compañía en términos de ´x´, cantidad de kilómetros recorridos, completar la siguiente tabla y luego escribir una relación que exprese ´C´ en función de ´x´. Finalmente, graficar ´C ´ .

x (kms)	C(x) ($)
$0 < x < 1$	50
$1 \leq x < 2$	55
$2 \leq x < 3$	
$3 \leq x < 4$	
$4 \leq x < 5$	
$5 \leq x < 6$	

42.- Un empleado dispone de dos opciones a puestos en una gran compañía (opción A y opción B). En ambos puestos el salario *por hora* (´w´) depende de un monto fijo más un plus por unidades producidas por hora. La relación que expresa el salario por hora (´w´) en términos de ´x´, cantidad de unidades producidas por hora es, en cada caso : $w_A(x) = 12{,}50 + 0.75\,x$ y $w_B(x) = 9{,}20 + 1.30\,x$

a) ¿Qué expresa la pendiente en ambos casos?. Este sólo dato: ¿le permite concluir al empleado que puesto es el que más le conviene ? .
b) ¿Qué cantidad de unidades debería el empleado producir por hora para que le fuera indistinto tomar el puesto A que el B ? .
c) ¿ En que rango debe encontrarse su rendimiento (cantidad de unidades por hora) para que le convenga tomar el puesto A? .

43.- El movimiento de un objeto que se desplaza en línea recta se puede expresar a través de una ecuación **x =f (t)**, donde ´x ´ representa el desplazamiento *(distancia dirigida ó medida con signo)* del objeto en cada instante ´t´ respecto de un punto fijo que se toma como punto de referencia *(origen)*. La función **f** que describe el

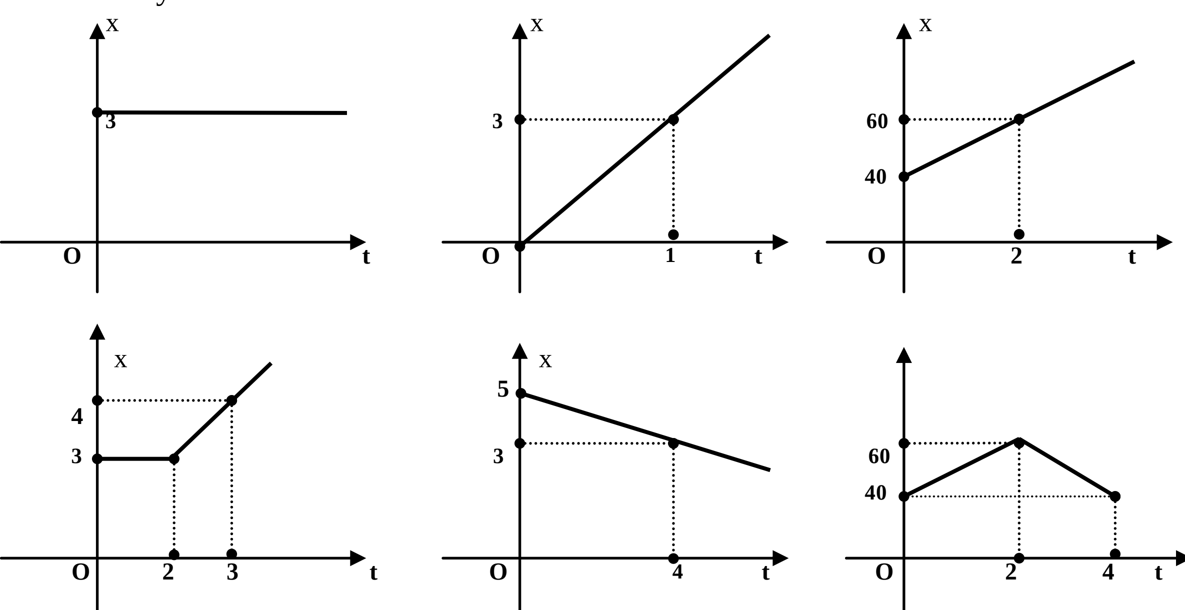
movimiento se conoce como *función de posición* del objeto.

a) Un móvil m_1 que originariamente se encuentra en reposo comienza a desplazarse hacia arriba y a razón de 10 cm. cada dos segundos. Dar f_1 , *función de posición* de m_1 con respecto a su punto de partida e indicar que representa ´físicamente´ la pendiente. Graficar en un sistema ´ t-x´.

b) Un móvil m_2 que inicialmente se halla a 9 cm. por arriba de m_1, comienza a moverse en el mismo instante que éste y de igual manera. Dar f_2 , *función de posición* de m_2 con respecto al punto de partida de m_1. Graficar en el mismo sistema ´t-x´ en que se graficó f_1 . A los 8 seg., ¿ a qué distancia está m_2 de m_1 ? Justificar física y geométricamente la respuesta.

c) Un móvil m_3 que inicialmente se halla 3 cm. por debajo de m_1, comienza a moverse en el mismo instante que éste, también hacia arriba pero a razón de 6 cm por seg. Dar f_3 , *función de posición* de m_3 con respecto al punto de partida de m_1. Graficar en el mismo sistema ´t-x´ en que se graficó f_1. ¿Alcanza m_3 a m_1? , ¿en qué instante?, ¿ a que distancia del punto de partida de m_1?, ¿cuántos cms. recorrió cada uno de los móviles hasta el momento del encuentro? . A los 8 seg., ¿ a qué distancia está m_3 de m_1 ? .

d) Los siguientes gráficos representan la *función de posición* (x) de un móvil con respecto al origen de coordenadas. En cada caso se pide expresar la función en forma verbal y a través de una ecuación .



44.- Dada f (x) = 2x +3 con dominio en el (0 ; 1].

a) extender f de modo que la nueva función así definida, que llamamos “p”, sea par. Luego graficar las siguientes funciones en un mismo sistema coordenado y teniendo en cuenta la tabla de transformación de funciones (parg. 35).

$F_1(x) = p(x)- 4$; $F_2(x) = p(x- 4)$; $F_3(x)= - p(x)$; $F_4(x)= - p(x)+3$; $F_5(x) = | p(x) – 4|$

b) extender f de modo que la nueva función así definida (“i”) sea impar. Luego graficar las siguientes funciones en un mismo sistema coordenado y teniendo en cuenta la tabla de transformación de funciones (pag. 48).

$G_1(x) = i (x) +1$; $G_2(x) = |G_1(x)|$; $G_3(x) = - i (x)$; $G_4(x) = - | i (x)|$; $G_5(x)= i (x) –p(x)$.

45.- Graficar las siguientes funciones y analizar sus propiedades. (usar transformaciones)

$y= |x|$; $y= |x| -2$; $y= |x-2|$; $y = |x+2| -1$; $y = - |x|$; $y = - |x| +3$; $y= |x| + x$;

$y= |x| + |x-2|$; $y= |x| + |-2x+2| +1$; $y= |x| + |x-3|+| 3x +3|$; $y = |x| - x + | 2x - 4|$

46.- Graficar en un mismo sistema coordenado y con dominio en [-1.5, 1.5] las siguientes funciones; analizar en cada caso las propiedades que presentan (monotonía, inyectividad, simetrías, signo definido).

a) $f(x) = x^n$ con n= 2 , 4, 6

b) $f(x) = x^n$ con n= 1 , 3, 5

47.- Para cada una de las siguientes funciones se pide:

i) Dominio, gráfico e imagen.

ii) Determinar propiedades: ceros, intervalos de monotonía, simetrías, signo.

iii) Hallar $Rp = \{ x \in D_f \ / \ f(x) > 0 \}$

iv) Hallar $Rn = \{ x \in D_f \ / \ f(x) < 0 \}$

a) $f(x) = x^2 -6x +5$

b) $f(x) = x^2 +2x +1$

c) $f(x) = x^2 - 3x$

d) $f(x) = - x^2 -2$

e) $f(x) = -2 x^2 +x +1$

f) $f(x) = - x^2 + 3x - 4$

g) $f(x) = x^2 - 9$

h) $f(x) = x^2 + 9$

i) $f(x) = - x^2 + 9$

j) $f(x) = 3x - x^2$

k) $f(x) = (x^2 - 9) / (x-3)$

l) $f(x) = (x +2) . (x-3)$

m) $f(x) = (x+2) (4-x)$

q) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x , & x > 0 \\ -x^2-2x , & x \leq 0 \end{cases}$

o) $f(x) = \begin{cases} x +2 , & x < - 2 \\ 2 , & x = - 2 \\ x^2-4 , & x \in (-2 , 0] \end{cases}$

48.- Idem ejercicio (45) para las siguientes funciones.

a) $f(x) = | x^2 -6x +5|$

b) $f(x) = | x^2 -1| +1$

c) $f(x) = (x-1).| x |$

d) $f(x) = | - x^2 -2 |$

e) $f(x) = | x^2 -3x + 4 |$

f) $f(x) = | - x^2 +3x -4 |$

g) $f(x) = | x^2 - 9 |$

h) $f(x) = - | x^2 - 9 |$

i) $f(x) = |- x^2 + 9 | +1$

j) $f(x) = |x| + x^2$

k) $f(x) = (x^2 - 9) / |x-3|$

m) $f(x) = (x +2).|x-3|$

n) $f(x) = | x+2 | . (- x)$

o) $f(x) = x^2 - |2 x| +1$

r) $f(x)= \begin{cases} x . |x-1| , & x > 0 \\ x .|x| , & x \leq 0 \end{cases}$

49.- Para los polinomios que se indican a continuación se pide determinar los ceros y el conjunto $D^+ = \{ x \in D_f \ / \ f(x) \geq 0 \}$.

(Se aconseja usar el método de los ´*valores de prueba*´ - pag. 106)

a) $f(x) = 3 (x-5) (x+7)$

b) $f(x) = x^3 -13 x +12$

c) $f(x) = -2 (x-1).(x+3)$

d) $f(x) = x^3 + x^2 -12 x$

e) $f(x) = x^4 + x^3 -12x^2$

f) $f(x) = x^3 - 4 x^2 +5x -2$

g) $f(x) = x^4 + x^2 +6$

h) $f(x) = x^3 + 9x$

50.- Cada una de las leyes que siguen corresponde a una *familia de funciones.*

Para obtener *una función* de la familia basta dar un valor al parámetro ´k´.

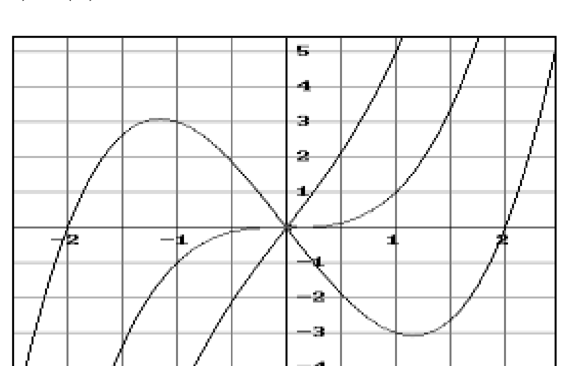
En cada sistema a continuación se grafican 3 funciones de cada una de las familias.

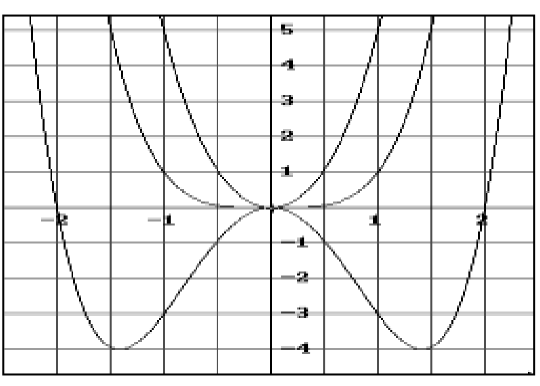
a) Se pide analizar número y tipo de raíces de cada función y comportamiento de la misma para x muy grandes (+ ó -), según el grado del polinomio. Establecer

luego a que familia y a que valor del parámetro corresponde cada gráfico.

i) $f(x) = x^3 + k\,x$; k = -4, 0, 4

ii) $f(x) = x^4 + k\,x^2$; k = -4, 0, 4

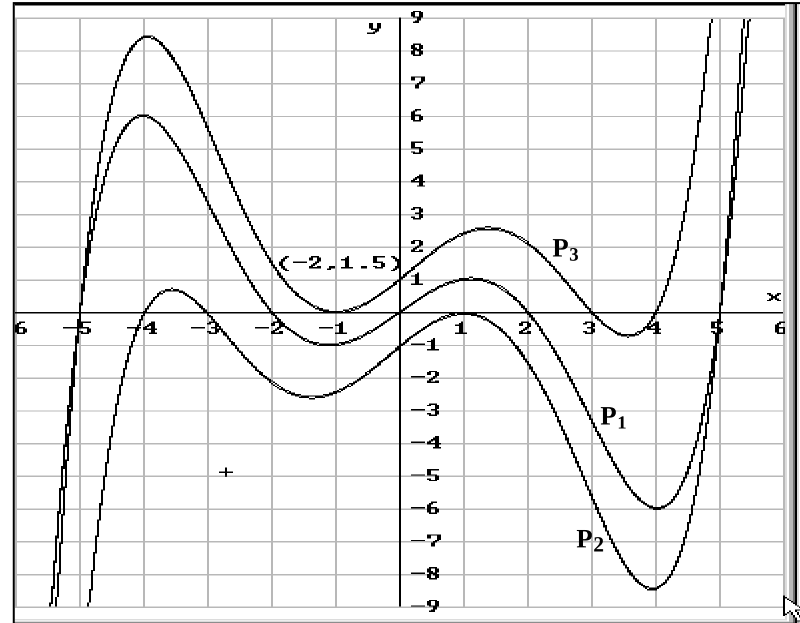




b) Formular una conjetura o hipótesis relativa a la intersección de la gráfica con el eje x y el carácter de la raíz. (reales, complejos).

c) Formular una conjetura relativa a la multiplicidad de las raíces y el signo de la función en un entorno de las mismas, según esta sea par o impar

51.- Las gráficas que se proponen a continuación corresponden a polinomios. Para cada una de ellas se pide: analizar si el grado del polinomio es *par o impar*, cual es el *menor grado* posible y proponer una factorización del mismo. Verificar .



52.- Graficar en un mismo sistema coordenado las siguientes funciones: d

a) $f(x) = x^{1/n}$ con n= 2 , 4, 6

b) $f(x) = x^{1/n}$ con n= 1 , 3, 5

53.- Graficar las funciones y analizar sus propiedades. (usar transformaciones)

$y_1 = \sqrt{x} + 2$; $y_2 = -\sqrt{x}$; $y_3 = \sqrt{x+2}$;

$y_4 = \sqrt{x} - 2$; $y_5 = |\sqrt{x} - 2|$; $y_6 = \sqrt{|x|}$

54.- Considerando en todos los casos Codominio f = Im f hallar, si existe, la función inversa de cada una de las funciones que se indican a continuación. Si no

existe restringir convenientemente el dominio y hallar la *función inversa* de la función restringida "f_r". Graficar ambas.

a) $f(x) = x^2 - 4$
b) $f(x) = x^2 + 4$
c) $f(x) = x^3 - 8$
d) $f(x) = (x-1)^2$
e) $f(x) = (x-1)^2 + 2$
f) $f(x) = \sqrt{x+4}$
g) $f(x) = \sqrt{x} + 4$
h) $f(x) = -(x-8)^{1/3}$
i) $f(x) = -\sqrt{x} + 2$
j) $y = \sqrt{1-x^2}$
k) $y = \sqrt{1-x^2} + 2$
l) $y = \sqrt{1-(x-3)^2}$

(*) Verificar en cada caso que $f \circ f^{-1} = id$

55.- Dada $f(x) = \sqrt{1+k.x^2}$ estudiar propiedades de esta función (dominio, imagen, simetrías, signo, existencia de inversa (considerando restricciones si fuera necesario)) para $k>0$; $k=0$ y $k<0$.

56.- Para cada una de las funciones a continuación se pide: ☐

i) Dominio, asíntotas (si existen) gráfico e imagen.
ii) Determinar propiedades: ceros, intervalos de monotonía, simetrías, signo.
iii) Hallar $R_p = \{x \in D_f \,/\, f(x)>0\}$ y $R_1 = \{x \in D_f \,/\, f(x) \leq 1\}$ (gráfica y analíticamente)
iv) Hallar, si existe, la *función inversa*.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$
b) $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$
c) $f(x) = \dfrac{6x+1}{6+3x}$
d) $f(x) = \dfrac{4x+2}{2x+1}$
e) $f(x) = \dfrac{-1}{x} + 2$
f) $f(x) = \dfrac{4}{x-1} - 2$
g) $f(x) = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2x+1}{x}$
h) $f(x) = \dfrac{x^2 - x.(x-2)}{x-1}$
i) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x-1}{x^2-1}$
j) $f(x) = \left|\dfrac{2}{x-2}\right|$
k) $f(x) = \left|\dfrac{-1}{x} + 2\right|$
l) $f(x) = \left|\dfrac{x+4}{x-2}\right|$
m) $f(x) = \left|\dfrac{-1}{x}\right| - 2$
n) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$
o) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x^2-1}$
p) $f(x) = \left|\dfrac{2}{x-2}\right| + 2$
q) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} . \dfrac{x-3}{x-1}$

57.- a) Dada $\mathbf{f(x) = 10^3 . \left(\dfrac{48-4x}{x+6}\right)}$; se pide graficar f y hallar
$S_{4000} = \{x \in R \,/\, f(x) \geq 4000\}$.

b) Al investigar el poder bactericida de un compuesto se observa que si "P" representa el número de bacterias presentes en la muestra "t" horas después de agregado el bactericida, entonces $P = 10^3.[\,48-4t \,/\, (t+6)]$. Se pide :

i) Número de bacterias al momento de agregar el bactericida (P_o).
ii) Intervalo de tiempo en que $P > P_o/2$. Tiempo en que $P = P_o/2$. Este

tiempo se llama "t medio" y se indica $t_{1/2}$ (¿porqué ?) .

iii) ¿Diría Ud. que para "$t = 2.\ t_{1/2}$" se eliminan todas las bacterias?. Si así fuera, ¿qué tipo de relación habría entre $\Delta P = P_o - P$ y t ? .

iv) *Calcule* el tiempo efectivamente requerido para eliminar todas las bacterias. ¿ Son $\Delta P = P_o - P$ y t , *directamente proporcionales* ? .

v) En el prospecto dice que el compuesto conserva <u>constante</u> su <u>poder</u> bactericida por espacio de 12 hs. ¿Es esto cierto?,¿porqué?. Relacionar los items anteriores.

vi) Dar la *función* P que define la ecuación del bactericida. Su gráfica.

c) Para otro bactericida se halla que $p = 10^3 . [\ 24\text{-}4t\ /\ (t+6)] + 4000$. Se pide:

i) Número de bacterias al momento de agregar el bactericida (p_o).

ii) Intervalo de tiempo en que $p \geq p_0/2$. Tiempo en que $p = p_0/2$

iii) Tiempo requerido para que quede una única bacteria.

iv) Tiempo requerido para eliminar todas las bacterias si el compuesto conservara su poder bactericida indefinidamente.

v) En el prospecto dice que el compuesto conserva un poder bactericida *efectivo* por espacio de 4 días. ¿Cuántas bacterias alcanza a *eliminar* el bactericida?.

vi) Dar la *función* p que corresponde al bactericida. Su gráfica.

vii) ¿Cuál de los dos bactericidas usaría? .

58.- Dadas las funciones $f(x) = 2^x$; $e(x) = e^x$; $h(x) = 3^x$, se pide:

a) Establecer cuál es la relación de orden entre ´f´ , ´e´ y ´h´ para los x´s / $x > 0$.
b) Establecer cuál es la relación de orden entre ´f´ , ´e´ y ´h´ para los x´s / $x < 0$.
c) Graficar ´f´ , ´e´ y ´h´ en un mismo sistema coordenado.
d) Graficar en un mismo sistema coordenado $y = f(x)$; $y = -f(x)$; $y = f(-x)$ e $y = 1/f(x)$.
e) Graficar $y = f(kx)$ en un mismo sistema coordenado para $k>0$; $k=0$ y $k<0$.
f) Dar gráfico e imagen de:

i)	$y = 2^x + 1$	**vi)**	$y = e^{-2x}$
ii)	$y = 2^{(x-2)}$	**vii)**	$y = 2^x / 3^x$
iii)	$y = 2e^x$	**viii)**	$y = 5 - 3(1 + e^x)$
iv)	$y = -2e^x - 1$	**ix)**	$y = (e^{-x})^3$
v)	$y = e^{2x} . e^3$	**x)**	$y = (e^{-x})^{-3}$

59.-Con base a la gráfica de $y = e^x$ escribir la ecuación de la gráfica que se obtiene de:

a) Desplazarla dos unidades hacia abajo.
b) Desplazarla dos unidades hacia la izquierda
c) Reflejarla respecto del eje x.
d) Reflejarla respecto del eje y.
e) Reflejarla respecto del eje x y, a continuación , respecto del eje y.
f) Reflejarla respecto de la recta $y = x$.

60.- Hallar la función exponencial de fórmula $\mathbf{y = k\,a^x}$ si se sabe que pasa por:

a) P (1,6) y Q(3,24) ; b) P (0,3) y Q(2, 3/4) ; c) P (0,-2) y Q(1,-6)

61.- **i)** Dar dominio, gráfico e imagen de:

a) $y = \log x + 10$
b) $y = \log (x + 10)$
c) $y = | \log (x + 10) |$
d) $y = | \log (x + 10) | -1$
e) $y = \ln e^{(x-3)}$
f) $y = e^{\ln(x-3)}$
g) $y = e^{\ln 5}$
h) $y = e^{x \ln 5}$
i) $y = e^{5 \ln x}$
j) $y = e^{- \ln x}$
k) $y = e^{-2 \ln x}$
l) $y = \ln (2.e^{x})$

ii) Hallar (si existen) las funciones inversas de las funciones del item anterior . En todos los casos considerar codominio = imagen.

iii) Si $f(x) = e^{x}$ graficar en un mismo sistema f ; f^{-1} y 1/f ; concluir luego acerca de si f^{-1} y 1/f guardan alguna relación entre sí.

iv) Si $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = \ln x$ indicar quienes son $f \circ g$ y $g \circ f$ y si $f \circ g = g \circ f$.

v) Resolver las siguientes ecuaciones para la incógnita ´x´ :

$e^{x-5} = 1$; $2^{x-5} = 3$; $2^{x} = e^{ax}$; $e^{ax} = 2\,e^{bx}$ $(a \neq b)$;
$\log (x-2) = 2$; $\log x^3 = 9$; $\log x + \log (x-3) = 1$.

vi) Cuando se habla de ´*crecimiento exponencial*´ lo que se quiere expresar es que el crecimiento es *muy rápido*. Para constatar esto halle el menor entero ´x´ para el que $e^{x} > 10^6$.

62.- Para pensar:
a) dadas f y g tales que $f(x) \approx g(x)$ $\forall x$;
¿ qué se puede decir de f(x)/g(x) ?. ¿ Y si g(x) es mucho mayor que f(x)?
b) la siguiente tabla presenta las razones entre **ln x** y $\sqrt{\mathbf{x}}$;
¿ qué información nos da esta tabla?

x	5	10	100	500	1.000	10.000	100.000
$\ln x / \sqrt{x}$	0.72	0.73	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

63.-a) Se conoce que en una *disolución acuosa* de cualquier especie química la concentración de hidronios $[H_3O^+]$ y de oxidrilos $[OH^-]$ no son independientes una de otra., sino que satisfacen la *fórmula básica* : $[H_3O^+] . [OH^-] = 10^{-14}$; no siendo necesariamente $[H_3O^+] = [OH^-]$.

Esto permite distinguir tres tipos de soluciones :

NEUTRAS: $[H_3O^+] = [OH^-] =$ ....

ACIDAS: $[H_3O^+] > [OH^-]$; o sea $[H_3O^+] >$ ....

BASICAS ó ALCALINAS: $[H_3O^+] < [OH^-]$; o sea $[H_3O^+] <$ ....

(*) Completar con un *número* la línea de puntos, según la *fórmula básica* y trabajando *algebraicamente* con ella.

b) Experimentalmente se ha podido establecer que el rango de variación tanto para $[H_3O^+]$ como para $[OH^-]$ es el intervalo $[10^{-14} ; 1]$. Para poder citar y trabajar estas cantidades exponenciales en forma más simple y práctica, Sorensen definió la función " p " como *"menos el logaritmo decimal de........"*.
Así : $pH = - \log [H_3O^+]$ y $pOH = - \log [OH^-]$.

(*) Indicar si los siguientes valores pueden ser concentraciones de H_3O^+ en una solución acuosa: 5.10^{-14} ; $0.5.10^{-14}$; 35.10^{-7} ; 7.10^{-18} ; 0.3 ; $0.02 .10^{-2}$. En caso que lo sean hallar su pH.

(*) Hallar (¡matemáticamente!) el rango de variación pH y pOH y determinar para que rango de pH la solución es ácida (básica) .
Demostrar que $pH + pOH = 14$

(*) Calcular la concentración de $[H_3O^+]$ en una solución de $pH = 8.5$

(*) Hallar una expresión para calcular pH si $[H_3O^+] = a .10^{-14}$.

64.- El número de bacterias (y) en un cultivo en función del tiempo ´t´ está dado por: $y = N_o\, e^{0.25\, t}$.

a) Discutir si esta ecuación define *función* y, si lo hace, discutir la siguiente afirmación $\mathrm{Im}\, f = [N_o ; +\infty)$. (¡considerar las restricciones propias del *modelo*!!)
b) Hallar cantidad de bacterias en el instante t= 0.
c) Hallar cantidad de bacterias en el instante t= 2, si inicialmente hay 2000 bacterias.
d) Hallar instante ´t´ en que la cantidad de bacterias es el doble de la inicial.
e) Hallar instante ´t´ en que la cantidad de bacterias es la mitad de la inicial.

65.- MODELO EMPÍRICO: *si no se conoce la relación que liga a dos magnitudes involucradas en un fenómeno natural se puede, a partir de **datos empíricos**, construir un **modelo matemático** del mismo; o sea, dar una función que dentro de ciertos márgenes de razonabilidad describa ´matemáticamente´ la relación entre las variables intervinientes. Básicamente se trata entonces de dar la curva que mejor **´ se ajuste´** a los datos, en el sentido de que sea la que mejor ´capture´ la tendencia básica de los puntos experimentales.*

Con el objetivo de hallar una *función* que informe sobre la masa presente ´m´ de un isótopo de sodio, ^{24}Na, después de ´t horas´ y a partir de una cantidad inicial dada, se realiza una experiencia en la que se va determinando y registrando la cantidad de masa al cabo de ciertos intervalos de tiempo. Los resultados de tal experiencia se presentan en la siguiente tabla:

t (hs.)	0	15	30	45	60	..	*n* . 15	..¿ t ?
m (g)	5	½ m(0)	½ m(15)	½ m(30)	½ m(45)	..	¿.....?	..¿--?
m (g)	5	2.5	1.25					
m (g)	5	½ .5				..		..

a) Graficar los puntos. En el caso que Δm y Δt fueran directamente proporcionales, ¿qué tipo de curva ajustaría estos puntos ?; ¿qué tipo de modelo sería este?.¿Son *directamente proporcionales*?

b) Tomando como referencia los puntos *datos* (30; m(30)) y (60; m(60)) dar *un modelo lineal* para la relación masa-tiempo del isótopo de sodio estudiado. ¿Proporciona este modelo un ´buen ajuste´ de los datos experimentales?. Otro modelo lineal, ¿ajustaría mejor ?, ¿ porqué ? .

c) Completar el último renglón de la tabla y concluir una ley no lineal para la función buscada. Nota: para poder inducir la ley pedida, al completar la tabla deberá dejar la expresión *tal cual va quedando, no realizar* las operaciones que quedan en cada caso. Verificar luego la ley obtenida calculando con ella alguno de los valores de la tabla . Graficar la función y escribir en una oración qué pasa con el isótopo de sodio a medida que transcurre el tiempo; con qué *particularidad* pasa.

Calcular la masa a las 10 hs, 25 hs ; 50 hs . (en este caso Ud. está *´interpolando´* valores) .
Calcular la masa a las 75 hs , 80 hs ; 100 hs . (en este caso Ud. está *´extrapolando´* valores)

> (*) Interpolar : estimar un valor entre valores observados.
> Extrapolar : predecir un valor fuera de la región de las observaciones.

(*) Observación: este segundo modelo, **´modelo exponencial´**, ajusta los datos experimentales mucho mejor que cualquier modelo lineal. Más aún, es el modelo que mejor ajusta.
Experimentalmente se comprueba que el modelo matemático que mejor describe procesos de descomposición de sustancias químicas es el **modelo exponencial**.

66.- El radio se descompone según la fórmula $\mathbf{y = k_o\, e^{-0.038\, t}}$ donde k_o es la cantidad inicial e ´y´ es la cantidad que queda al cabo de ´t´ siglos.

a) Hallar el tiempo de *´vida media´* ($t_{1/2}$) del radio; o sea, el tiempo requerido para que se descomponga la mitad de la cantidad presente.

b) Si k_o=10 mg , indicar cuanto tiempo transcurrirá para que queden: 5 ; 2,5 ; 1,25 y 0 (mg.)

c) Graficar la función e indicar sobre la gráfica los puntos obtenidos en el item (b).

d) Demostrar que la expresión general para "$t_{1/2}$" en una fórmula del tipo

$$\mathbf{y = \alpha \,.\, e^{\beta t}}, \text{ es: } \mathbf{t_{1/2} = \frac{-\ \ln 2}{\beta}}.$$

Discutir para que *tipo de exponencial* es válida esta expresión.

67.- Hallar la expresión que permita calcular la cantidad (y) de sustancia radiactiva que queda al cabo de ´t´ horas si se sabe que: es de tipo exponencial, al comienzo se tienen 10 mg de la sustancia y se desintegra de tal forma que se reduce a la mitad cada tres horas.

68.-

Hallar la función inversa de esta función y explicar que informa la misma.
. Graficar ambas funciones.
Hallar una función para la cantidad ´que se desintegra´. Hallar su inversa. Grafs.

69.- Para cada una de las siguientes funciones se pide:

i) Dominio, gráfico e imagen.
ii) Determinar propiedades: ceros, intervalos de monotonía, simetrías, signo
iii) Hallar $Rp = \{ x \in D_f \ / \ f(x) > 0 \}$
iv) Dar un dominio y codominio donde la función resulte biyectiva y luego hallar la función inversa.

a) $f(x) = 2 \text{ sen } x$
b) $f(x) = \text{sen } (2x)$
c) $f(x) = \text{sen } (0.5\ x)$
d) $f(x) = \text{sen } x + 1$
e) $f(x) = 0.5 \text{ sen } x + 1$
f) $f(x) = \text{sen } (x+ \pi/2)$
g) $f(x) = 2 \cos x$
h) $f(x) = -2 \cos x$
i) $f(x) = \cos^2 x$
j) $f(x) = | \text{sen } x |$
k) $f(x) = - | \text{sen } x |$
l) $f(x) = - | \text{sen } x | + 0.5$
p) $f(x) = | \text{sen } x | + \text{sen } x$
q) $f(x) = \begin{cases} \text{tg } x , & 0 < x < \pi/2 \\ | \text{tg } x |, & - \pi/2 < x \leq 0 \end{cases}$
r) $f(x) = \begin{cases} 3 \text{ sen } x , & x > \pi/2 \\ 0 , & x = \pi/2 \\ - 3 \text{ sen } x , & x < \pi/2 \end{cases}$

70.- Dadas $f(x) = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x+1}}$ y $g(x) = \sqrt{\mathbf{1+x^2}}$;
indicar ley y dominio de : $f+g$; f /g ; $f \circ g$; $g \circ f$

71.- Dadas f y g hallar (si existen) ley y dominio de $\mathbf{f \circ g}$ y $\mathbf{g \circ f}$

a) $f(x) = \text{sen } x$; $D= [0; 2\pi]$ $\quad g(x) = \sqrt{\mathbf{x}}$
b) $f(x) = \log (2x-8)$ $\quad g(x) = x^2 + 3x$
c) $f(x) = 1/ x$ $\quad g(x) = \cos x$
d) $f(x) = \text{arc sen } x$ $\quad g(x) = x - 2$
e) $f(x) = \ln x$ $\quad g(x) = x^2 - 4$
f) $f(x) = \ln x$ $\quad g(x) = \sqrt{\mathbf{x^2 - 4}}$
g) $f(x) = \sqrt{\mathbf{\ln x}}$ $\quad g(x) = x+2$

72.- Hallar *f* ; *g* y *h* tal que : $\mathbf{F} = \boldsymbol{g \circ f}$ y $\mathbf{G} = \boldsymbol{h \circ g \circ f}$.

a) $F(x) = (x - 9)^5$
b) $F(x) = \text{sen } (x^{½})$
c) $F(x) = 1 / x\text{-}3$
d) $F(x) = \ln^2 x$
e) $F(x) = \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{x^2 + 4}}$
f) $F(x) = \sqrt{\mathbf{\ln x}}$
g) $F(x) = e^{\cos x}$.
h) $G(x) = \text{sen } \sqrt{\mathbf{x^2 - 4}}$
i) $G(x) = \ln (x^2 + 4)^3$
j) $G(x) = \text{arc sen } (\cos x^2)$
k) $G(x) = \cos (1/ (x–2))$
l) $G(x) = 1 / \cos^2 x$
m) $G(x) = 1/ \sqrt{\mathbf{x^2 - 4}}$
n) $G(x) = e^{\cos (\ln x)}$

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS

73.- En un estanque en calma, se deja caer una piedra produciendo ondas en forma de circunferencias concéntricas. El radio (en pies) de la onda externa viene dado por r = r(t) con r(t) = 0.6. t, donde ´t´ es el tiempo en segundos transcurrido desde que la piedra toca el agua. Si con A se indica el área del círculo en función del radio ´r´ obtener e interpretar la función "$A \circ r$".

74.- Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 96 Pies /seg., entonces su altura después de ´t´ segundos es $y = 96\,t - 16\,t^2$ (en pies). Determinar la altura máxima que alcanza la pelota y en qué instante toca el suelo.

75.- La siguiente función da el tiempo ´ t ´ en que se disuelven ´m´ gramos de soluto al poner 20 g. del mismo en contacto con el solvente:

$$\mathbf{t = 3.\ln\left(\frac{40}{40-2\,m}\right)} \quad ; \quad [\,t\,] = \text{hs.} \;;\; [m] = g$$

Se pide:

a) dominio natural de la función que comprende esta ecuación. (*¡cuidado!: $t \geq 0$*)
b) ¿ En qué tiempo se disuelven 10 g. (18 g) ?; ¿cuántos g. de soluto se disuelven en 9 hs. (15 hs) ?
c) hallar la función inversa e informar acerca de lo que permite calcular esta función.

76.- Se coloca un recipiente con agua sobre el fuego. En un principio la siguiente ecuación da la temperatura ´Q´ del agua en cada instante ´ t ´: Q= 20 + 10 t ; [Q]= ºC ; [t] = minutos.
El agua se deja hervir 2 minutos y luego se retira del fuego. En ese preciso instante comienza a enfriarse según la ley: $\mathbf{Q = 10 + \frac{90}{t+\alpha}}$. Considerando que todo el proceso es un proceso ´continuo´ , es decir, que no se observan ´saltos´ de temperatura, se pide:

a) Determinar la temperatura del agua en el instante que se empieza a calentar y el instante ´t´ en que el agua comienza a hervir.
b) Calcular el valor de la constante "α" teniendo en cuenta la ´continuidad´. del proceso.
c) Dar la <u>función</u> que describe <u>todo el proceso</u> desde que se coloca el recipiente sobre el fuego. Graficar esta función.
d) Hallar (si existe) el instante t* en que la temperatura del agua sería igual a la inicial.
e) Hallar (si existe) el instante t** en que el agua se congelaría si no se altera ninguna de las condiciones del proceso.
f) ¿Qué sucede con la temperatura para tiempos ´muy grandes´ ?; ¿qué interpretación física puedo dar a este resultado?.

77.- Si de un resorte ´R´ se suspende una masa (M), el mismo comienza a oscilar con un período ´p´ que se puede calcular con la siguiente expresión:

$$p = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{F \cdot \omega + M}{\kappa}}$$

R

M

F = cte universal (F>0)
ω = masa del resorte
κ = cte del resorte (κ >0)
p = tiempo requerido para una oscilación ´completa´.

a) Analizar si esta ecuación define función.
b) Si hacemos $T = p^2$, expresar T como función de M ($T = f(M)$) e identificar el *tipo de función* de que se trata. Indicar dominio natural y hacer un bosquejo del gráfico de f
c) Dado un resorte de masa ω = 2 g se realiza la siguiente experiencia: se suspende un cuerpo de masa M y se lo deja realizar 100 oscilaciones completas. Se mide el tiempo ´ t_{100}´ que tarda en realizar las 100 oscilaciones. Con este dato se obtiene ´p´, período de oscilación para la masa M. Con p se obtiene T.
¿Cuántas veces hay que realizar la experiencia para poder graficar $T = f(M)$?. ¿Porqué?

M	nro oscilacions	t (seg)	p	T	(M ; f (M))
10 g	100	67. 5			
20 g	100	73. 5			

d) Graficar T versus M. Hallar la ley de f.
e) Hallar κ , constante del resorte.

78.- *El método de ´fechado con radiocarbono´ se basa en el hecho de que el isótopo radioactivo del carbono* ^{14}C *tiene una vida media conocida de cerca de 5700 años. La materia orgánica viva mantiene un nivel constante de* ^{14}C *al ´respirar´ . Así, el porcentaje de este isótopo presente en los organismos vivos es el mismo porcentaje que el existente en el aire. Pero, al morir un organismo, éste deja de metabolizar carbono y comienza el proceso de decaimiento radioactivo; o sea, se comienza a agotar su contenido en* ^{14}C. *Dado que la fracción de* ^{14}C *en el aire es prácticamente constante a través del tiempo se puede entonces determinar la antigüedad de una muestra con sólo medir su contenido en* ^{14}C *y compararlo con el contenido de una muestra actual.*

El carbono extraído de un antiguo cráneo recién desenterrado contiene el 63 % de ^{14}C con respecto del carbono extraído de un hueso actual. ¿Qué antigüedad tiene el cráneo? (Recordar: $\mathbf{y = y_o \cdot e^{\beta t}}$ con y = cantidad de sustancia que queda al cabo de ´t´ años , y tener en cuenta que los datos que se dan son ´vida media´ y que, $y = 63\% \, y_o$)

79.- La población de cierta especie en un ambiente limitado es :

$$P = \frac{100.000}{100 + 900 \; e^{-t}} \quad . \text{ (´t´ se mide en años)}$$

a) ¿ Cuál es la población inicial (t=0) ?
b) ¿Cuánto tarda en llegar a 900 ?. ¿ En llegar a 1000? .
c) Verificar que $P(t) < 1000$; $\forall$ t y que $1000 / P(t) \approx 1000$ para t ´*muy grandes*´. ¿Qué se puede concluir de estos dos datos?.

80.- La EPE (Empresa Provincial de la Energía) ha decidido tomar nuevos empleados. Los aspirantes deben rendir una prueba de selección donde se les da el siguiente problema:

Encontrar la función que permite calcular el importe de la factura de luz según los kilowats (kw) consumidos en un bimestre, para casas de familia, si el mismo resulta de la suma de los montos que se indican a continuación: (datos al 1/4/93)

a) un "monto fijo bimestral" , (MFB), de $11.66.
b) un "monto por consumo de kw", (MC), que se calcula a partir de la TABLA I
c) un monto por "Tasa de Alumbrado Público", (TAP); según TABLA II
d) un monto en concepto de IVA: 18 % de [MFB + MC + TAP]
e) monto por otros impuestos: 3.6 % de [MFB + MC + TAP]

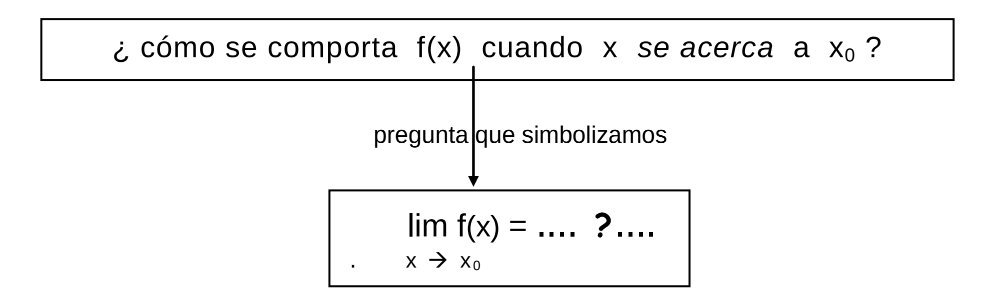
TABLA I [MC]	
kw consumidos	costo 1 kw.
0 [kw < 120	$ 0.074
120 [kw < 240	$ 0.102
240 [kw < 400	$ 0.205
kw] 400	$ 0.244

TABLA II [TAP]	
kw consumidos	importe
0 [kw < 60	-------
60 [kw < 120	$ 1.55
120 [kw < 200	$ 3.96
200 [kw < 400	$ 5.08
400 [kw < 600	$ 7.05
600 [kw < 1000	$ 8.45
kw] 1000	$10.72

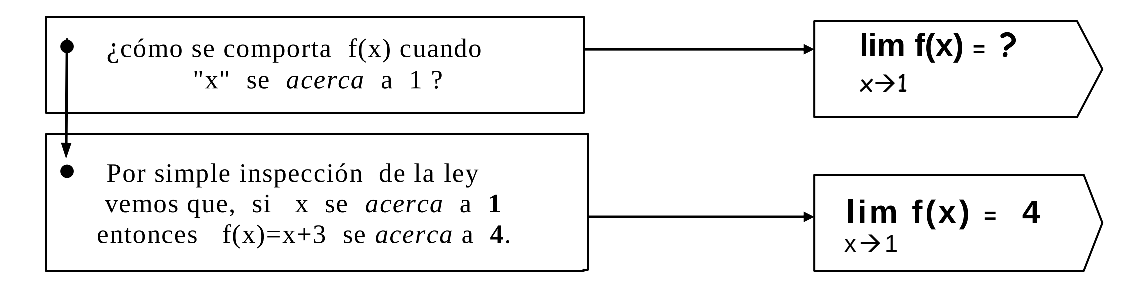
2— Límite y Continuidad

2.1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Dada una función **y =f(x)** y un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}$, en este párrafo planteamos y contestamos el siguiente interrogante:



Ejemplo 1: f (x) = x+3 ; x_0 =1



Ejemplo 2: $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$; x_0 =1

- f (1) no existe; luego, tiene aún más sentido la pregunta: *¿ cómo se comporta f(x) cuando x se acerca a 1?*

$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

En este caso no podemos ver, por simple inspección, qué pasa con f(x) cuando x se acerca a **1**

¿Qué hacemos? : calculamos valores y tratamos de detectar un comportamiento *tendencial* para los f(x).

x	f(x)
0	3
0.3	3.3
0.6	3.6
0.9	3.9
0.99	3.99
0.999	3.999
.....	....
1	4

x	f(x)
2	5
1.6	4.6
1.3	4.3
1.1	4.1
1.01	4.01
1.001	4.001
.....	.....
1	4

Parece que, si **x** se *acerca a* **1** entonces **f (x)** se *acerca* a **4.** ⟼ $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$

Ejemplo 3:

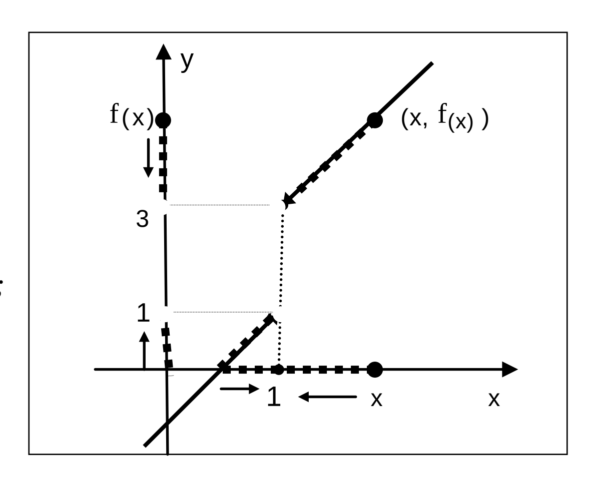
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \ ; \ x < 1 \\ 2x + 1 \ ; \ x > 1 \end{cases}$$

- f (1) no existe; luego, nuevamente tiene sentido la pregunta: *¿ cómo se comporta f(x) cuando x se acerca a 1?* ⟼ $\lim_{x \to 1} f(x) = \ ?$

- ¿qué hacemos en este caso?:

Graficamos f y tratamos de detectar un comportamiento tendencial para los f(x). Así vemos que si:

x→ 1 (x<1); entonces f(x) → 1
x→ 1 (x>1); entonces f(x) → 3



- Del gráfico observamos que cuando x → 1; *f(x) no tiene un comportamiento ´definido´ ;* no se acerca *´a un único número´.*

- La gráfica presenta un **<u>salto</u>** en x=1*;* de allí que para x → 1 el *comportamiento* de f(x) es distinto según los x se acerquen a 1 por la *izquierda* o lo hagan por la *derecha*.

- En este caso decimos que:

$\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$ (no existe)

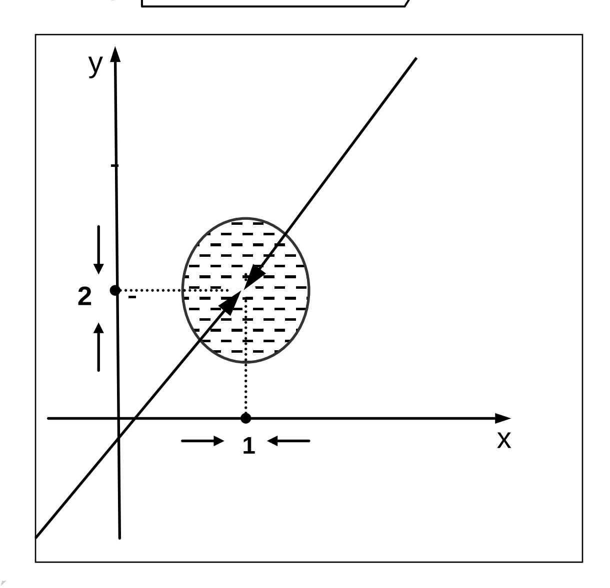
Ejemplo 4:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 0.1 \ ; \ x < 1 \\ 2x + 0.1 \ ; \ x > 1 \end{cases}$$

- f (1) no existe; luego, nos preguntamos:
  ¿ cómo se comporta f(x) cuando x se acerca a 1?

lim f(x) = ?
x→1

- ¿qué hacemos en este caso?:
  Graficamos f y observamos el comportamiento tendencial de los f(x).
  Así apreciamos que,
  si x → 1 entonces f(x) se acerca a 2.



* ¿ Tendrá f un comportamiento <u>definido</u>, tal cual parece a simple vista ?,
¿ o existirá, como en el ej. 3, un <u>salto</u> que impida a los f(x) acercarse a un único número?.

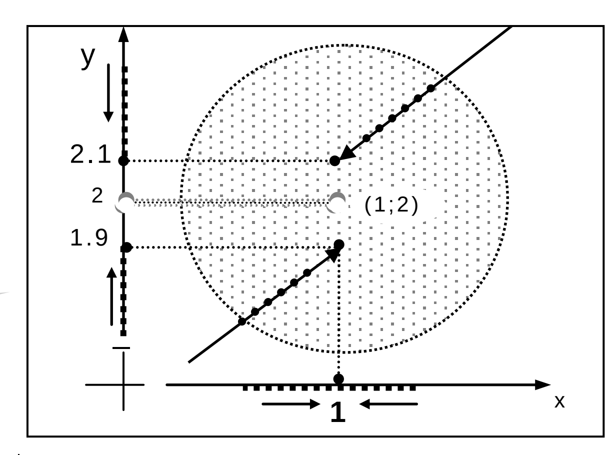
* Dicho de otra manera: ¿ podrán los f(x) acercarse a 2 <u>tanto como quieran</u> ?

* Para contestar este interrogante graficamos nuevamente pero ´ampliando´ el gráfico en la región conflictiva.

- HACEMOS un ZOOM con CENTRO en **(1; 2)**
- ¿qué observamos ahora?, que:

  si x → 1 (x <1); entonces f (x) → 1.9
  si x → 1 (x >1); entonces f (x) → 2.1

- *conclusión:* cuando x → 1;
  f(x) no tiene un comportamiento ´definido´;
  no se acerca *´a un único número´.*



- En este caso también tenemos un <u>salto</u> en x=1, de allí que el comportamiento de f (x) sea distinto según el lado por el cual x tienda a 1. La diferencia con el caso anterior está en que aquí , al trabajar con escalas usuales, el salto <u>puede pasar desapercibido</u>. Luego:

lim f(x) = ∄ (no existe)
x→1

OBSERVACIONES:

1. Los ejemplos analizados muestran que la simple proximidad de f(x) a un cierto número no basta para que tal número sea <u>límite de la función</u>. Resulta evidente que para que ello ocurra debe pasar algo más: que los f(x) se aproximen <u>tanto como quieran</u> a dicho número; que no exista ninguna ´barrera´ que les impida llegar a él.
2. Así, con la expresión "f(x) tiene comportamiento definido"; a partir de ahora entendemos, " <u>f (x) se acerca a un único número y lo hace tanto como quiera</u>."

3. Llegado a este punto surgen dudas acerca de los ejemplos 1 y 2; en ambos casos vimos que si x→1 entonces f(x)→ 4 y concluimos que el <u>límite era 4</u>. Pero, ¿no pasará aquí lo mismo que en el último ejemplo y, como en este caso, el salto es tan pequeño que no lo pudimos apreciar en razón del método usado?.
   Así, si hacemos un "zoom" en el gráfico de "f " alrededor del punto (1;4) (*);
   ¿no aparecerá un salto y tendremos en consecuencia que el límite *no existe* ?.

(*) *Cabe aclarar aquí que si al aplicar el zoom no visualizamos un "salto" podemos continuar ampliando la imagen a través de seguir aplicando el zoom. Si tal fuera el caso, ¿qué pasa si no visualizamos un salto aún después de varias ampliaciones?; ¿significa esto que <u>no existe salto</u> ?.*
En circunstancias como estas debemos extremar los cuidados ya que pudiera ser que el salto fuera infinitamente pequeño e imposible de capturar con un dispositivo graficador. A lo sumo podrá aumentar nuestra confianza de que el salto no existe, pero nunca, por este camino, alcanzaremos la <u>certeza de ello</u>. Que <u>no existe salto</u> o, equivalentemente, que <u>existe límite</u>, sólo podremos asegurarlo si podemos <u>demostrar</u> este supuesto.
Pero: ¿cómo demostramos un límite ?. Para ello necesitamos precisar la definición de límite.

<u>RESUMEN:</u>

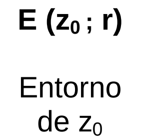
• $\lim_{x \to x_0} f(x) =$	¿qué comportamiento tiene f(x) cuando x se *acerca* a x_0 ?
• $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{L}$	cuando x se *acerca* a x_0 , f(x) tiene un comportamiento definido; se acerca *tanto como quiera* al único número **L.**
• $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$	cuando x se *acerca* a x_0 , f(x) **no** tiene un comportamiento definido; **no** se acerca, *tanto como quiera*, a un único número.

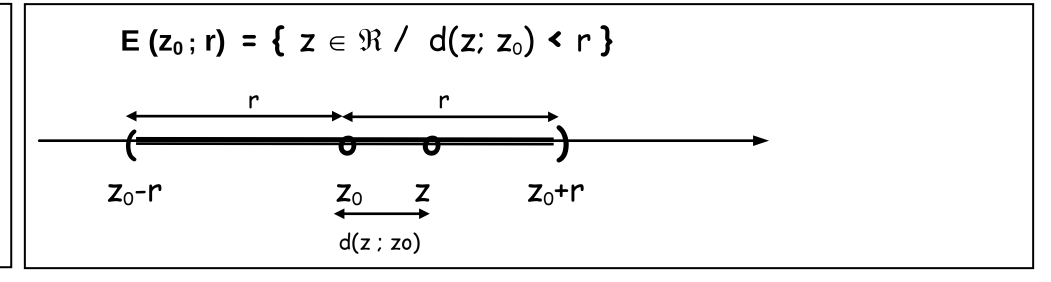
DEFINICION (´coloquial´ de límite de una función en un punto)

$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{L}$ ⇔ cuando x se acerca a x_0 , f (x) se acerca al único número **L** ; <u>tanto como quiera</u>, sin importar lo que pasa en x_0.

➢ En lo que sigue procedemos a ´traducir´ esta definición al lenguaje ´matemático´. Para ello necesitamos definir el concepto de : <u>entorno de un punto</u>.

DEFINICIÓN:





DEFINICIÓN:

E* (z_0 ; r) Entorno reducido de z_0 de radio r	Es el conjunto obtenido cuando a un entorno se le quita *el centro* . $\mathbf{E^*(z_0 ; r) = E(z_0 ; r) - \{ z_0 \}}$. $\mathbf{E^*(z_0 ; r) = \{ z \in \Re \ / \ 0 < d(z; z_0) < r \}}$

Observaciones:

1) **E (z_0; r) =** (z_0 -r ; z_0 + r) (intervalo simétrico con centro en z_0).

Esta igualdad se prueba fácilmente a partir de la definición de distancia entre números reales, d(z, z_0) = | z - z_0 |, y propiedades del valor absoluto (Apéndice A).

2) Si analizamos el concepto dado vemos que este se corresponde con la acepción vulgar de la palabra ´entorno´; o sea, representa el conjunto de todo aquello que está ´próximo´ a alguien o algo (en nuestro caso a z_0). Es fácil de aceptar así que:

z *"cerca"* de z_0 $\approx$ d(z, z_0) < **r** $\approx$ z $\in$ **E (z_0; r)** (para r *convenientemente pequeño*)

Resumiendo:

z "cerca" de z_0 $\approx$
- d(z, z_0) **< r** (para "r" *conveniente)*
- |z - z_0 | **< r** (para "r" *conveniente)*
- z $\in$ **E (z_0; r)** (para "r" *conveniente)*
- z $\in$ **(z_0-r ; z_0+r)** (para "r" *conveniente)*

3) Existen entonces distintas forma de expresar ´matemáticamente´ la expresión coloquial ´z cerca de z_0 ´. Podemos proceder así a traducir la definición de límite de su ´forma coloquial´ a su ´forma matemática´.

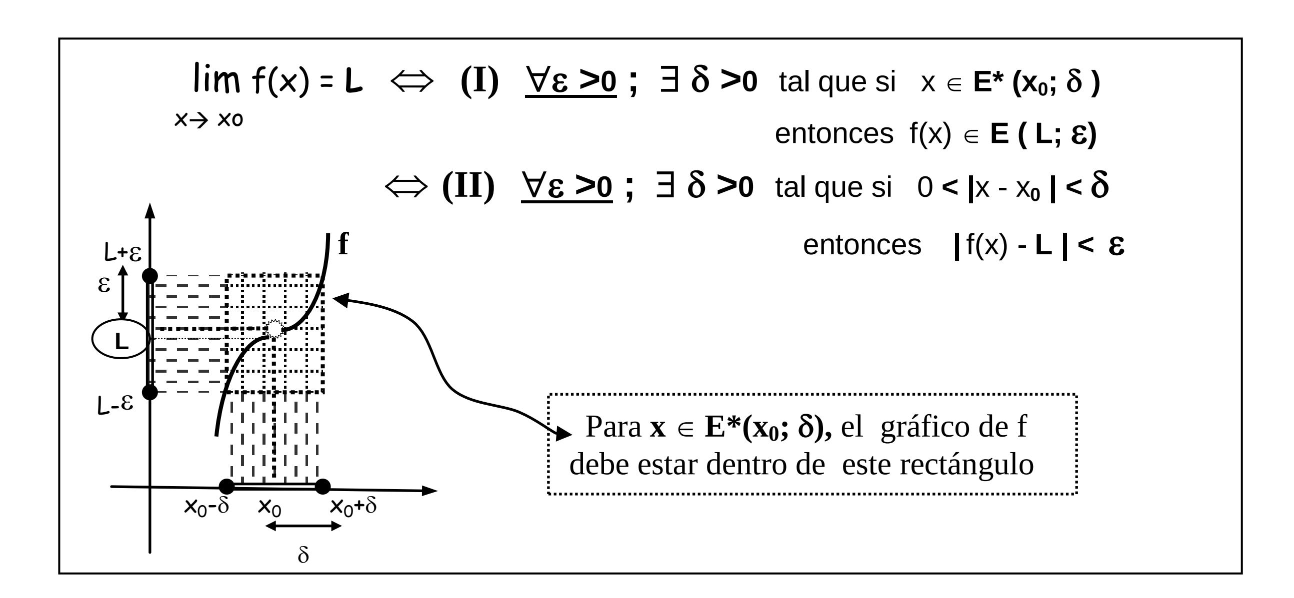
Traducción de la definición coloquial a la matemática (topológica)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $\Leftrightarrow$

cuando x se acerca a x_0 ,	(1)
f (x) se acerca al único número **L**;	(2)
tanto como quiera,	(3)
sin importar lo que pasa en x_0.	(4)

Lenguaje coloquial	lenguaje "matemático"
(1) y (4) x *cerca* de x_0 $x \neq x_0$	x $\in$ **E* (x_0 ;δ)** (para δ *conveniente)*
(2) f(x) *cerca* de **L**	f(x) $\in$ **E(L; ε)** (para ε *conveniente*)
(3) tanto como quiera (esto significa que por más chico que tomemos el entorno de L, o sea, por más chico que tomemos **ε**, siempre encontraremos en él algún f (x) proveniente de un x próximo a x_o)	**∀ε , ∃ δ** tal que , si x $\in$ **E* (x_0 ;δ)** entonces, f (x) $\in$ **E(L; ε)**

➢ Luego, concluimos las siguientes **DEFINICIONES FORMALES**:



Observaciones:

1) las definiciones ´coloquial´, (I) y (II) de límite de una función en un punto son definiciones equivalentes ; o sea, dicen "*lo mismo*" aunque de distintas formas.
2) La **definición (II)** (llamada definición **"ε, δ"**) se obtiene de *calcular* las distancias indicadas en los respectivos entornos:

- $E^*(x_0;\delta) = \{ x \in \Re \,/\, 0 < d(x; x_0) < \delta \} = \{ x \in \Re \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta \}$
- $E(L;\varepsilon) = \{ y \in \Re \,/\, d(y; L) < \varepsilon \} = \{ y \in \Re \,/\, |y - L| < \varepsilon \}$

➢ *Verificación de límite de una función en un punto.*

La definición rigurosa del concepto de límite permite ahora verificar límites; o sea, supuesto que L es el límite de una función, demostrar que esto es efectivamente así.
L puede ´intuirse´ a partir de una tabla de valores, del análisis de un gráfico, etc.

Ejemplo 1: $f(x) = 2x+3 \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 5$ (intuitivamente, si x está cerca de 1, f (x) está cerca de 5)

- Si; $\forall \varepsilon > 0$ encontramos $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|f(x) - 5| < \varepsilon$; entonces habremos verificado la definición y $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

Prueba: $|\mathbf{f(x) - 5}| = |(2x+3) - 5| = 2.|\mathbf{x-1}| \rightarrow$

- observamos que si :
  $2.|x-1| < \varepsilon$ entonces $|f(x)-5| < \varepsilon$
- y, si :
  $|x-1| < \boldsymbol{\varepsilon/2}$ entonces $2.|x-1| < \varepsilon$

Luego, para $\boldsymbol{\delta = \varepsilon/2}$ resulta que:

$$\mathbf{0} < |\mathbf{x-1}| < \boldsymbol{\delta} \Rightarrow |x-1| < \varepsilon/2 \Rightarrow 2.|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |\mathbf{f(x) - 5}| < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

o sea, para cada $\boldsymbol{\varepsilon}$ hallamos un δ ($\boldsymbol{\delta = \varepsilon/2}$) para el cual se cumple la definición.

Luego, verificamos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

Ejemplo 2: $f(x) = mx+h \rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Por definición: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0\ /\ 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \boldsymbol{\varepsilon}$

Prueba: $|\mathbf{f(x) - f(x_0)}| = |\mathbf{m}| . |\mathbf{x - x_0}|$

Si tomamos $\boldsymbol{\delta} = \varepsilon/|m|$:

$$\mathbf{0} < |\mathbf{x - x_0}| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon/|m| \Rightarrow |m|.|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |\mathbf{f(x) - f(x_0)}| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dado $\boldsymbol{\varepsilon}$ encontramos $\boldsymbol{\delta}$ ($\delta = \varepsilon/|m|$). Luego verificamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_o)$

Ejemplo 3: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$; $\mathbf{x_0} = 1$; $\lim_{x \to 1} f(x) = \mathbf{?}$

En la pag. 127 tratamos esta función y, a través de una tabla de valores, observamos que si $x \rightarrow 1$ entonces los $f(x) \rightarrow 4$. Luego: ¿ $\lim_{x \to 1} f(x) = \mathbf{4}$?

El límite es 4 $\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}; \exists\ \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ tal que $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - \mathbf{4}| < \boldsymbol{\varepsilon}$

En este caso, antes de hacer la verificación, observamos que:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = \frac{(x+3).(x-1)}{x-1} = (x+3)$$

$\mathbf{x \neq 1}$

Si ahora consideramos la función constante h(x) = x+3, vemos que,
$\forall$ **x ≠ 1** es **f(x) ≡ h(x)** ; y dado que en el límite no importa el comportamiento de la función en el punto x_0 (en este caso 1) ; tenemos que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = 4$$ [obs: hemos verificado de *otra forma*]

Ejemplo 2

Observación: La "verificación" de un límite aplicando la definición generalmente es muy difícil. Luego, para simplificar el trabajo, conviene buscar otros caminos que, siendo correctos, sean más simples. (como en el ejemplo 3). Para ello necesitamos conocer "propiedades" del límite.

➢ ***PROPIEDADES del límite de una función en un punto.***

Sean f y g dos funciones tales que; $\lim_{x\to x_o} \mathbf{f(x)} = \mathbf{A}$ y $\lim_{x\to x_o} \mathbf{g(x)} = \mathbf{B}$.

TEOREMA 1: $\lim_{x\to x_o} [\, \mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)} \,] = \mathbf{A + B}$.

TEOREMA 2: $\lim_{x\to x_o} [\, \mathbf{f(x)} . \mathbf{g(x)} \,] = \mathbf{A . B}$.

TEOREMA 3: $\lim_{x\to x_o} \dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$; [siempre que $\mathbf{B \neq 0}$]

Observación:
La demostración de estos teoremas (que aquí omitimos) se hace usando la definición de límite. Una vez demostrados en general podemos aplicarlos a cualquier caso particular.

Ejemplo 4: dada $h(x) = x^2$ hallar $\lim_{x\to 3} h(x)$

En este caso h se puede pensar como el producto de " f . f " con f (x) = x (lineal) .
Luego, como ya sabemos calcular el límite para una función lineal, si acudimos al teorema 2 tenemos una forma muy simple de calcular *rigurosamente* el límite pedido.

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3} [f(x) .f(x)] = f(3) .f(3) = (3) . (3) = 9$$

Teorema 2 y ejemplo 2

Nota: en este caso tenemos que h(3) = 9 ; o sea, que $\lim_{x\to 3} h(x) = h(3)$

Este hecho también lo verificamos en el caso de la función lineal; o sea, estamos viendo que si la función existe en el punto el límite resulta ser el valor de la función en el punto.
Nos preguntamos: ¿*será esto siempre así* ?. Vemos más ejemplos y concluimos.

Ejemplo 5:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 \; ; & x \neq 1 \\ 1 \; ; & x = 1 \end{cases}$$

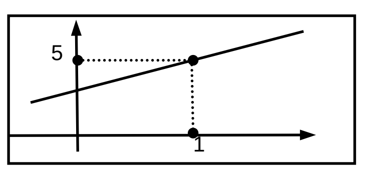
- si h(x) = x+3 $\forall$**x**, entonces f(x)= h(x) $\forall$ **x** ≠1 y $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = 4$

Luego, en este caso L = 4 y f (1)=1; o sea, L ≠ f (1).

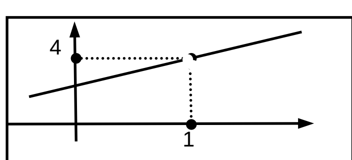
Ejemplo 6: f (x) = [x] . Aquí, $\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$ y f(1) = 1

♦ ***Estudio general de la relación entre L y f (x_0).***

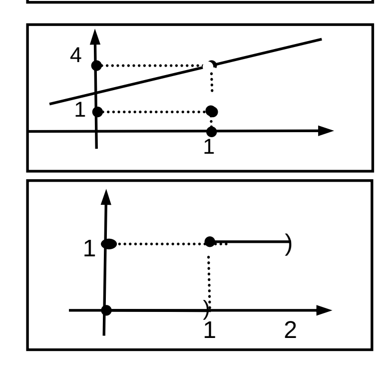
Repasamos los ejemplos vistos hasta ahora:



Ejemplo 1: f (x) = 2x+3 → $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$



Ejemplo 3: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$ → $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$



Ejemplo 5: $f(x) = \begin{cases} x + 3 \; ; & x \neq 1 \\ 1 \; ; & x = 1 \end{cases}$ → $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$

Ejemplo 6: f (x) = [x] → $\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$

RESUMIENDO:

	Ej. 1	Ej. 3	Ej. 5	Ej. 6
f(1)	**5**	$\nexists$	**1**	**1**
L	**5**	**4**	**4**	$\nexists$
¿ f(x_0)= L?	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
OBSERVACIONES	**GRÁFICO CONTINUO**	∃ lim *no implica* ∃ f(x_0)	∃ lim *no implica* L = f(x_0)	∃ f(x_0) *no implica* ∃ lim
		El grafico presenta *"saltos"* ó *"agujeros"*		

<u>CONCLUSIONES</u> :

Vemos entonces que el límite y el valor de la función en el punto coinciden "solo en un caso": cuando el gráfico de f es una curva que no presenta "*saltos*" ni "*agujeros*" ; o sea, cuando es una curva "*continua*".

A partir de ahora llamamos *funciones continuas*. a las funciones cuyo gráfico sea una *curva continua*. En lo que sigue, y a los efectos de poder estudiar analíticamente la continuidad de una función en un punto, definimos rigurosamente este concepto.

2.2 Continuidad

DEFINICION:

Continuidad de una función en un punto	f continua en x_0 $\Leftrightarrow$ 1) $\exists$ $f(x_0)$ 2) $\exists$ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *Equivalentemente*: f continua en x_0 $\Leftrightarrow$ cuando x se acerca a x_0, f(x) se acerca tanto como se quiera a **$f(x_0)$**´.

DEFINICION:

Continuidad de f en un dominio D	f continua en D $\Leftrightarrow$ f continua en x_0 ; $\forall\, x_o \in$ D.

Observaciones:

a) en relación al gráfico de una función podemos decir que:
- f continua en x_o si graf. f no presenta saltos ni agujeros en x_o..
- f continua en D si graf. f no presenta saltos ni agujeros en D.

b) la condición 3 comprende las otras dos(*); luego, podemos decir:

$$\text{f continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

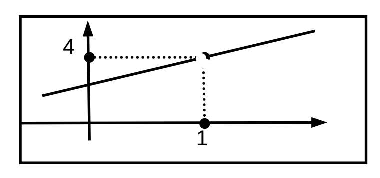
(*) ¿porqué damos tres condiciones?, simplemente porque tener presentadas así las condiciones para la continuidad facilita el correspondiente análisis, lo hace más operativo pues apenas detectamos una condición que no se cumple, sin necesidad de revisar las otras, podemos concluir que la función no es continua en ese punto. Por ejemplo, basta que no exista la función en el punto para que no sea continua en dicho punto.

Ejemplo: para f(x) = mx+h , demostramos que $\forall\, x_o$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (ej. 2, pag.133).

Luego, <u>la función lineal es continua en todo los reales</u>.

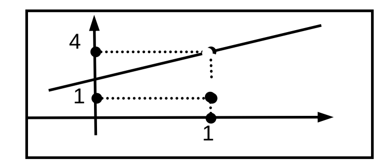
Para los ejemplos vistos en la página anterior, tenemos:

Ejemplo 3: $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$; <u>*f no es continua en* x_o=1</u>



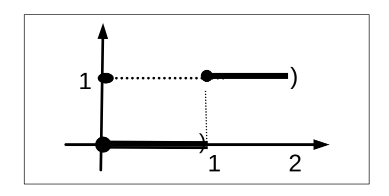
- f no está definida en x_o=1 $\Rightarrow$ no cumple la *condición 1*; (aún cuando el límite exista ; $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$, ej. 3, pag.133).

Ejemplo 5: $f(x) = \begin{cases} x+3 ; & x \neq 1 \\ 2 ; & x = 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$



- f está definida en x_o=1 $\Rightarrow$ cumple la *condición 1*
  $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ $\Rightarrow$ cumple la *condición 2*
- f (1) = 2 $\neq \lim_{x\to 1} f(x)$ $\Rightarrow$ no cumple la *condición 3* $\Rightarrow$ <u>*no es continua en* x_o=1</u>

Ejemplo 6: f (x) = [x] → $\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$



- f está definida en $x_o = 1$ ⇒ cumple la *condición 1*
- $\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$ ⇒ no cumple la *condición 2*

⇒ no es continua en $x_o = 1$

Notas:

1- de los ejemplos propuestos observamos que existen distintas causas para la ´discontinuidad´ en un punto y que la ´importancia´ de las mismas se ´refleja´ en el gráfico de la función. Esencialmente, cuando el límite existe, la gráfica presenta una ´perforación´ en el punto mientras que, cuando el límite no existe, la gráfica presenta un ´salto´. Esto permite clasificar las discontinuidades evitables y no evitables, cuestión que vemos al final de este capítulo.

2- en la búsqueda de hechos o propiedades que permitan el cálculo del límite de una función en un punto en forma precisa y sin tener que acudir a la definición para verificar, la continuidad aparece como una propiedad muy útil a tal fin ya que, conocida la continuidad en el punto, el límite es, simplemente, el valor de la función en el punto. Tenemos así que para una categoría muy importante de funciones, las funciones continuas , la obtención de límites se reduce a un simple cálculo: el de la función en el punto.

Pero ¡cuidado!, antes de proceder a calcular de esta forma, debemos estar absolutamente seguros de la continuidad de la función en el punto.

.... En esta instancia y tal como vienen las cosas, surge un problema:

dada una función f y un punto, ¿cómo averiguamos la continuidad de f en el punto?.

Entre otras acciones, calculando el límite de f en el punto.

Y entramos así en un círculo vicioso: la continuidad ayuda en el cálculo del límite pero, para decidir la continuidad, tenemos que calcular un límite.

..... ¿Cómo resolvemos este problema?:

buscando una forma alternativa de decidir la continuidad.

…… y , para esto, necesitamos conocer más acerca de las funciones continuas.

♦ *Propiedades de las funciones continuas*

Sean f y g dos funciones continuas en x_0 , luego:

TEOREMA 4: $\lim_{x \to xo} [f(x)+g(x)] = f(x_0)+ g(x_0)$ (→ la suma de continuas es continua).

TEOREMA 5: $\lim_{x \to xo} [f(x).g(x)] = f(x_0) .g(x_0)$ (→ el producto de continuas es continuo)

TEOREMA 6: $\lim_{x \to xo} [f(x) /g(x)] = f(x_0)/g(x_0)$ (→ el cociente de continuas en x_0, es continuo en x_o siempre que $g(x_0) \neq 0$)

TEOREMA 4: (Demostramos el teorema 4, el resto queda como ejercicio).

Por hipótesis, f continua en x_0 ⇒ $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$

Por hipótesis, g continua en x_0 ⇒ $\lim_{x \to x_o} g(x) = g(x_0)$

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) + g(x)] \overset{teor.1}{=} \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

Conclusión: f + g es continua en x_o .

TEOREMA 7: (composición de continuas es continua)

$$\left.\begin{array}{l} \text{- f continua en } x_0 \\ \text{- g continua en } u_0 = f(x_0) \\ \text{- } \exists\ g_o f(x),\ \forall x \in E(x_0;\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow g_o f \text{ es continua en } x_0$$

Demostración (intuitiva):

» $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$ (1) ; (por la continuidad de f en x_0)
» $u \to u_0 \Rightarrow g(u) \to g(u_0)$ (2) ; (por la continuidad de g en u_0)
» si hacemos $u = f(x)$ entonces:

$$x \to x_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \underbrace{f(x)}_{u} \to \underbrace{f(x_0)}_{u_0} \overset{(2)}{\Rightarrow} g(\underbrace{f(x)}_{u}) \to g(\underbrace{f(x_0)}_{u_0}) = g_o f(x_0);$$

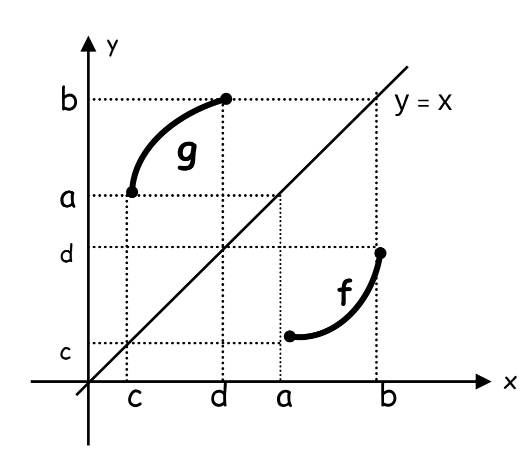
O sea: $\lim_{x \to x_0} g_o f(x) = g_o f(x_0)$

Conclusión: $g_o f$ es continua en x_0 .

TEOREMA 8: (inversa de continua es continua)

$$\left.\begin{array}{l} \text{- f biyectiva en (a; b)} \\ \text{- f continua en (a; b)} \\ \text{- Im f = (c ; d)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{g (inversa de f) es continua en (c;d)}$$

Justificación (gráfico-intuitiva):



» Si f es continua en (a;b) , su gráfico no presenta saltos ni agujeros;
» el gráfico de g es simétrico del de f respecto de la recta $y=x$;
» luego, el gráfico de g no presenta ni saltos y agujeros.
» *Conclusión*: g es continua en su dominio (c;d).

Observaciones:

Según establecimos ya en otro párrafo, si conocemos que una función es continua en un punto el cálculo del límite se reduce a una operación muy simple: *cálculo del valor de la función en el punto.*
También aclaramos que debíamos tener cuidado, que antes de aplicar este método debíamos estar seguro que la función fuera continua en el punto; el problema que esto representaba.
A este respecto los teoremas 4 a 8 muestran distintas propiedades de las funciones continuas cuya importancia radica, esencialmente, en que permiten decidir acerca de la

continuidad de una función en un punto sin necesidad de acudir a la definición de límite en cada caso.
A continuación, y a los efectos de usar luego esta información en el cálculo de límites, establecemos que funciones son continuas, donde y porqué.

FUNCIONES CONTINUAS

FUNCION	DOMINIO de CONTI NUIDAD	$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$	JUSTIFICACIÓN
◆ $f(x)= k$ (cte)	**R**	$L = k$	por verificación
◆ $f(x)=mx+h$ (lineal)	**R**	$L = mx_0+h$	por verificación
◆ $f(x)$=polinomio	**R**	$L= f(x_0)$	suma y prod. de continuas (suma y/o prod. de lineales)
◆ $f(x)= \sqrt{x}$	$\mathbf{R}^+$	$L= \sqrt{x_o}$	inversa de cont. (x^2)
◆ $f(x)= p(x)/q(x)$ (rac.)	**R**-{a/ q(a) = 0}	$L=p(x_0)/q(x_0)$	cociente de $cont_s$. (pol_s)
◆ $f(x) = \log x$	$\mathbf{R}^+$	$L= \log x_0$	por verificación
◆ $f(x)= a^x$	**R**	$L= a^{x_0}$	inversa de $cont_s$. (log)
◆ $f(x) = \operatorname{sen} x$	**R**	$L= \operatorname{sen} x_0$	por verificación
◆ $f(x) = \cos x$	**R**	$L= \cos x_0$	por verificación
◆ $f(x) = \operatorname{tg} x$	**R**-{a /cos x=0}	$L= \operatorname{tg} x_0$	cociente de continuas
◆ $f(x) = a^{h(x)}$	-dom. de cont. de h	$L= a^{h(x_0)}$	composición de $cont_s$.
◆ $f(x)= \log (h(x))$	-dom. de cont. de h y $h(x_o)>0$	$L= \log(h(x_0))$	composición de $cont_s$.
◆ $f(x)= h(x)^{k(x)}$	-dom. de cont. de h ∩ dom. cont. k y $h(x_o)>0$	$L= h(x_0)^{k(x_0)}$	composición de $cont_s$.

<u>NOTA</u>: $f(x) = h(x)^{k(x)}$ es una composición de funciones pues:

$$f(x) = h(x)^{k(x)} = e^{\log(h(x)^{k(x)})} = e^{k(x).\log h(x)} = e^{p(x)} \text{ con } p(x) = k(x).\log h(x)$$

2.3 Cálculo de Límite, Otros Casos

2.3.1 Límites Laterales:

En el caso de una función definida con distintas leyes a ambos lados de un punto, para calcular el límite en dicho punto estudiamos el comportamiento de la función en cada lado por separado. Para ello definimos los LIMITES LATERALES.

DEFINICION 1: límite lateral ´por derecha´.

$\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = L \Leftrightarrow$

Cuando $x \to x_0$ $(x > x_0)$; entonces f(x) se acerca a L y tanto como quiera.

$\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists\ \delta > 0$ tal que si $x_o < x < x_o + \delta$ entonces $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$

DEFINICION 2: límite lateral ´por izquierda´.

$\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = L \Leftrightarrow$

Cuando $x \to x_0$ $(x < x_0)$; entonces f(x) se acerca a L y tanto como quiera.

$\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists\ \delta > 0$ tal que si $x_o - \delta < x < x_o$ entonces $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$

TEOREMA 9:

El límite ordinario existe si y sólo si existen los laterales y son todos iguales.

O sea: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = L$.

Demostración: ejercicio

2.3.2 Otras Propiedades Del Límite

TEOREMA 10: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - L) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \lvert f(x) - L \rvert = 0$ (s/d)

Corolario: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert = 0$

TEOREMA 11: (teorema de conservación del signo)

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y $L \neq 0$, entonces existe un entorno reducido de x_0 en el cual el signo de f(x) es igual al signo de L.

Demostración: la dividimos en dos partes según $L > 0$ ó $L < 0$.

* 1er caso: **L > 0**

Por hipótesis $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$; luego,

dado $\varepsilon > 0$, *cualquiera que este sea*, siempre podemos hallar $\delta > 0$, tal que :

$\forall x$ tal que $x \in E^*(x_o, \delta)$ resulta $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$;

o sea, $\forall x$ tal que $x \in E^*(x_o, \delta)$ resulta $\underbrace{\mathbf{L - \varepsilon < f(x)}}_{(*)} < L + \varepsilon$

Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2} L$ (posible pues $L > 0$) y lo reemplazamos en (*), tenemos:

$\forall x$ tal que $x \in E^*(x_o,\delta)$ resulta $L - \frac{1}{2} L < f(x) \Rightarrow \frac{1}{2} L < f(x)$

Conclusión: $L > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} L > 0$. Luego, $f(x) > \frac{1}{2} L \Rightarrow f(x) > 0$

Como $L > 0$, hemos probado así que, $\forall x \in E^*(x_o,\delta)$, f(x) tiene el mismo signo que L.

* 2do caso: $L < 0$ (ejercicio)

TEOREMA 12: (propiedad de monotonía)- (s/d)

$$\left.\begin{array}{l} - \ f(x) \leq g(x)\ ;\ \forall x \in E^*(x_0;\delta) \\ - \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \\ - \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

TEOREMA 13: (teorema de "encaje" de límites, ó teorema "sandwich") -(s/d)

$$\left.\begin{array}{l} - \ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ ;\ \forall x \in E^*(x_0;\delta) \\ - \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

2.3.3 Límites de Cociente de Funciones. Casos Especiales

En el teorema 3; estudiamos el límite del cociente de dos funciones en el caso que ambas tienen límite y el del denominador es distinto de cero.
En este párrafo estudiamos los otros casos, particularmente que pasa cuando el límite del denominador es cero.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

$\longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?$

CASO 1 $A \neq 0$; $B \neq 0$ $\Rightarrow$ [Teor. 3] $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

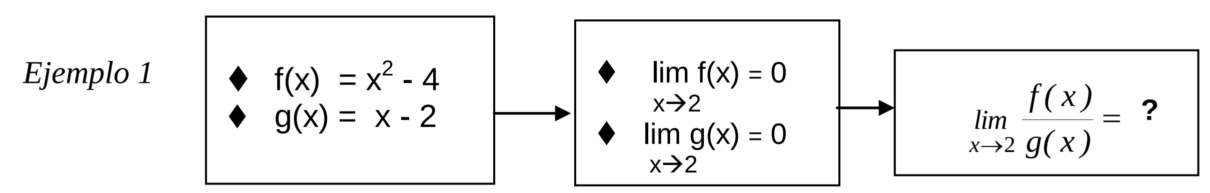
CASO 2 $A \neq 0$; $B = 0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?$ → (más adelante, en ´límites infinitos´)

CASO 3 $A = 0$; $B = 0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?$ → problema de INDETERMINACION

- ¿qué es una indeterminación?:
- es un problema para el cual no se puede asegurar "a priori" el carácter del límite Este puede existir como no existir, ser nulo como no, su carácter se encuentra absolutamente ligado a las peculiaridades de las funciones intervinientes, (cosa que no sucede, por ej., en el CASO 1, donde el límite siempre existe más allá de las particularidades de cada función).

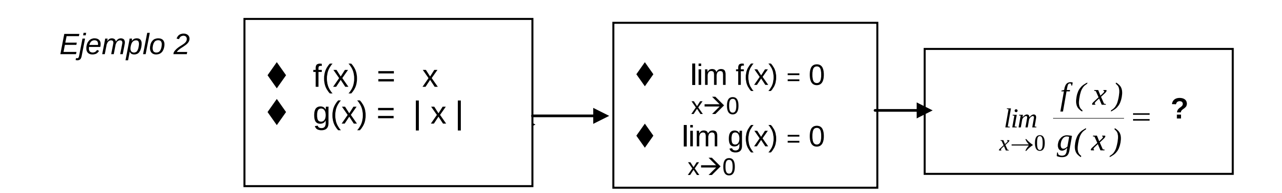
O sea, son problemas para los que no es posible enunciar resultados de carácter *general*, donde cada caso tiene que ser estudiado en particular, teniendo en cuenta las propiedades presentadas por "f" y "g" .

Ejemplo 1



- trabajamos algebraicamente la función hasta ´romper la indeterminación´; o sea, hasta llegar a una función cuyo límite podamos calcular.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2).(x+2)}{x-2} \underset{x \neq 2}{=} (x+2) = h(x)$
- h(x) = x+2 lineal $\Rightarrow$ continua en todo su dominio $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_o} h(x) = h(x_o)$
- como, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ = h(x) , $\forall$ x $\neq$ 2 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 2} h(x) = h(2) = 4$

Ejemplo 2



- trabajamos algebraicamente la función hasta ´romper la indeterminación´; o sea, hasta llegar a una función cuyo límite podamos calcular.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{|x|} = h(x) = \begin{cases} 1 \;, si \;\; x > 0 \\ -1 \;, si \;\; x < 0 \end{cases}$
- h es una función seccionalmente definida, luego podemos calcular el límite a través del cálculo de los límites laterales.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -1 = -1$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$

  $\underset{teor.9}{\Rightarrow} \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \nexists$

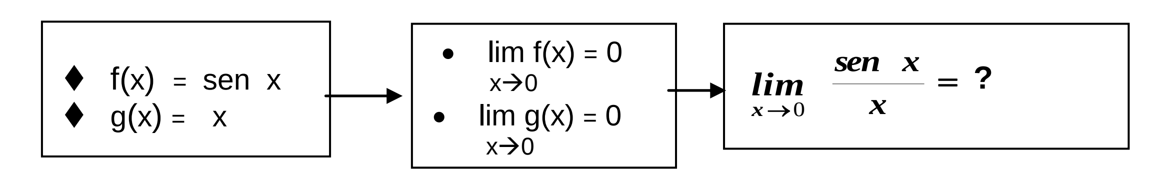
<u>C*onclusión*</u> los ejemplos muestran que una indeterminación del tipo 0/0, al ser ´rota´, puede derivar en dos tipos de situaciones: una en la que el límite existe (ej. 1) y otra, en que el límite no existe (ej. 2)

¿CÓMO RESOLVEMOS un PROBLEMA de INDETERMINACIÓN?

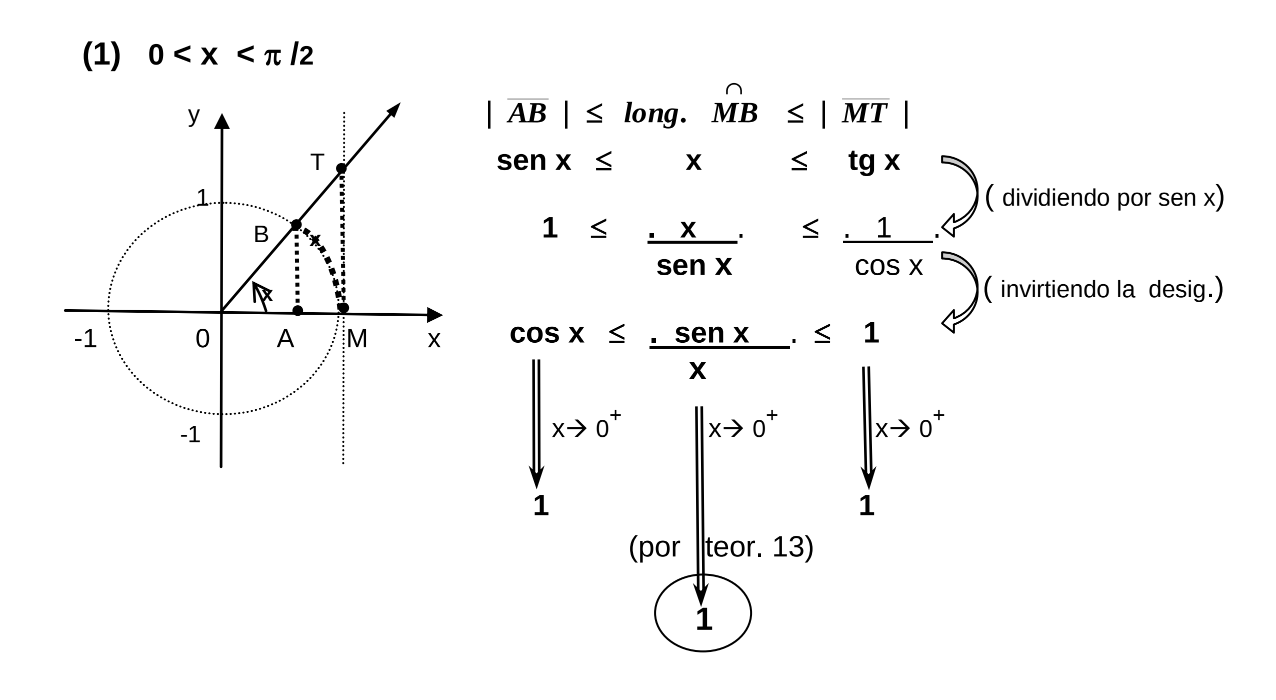
- *Si es posible, trabajamos algebraicamente la función f/g hasta "romper" la indeterminación; o sea, hasta llegar a una nueva función "h" cuyo límite se conozca o se pueda calcular y tal que f/g = h , por lo menos, en un entorno reducido del punto.*
- *¿y si el trabajo algebraico, no es posible? …………*

En el caso que no se pueda realizar el trabajo algebraico no queda otro camino que acudir a propiedades de los límites (teoremas), de las funciones, a gráficos, tablas, etc.
Tal es el caso de sen x / x .

Caso especial : $\dfrac{sen\ x}{x}$



Para esta función no podemos realizar ningún trabajo algebraico que permita plantear el problema en una forma equivalente y más simple. Para investigarla tenemos distintos caminos, optamos por el que permite obtener la conclusión con absoluta certeza.
Para ello estudiamos el comportamiento de la función en un entorno del cero acudiendo a resultados de la trigonometría y propiedades de límite, analizando por separado que sucede cuando nos acercamos a cero por derecha (1) y por izquierda (2).



Conclusión 1: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$

(2) **- π /2 < x < 0** ⇒ 0 < (-x) < π /2

x 0 -x

En esta instancia, y siendo imposible ´simplificar la expresión´ acudimos a otro recurso algebraico válido para el cálculo de límite: el *´cambio de variable´*. Este proceso permite ´cambiar´ la expresión dada por otra cuyo límite sí sabemos o podemos calcular: Así:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{sen\ x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\,sen\ x}{-\,x} \underset{sen\ impar}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{sen(-x)}{-\,x} \underset{\substack{-x=u \\ x \to 0^- \\ u \to 0^+}}{=} \lim_{u \to 0^+} \frac{sen\ u}{u} \underset{(1)}{=} 1$$

Conclusión 2: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$

Conclusión final: *los límites laterales son iguales, luego:* $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1}$

Observaciones:

1) Hemos concluido que el límite es "1", o sea que si **x ≈ 0** entonces $\dfrac{sen\ x}{x}$ **≈ 1**. Esto último nos dice que para **x ≈ 0**, resulta **sen x ≈ x**, y este dato es <u>muy importante</u>; ya que indica que en las proximidades del cero *el valor del seno de un ángulo y el valor del ángulo* (¡en radianes!) son prácticamente iguales. Este hecho facilita enormemente la resolución de problemas donde intervienen ángulos muy pequeños, ya que a raíz de esto podemos sustituir el seno del ángulo por el ángulo, sin introducir un error importante.

2) Cada vez que tengamos un problema de esta naturaleza, "sen(*argumento*)/*argumento* ", donde el ´argumento del seno´ se hace cada vez más pequeño (→ 0), podemos aplicar el resultado anterior y asegurar que el cociente tiende a 1. O sea:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{sen\ (f(x))}{f(x)} = ? \\ y \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1 \qquad (\#)$$

(*) La demostración de este resultado queda como ejercicio. El mismo se prueba fácilmente acudiendo al recurso del ´cambio de variable´, haciendo *f(x) = u*.

Ejemplo I : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{sen\ (x-2)}{x-2} = 1$ pues aquí, ***f (x) = x-2*** y $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

3) debemos tener cuidado y no hacer uso indiscriminado de los resultados que vamos obteniendo: los mismos valen, <u>*bajo ciertas condiciones*</u>. Así, para aplicar (#) debemos estar seguros de que estamos ante una indeterminación del tipo $0/0$.

Ejemplo II: $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{sen\ (x^2 - 9)}{x^2 - 9} = ?$

Aquí, el procedimiento a aplicar para el cálculo del límite, <u>*depende del valor de ´b´*</u>

→ si **b = 3** (ó b = -3) tenemos una indeterminación del tipo $0/0$, aplicamos (#)

$$\lim_{x \to 3} \frac{sen\ (x^2 - 9)}{x^2 - 9} = 1$$

→ si **b ≠ 3** y **b ≠ - 3** ; entonces estamos ante el cociente de dos funciones continuas donde el denominador no se anula en el punto; luego, el límite es el valor de la función en el punto.

$$\lim_{x \to 4} \frac{sen\ (x^2 - 9)}{x^2 - 9} = \frac{sen\ 7}{7} = \mathbf{0.0938551}$$

4) Como senx/x, existen otros casos donde presentada una indeterminación el trabajo algebraico no es posible o no alcanza para *romper* la misma, donde hay que acudir a más de un teorema o resultado previo para obtener el límite propuesto. La ventaja es que una vez demostrado en general, luego lo podemos aplicar a cada caso particular sin tener que demostrar cada vez (como en el ejemplo I).

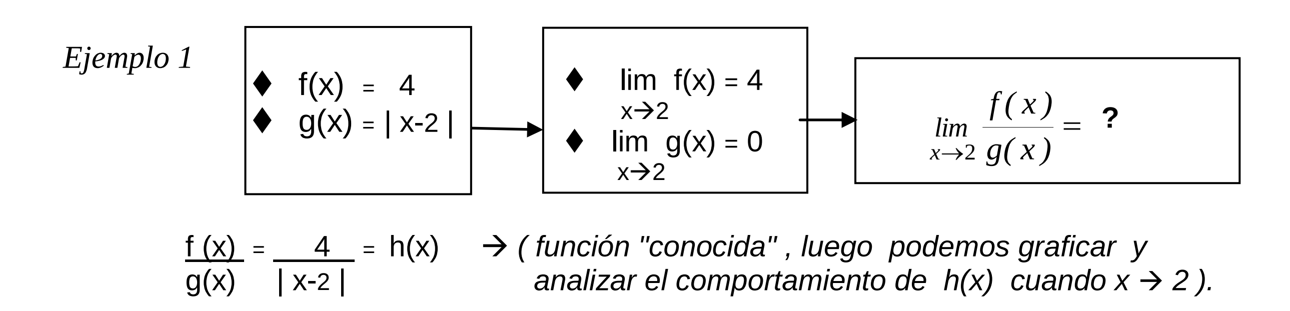
Concluimos así el análisis del límite de un cociente de funciones en el CASO 3, falta todavía considerar el CASO 2; o sea, el caso donde el límite del denominador es cero pero no sucede lo propio con el del numerador.

<u>CASO 2</u> :

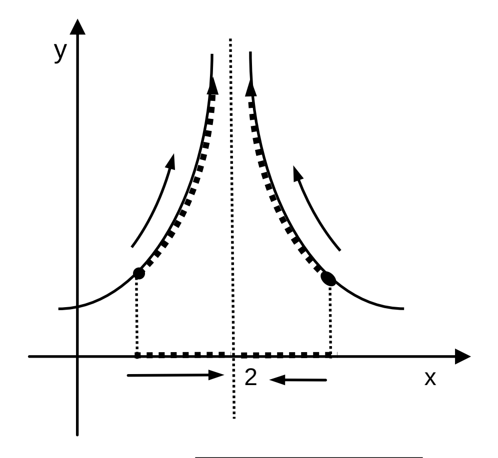
♦ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$ ♦ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$	→ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?$

Nos preguntamos: ¿qué comportamiento tendrá la función en casos como estos?.
¿Tendrá un comportamiento "definido" , o no?. Vemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1



$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4}{|x-2|} = h(x)$ → *(función "conocida" , luego podemos graficar y analizar el comportamiento de h(x) cuando x → 2).*

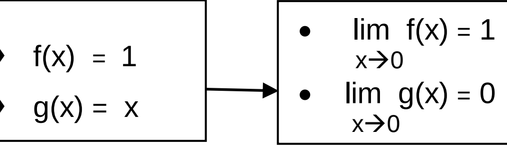


En este caso observamos que para x→2,
la función no se acerca a número alguno, (por ningún lado) pero,
¡ sí tiene comportamiento *"definido"* ! :
¡ se hace cada vez más grande !

Para indicar esto usamos el siguiente símbolo:

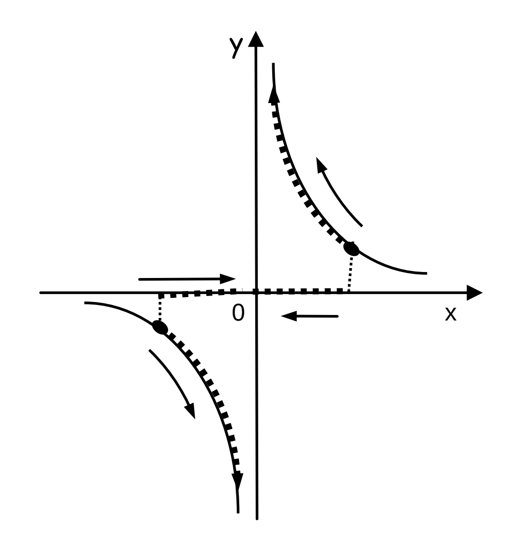
$$\lim_{x \to 2} h(x) = +\infty$$

Ejemplo 2:



$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ ?$$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} = h(x)$ → *(función "conocida" , luego podemos graficar y analizar el comportamiento de h(x) cuando x → 0).*



En este caso observamos que para x→0,
la función no se acerca a número alguno, (por ningún lado) y,
¡ tampoco tiene comportamiento *"definido"* !
Su comportamiento a derecha e izquierda del punto límite (origen) es <u>*distinto*</u>.

Luego, le caben las generales de la ley y, como ya vimos, en este caso decimos que el límite <u>*no existe*</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$$

2.4 Límites Infinitos para $x \to x_o$

DEFINICION 1 (´coloquial´ de límite infinito positivo de una función en un punto)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ cuando x se acerca a x_0 , (1) f(x) se hace cada vez más grande ; (2) y <u>tan grande como quiera</u>, (3) sin importar lo que pasa en x_0. (4)

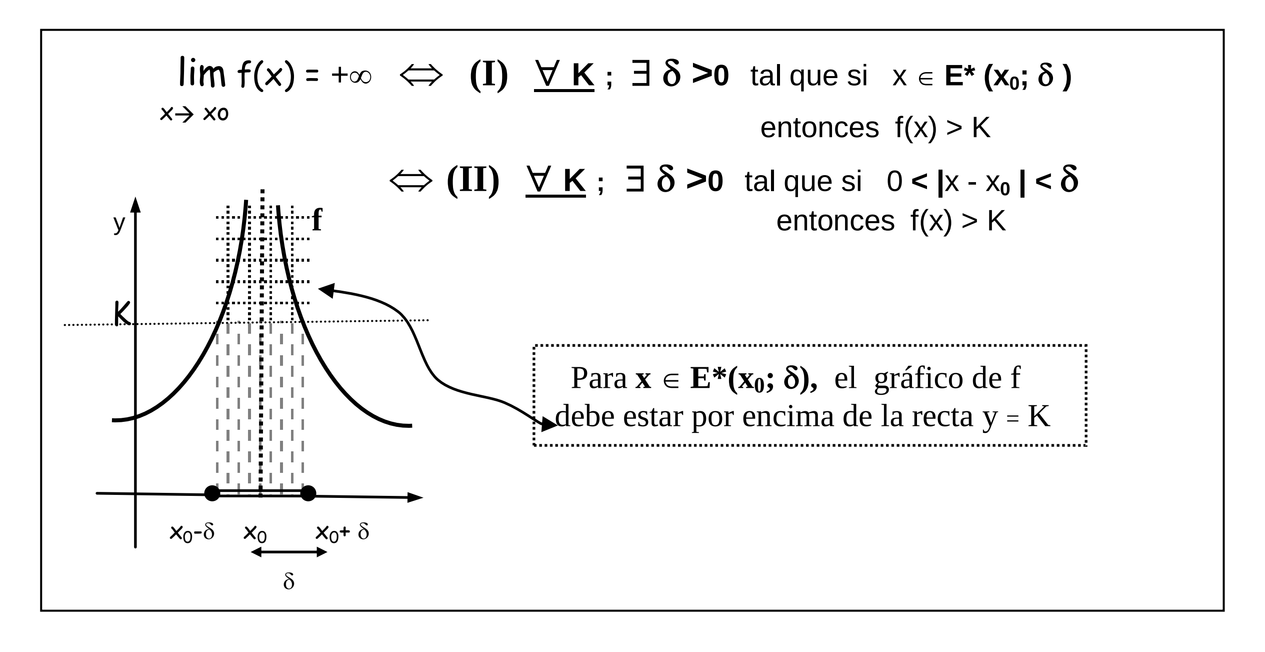
- En lo que sigue procedemos a ´traducir´ esta definición al lenguaje ´matemático´.

Lenguaje coloquial	Lenguaje "matemático"
(1) y (4) x *cerca* de x_0 $x \neq x_0$	$x \in E^*(x_0;\delta)$ (para δ *conveniente)*
(2) f(x) cada vez más grande	f (x) > **K** (para cualquier K que se considere)
(3) <u>tan grande como quiera</u> (esto significa que por más grande que tomemos K, siempre encontraremos algún f(x) proveniente de un x próximo a x_o que supere este valor)	dado **K , ∃ δ** tal que , si $x \in E^*(x_0;\delta)$ entonces, f (x) > **K**

- Luego, concluimos las siguientes **DEFINICIONES FORMALES**:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \textbf{(I)}\ \forall K;\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in E^*(x_0;\delta) \text{ entonces } f(x) > K$$

$$\Leftrightarrow \textbf{(II)}\ \forall K;\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } f(x) > K$$



DEFINICION 2 (´coloquial´ de límite infinito negativo de una función en un punto)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff$ cuando x se acerca a x_0 , (1) f(x) se hace cada vez más ´negativa´ ; (2) y tan ´negativa´ como quiera, (3) sin importar lo que pasa en x_0. (4)

Observación: la expresión *´más negativa´*, la usamos aquí a los efectos de indicar que f(x) es *´negativa´* y *´grande en valor absoluto´ (*tan grande como quiera*)* .
Usamos esta expresión pues otras expresiones que podríamos dar, como por ejemplo, - *f(x) se hace tan chica como quiera* – podrían dar lugar a confusión ya que generalmente cuando pensamos en un número ´chico´, pensamos en un número cercano al cero.

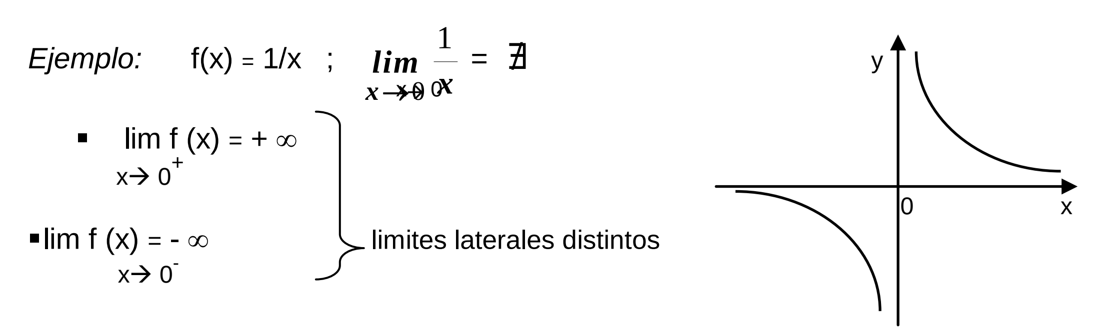
Ejercicio: graficar $f(x) = \dfrac{-4}{|x-2|}$ e indicar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Ejercicio: dar las definiciones formales correspondientes a la DEFINICIÖN 2 . Graficar. Tener en cuenta que esta definición está diciendo que para cualquier K que tomemos (en particular para cualquier K< 0) existe un entorno reducido de x_0 tal que para todo $x \in E^*(x_0; \delta)$, el graf. f está <u>por debajo</u> de la recta y = K .

<u>*Observaciones*</u>:

1) Los límites laterales pueden también ser $+\infty$ ó $-\infty$ y en este caso el teorema 9 sigue siendo válido: "*si los límites laterales son distintos el límite ordinario no existe".*

Ejemplo: f(x) = 1/x ; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \nexists$



2) Una función es:

- <u>acotada superiormente</u> en D si existe **K** tal que f (x) < K ; $\forall x \in D$
- <u>acotada inferiormente</u> en D si existe **K** tal que f (x) > K ; $\forall x \in D$.

Luego, que f *"no sea acotada superiormente"* es una condición necesaria para que el límite de f sea $+\infty$, y que f *"no sea acotada inferiormente"* es una condición necesario para que el límite de f sea $-\infty$. En ninguno de los casos es una condición suficiente.

RESUMEN

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} L \in \mathbb{R} & (\ f(x) \approx L \text{ , en un entorno reducido de } x_0\ ) \\ +\infty & (\ f \text{ no acotada superiormente; en un entorno reducido de } x_0) \\ -\infty & (\ f \text{ no acotada inferiormente.; en un entorno reducido de } x_0) \\ \nexists & (\text{ límites laterales distintos}) \end{cases}$$

2.5 Límites para $x \to \pm\infty$

En este párrafo nos interesa estudiar el comportamiento de la función cuando x toma valores cada vez más grande ó cada vez más ¨negativos´ (negativos y grandes en valor absoluto). Como en el caso anterior también en esta instancia ideamos símbolos que nos permiten expresar que es lo que estamos buscando y cual es la respuesta.
Tenemos así:

(I) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ Usamos este símbolo para expresar el siguiente interrogante ¿qué comportamiento tiene f(x) para x cada vez más grandes?

(II) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ Usamos este símbolo para expresar el siguiente interrogante ¿qué comportamiento tiene f(x) para x cada vez más ´negativas´?

Para cada una de estas preguntas existen cuatro respuestas posibles. Ellas son:

(I) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
- **a)** $L \in \mathbb{R}$ ($f(x) \approx L$, para x muy grandes)
- **b)** $+\infty$ (f no acotada sup.; para x cada vez más grandes)
- **c)** $-\infty$ (f no acotada inf.; para x cada vez más grandes)
- **d)** $\nexists$ (f no tiene un comportamiento definido, p/ $x\to+\infty$)

(II) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$
- **a)** $L \in \mathbb{R}$ ($f(x) \approx L$, para x muy "negativos")
- **b)** $+\infty$ (f no acotada sup.; para x cada vez más "negativos")
- **c)** $-\infty$ (f no acotada inf.; para x cada vez más "negativos")
- **d)** $\nexists$ (f no tiene un comportamiento definido, p/ $x\to-\infty$)

En lo que sigue mostramos el significado de alguna de los resultados posibles al preguntarnos acerca del comportamiento de una función cuando la variable crece o decrece infinitamente (las demás quedan como ejercicio):

(Ia) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$

cuando x se hace cada vez más grande ; (1)
f(x) se acerca al único número L (2)
tanto como quiera. (3)

♦ "traducimos" al lenguaje "matemático".

Lenguaje coloquial	lenguaje "matemático"
(1) x *cada vez más grande*	$x > M$ (para M *convenientemente grande)*
(2) f(x) *cerca* de **L**	$f(x) \in E(L;\varepsilon)$ (para ε dado)
(3) tanto como quiera. (esto significa que por más chico que tomemos el entorno de L; o sea, por más chico que tomemos ε, siempre encontraremos en el entorno algún f(x) proveniente de un x convenientemente ´grande´.)	$\forall\varepsilon$, $\exists$ **M** tal que...... si $x > M$ entonces $f(x) \in E(L;\varepsilon)$ y L x

Luego, concluimos las siguientes **DEFINICIONES FORMALES**:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ **(I)** $\underline{\forall \varepsilon > 0}$; $\exists$ M tal que $x > M \Rightarrow f(x) \in E(L;\ \varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ **(II)** $\underline{\forall \varepsilon > 0}$; $\exists$ M tal que $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Observación: en este caso la recta y = L es una asíntota de la gráfica de f en la región del eje real correspondiente a valores de x ´muy grandes´.

IIc) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

cuando x se hace cada vez más "negativo" ; (1)
f(x) hace cada vez más "negativo" (2)
y, tanto como quiera. (3)

♦ "Traducimos" al lenguaje "matemático".

Lenguaje coloquial	lenguaje "matemático"
(1) x *cada vez más "negativo"*	x < M (para M *conveniente ´negativo´)*
(2) f(x) *cada vez más "negativo"*	f(x) **< K** (para **K** dado)
(3) tanto como quiera. (esto significa que por más ´negativo´ que tomemos K, siempre encontraremos x convenientemente ´negativa´ tal que f(x) sea menor que K.) (Equivalentemente: f no es acotada inferiormente en la región del eje real correspondiente a valores de x muy ´negativos´.)	∀ **K** , ∃ M tal que……

Observación: en este caso la función no es acotada inferiormente en la región del eje real correspondiente a valores de x ´muy negativos´.

LUEGO, concluimos la siguiente **DEFINICION FORMAL**:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \underline{\forall K}$; $\exists$ M tal que si $x < M$ entonces $f(x) < K$

Id) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \nexists \Leftrightarrow$ cuando x se hace cada vez más grande los f(x) *no tienen un comportamiento definido*

Ejemplo: f (x)= sen x

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = \nexists$; cuando x se hace cada vez más grande sen x *no tiene un comportamiento definido* (oscila entre 1 y -1)

➢ ***Propiedades del límite para*** $x \to \infty$ (usamos ∞ por ± ∞)

En el caso de funciones con límite *finito* para $x \to \infty$, valen los teoremas 1 ; 2 y 3
Sean f y g dos funciones tales que; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \mathbf{B}$.

TEOREMA 1: $\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

TEOREMA 2: $\lim_{x\to\infty} [f(x) . g(x)] = \mathbf{A} . \mathbf{B}$.

TEOREMA 3: $\lim_{x\to\infty} [f(x) / g(x)] = \mathbf{A} / \mathbf{B}$; [siempre que $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$]

2.6 Casos Generales de Indeterminación

A partir de ahora con la letra p nos referimos indistintamente a un punto x_0 ó ± ∞ .
En lo que sigue p y las funciones f, g ; h y k verifican las siguiente condiciones:

- $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to p} h(x) = 0$; $\lim_{x\to p} k(x) = L$ $(L \neq 0)$

- Bajo estas condiciones: ¿qué pasa con los siguientes límites?

Límite	Resultado
$\lim_{x\to p} [f(x) + g(x)] =$	$+\infty$
$\lim_{x\to p} [f(x) - g(x)] =$	INDETERMINACIÓN $[\infty - \infty]$
$\lim_{x\to p} [f(x)/g(x)] =$	INDETERMINACIÓN $[\infty / \infty]$
$\lim_{x\to p} [f(x).g(x)] =$	$+\infty$
$\lim_{x\to p} [h(x).f(x)] =$	INDETERMINACIÓN $[0 . \infty]$
$\lim_{x\to p} [f(x)^{g(x)}] =$	$+\infty$
$\lim_{x\to p} [h(x)^{f(x)}] =$	0
$\lim_{x\to p} [f(x)^{h(x)}] =$	INDETERMINACIÓN $[\infty^0]$
$\lim_{x\to p} [h(x)^{h(x)}] =$	INDETERMINACIÓN $[0^0]$
$\lim_{x\to p} [k(x)^{f(x)}] =$	0 [para $0 < L < 1$] INDETERMINACIÓN [**para L=1**] $+\infty$ [para $L > 1$]

Ejemplo*:** ***Indeterminación del tipo $\mathbf{1}^{\infty}$: $f(x) = (1 + 1/x)^{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} [(\underbrace{1 + 1/x}_{\to 1})^{x \to +\infty}] = \xrightarrow{\text{el resultado de este límite es el número}} e$$

En general tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to p} \left(1 + \dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = \\ y \quad \lim\limits_{x\to p} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to p} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

NOTA : la demostración o prueba de los límites de la forma $f(x)^{g(x)}$, la hacemos a partir de la siguiente propiedad del logaritmo y su inversa la exponencial:

$$a^{b} = e^{\log a^{b}} = e^{b.\log a}$$

2.7 Propiedades de Funciones Continuas y Discontinuas

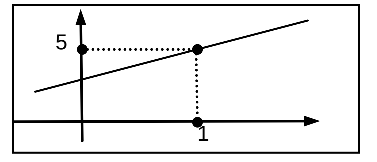
2.7.1 Discontinuidad en un Punto

DEFINICIÓN

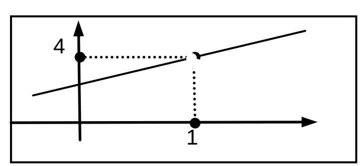
Discontinuidad	f *discontinua* en x_0 ⇔ f no es continua en x_0.

♦ ***Estudio general de las discontinuidades.***

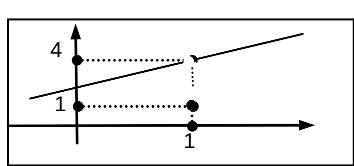
Ejemplo 1: $f(x) = 2x+3$ → $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$



Ejemplo 3: $f(x) = \dfrac{x^2 +2x -3}{x-1}$ → $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$

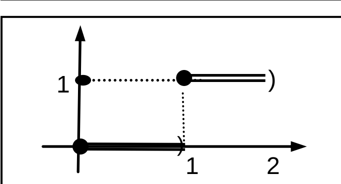


Ejemplo 5: $f(x) = \begin{cases} x + 3\ ; & x \neq 1 \\ 1\ ; & x = 1 \end{cases}$ → $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$





Ejemplo 6: $f(x) = [x]$ → $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \nexists$



RESUMIENDO:

	Ej. 1	Ej. 3	Ej. 5	Ej. 6
f(1)	**5**	**∄**	**1**	**1**
L	**5**	**4**	**4**	**∄**
¿ $f(x_0)= L$?	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
¿ f continua en x_0?	**SI** continua	**NO** discontinua	**NO** discontinua	**NO** discontinua
gráfico	*continuo*	*´agujereado´*	*´agujereado´*	*´salto´*

- Si nos fijamos en las discontinuidades presentadas en los ejemplos, vemos que no revisten la misma "gravedad". Podemos decir que la discontinuidad del ej. 6 ("salto") es "irremediable", mientras que las de los ejs. 3 y 5 son "evitables"; una *pequeña modificación de la función* la puede transformar en continua. Así redefiniendo f de tal manera que f(1)=L , las funciones se "continuizan".(se salva la discontinuidad).
- ¿qué permite "continuizar" una función?: el hecho de que existe límite.

- ***Tipos de discontinuidades***

EVITABLES → si existe límite para $x \to x_0$ (Ejs 3 y 5)

INEVITABLES → no existe límite para $x \to x_0$ (Ej 6)

2.7.2 Propiedades de las funciones continuas

Acotación de funciones y continuidad:
Retomamos el concepto de función acotada a los efectos de ampliar el mismo e investigar la relación entre este concepto y la continuidad. Recordamos que:

- f acotada superiormente en D si existe K tal que $f(x) \leq K$; $\forall x \in D$
- f acotada inferiormente en D si existe K tal que $f(x) \geq K$; $\forall x \in D$.
- f acotada en D si existen K_1 y K_2 tal que $K_1 < f(x) < K_2$; $\forall x \in D$, ó, equivalentemente si existe K tal que $| f(x) | < K$; $\forall x \in D$

De las definiciones se desprende que una función es acotada (superior y/o inferior) si y solo si su imagen es un conjunto acotado (superior y/o inferior). Luego, para analizar el carácter de una función en este sentido, basta con analizar su conjunto imagen.

Así, son ejemplo de funciones:

- *acotadas*: seno (Im sen: [-1,1]); coseno (Im cos: [-1,1]); arc tg. (Im arc tg: $(-\pi/2; \pi/2)$)
- *acotadas superiormente* : $-x^2$ (Im f: $(-\infty, 0]$); sen x ; $-e^x$ (Im f: $(-\infty, 0)$);
- *acotada inferiormente*: e^x (Im f: $(0, +\infty)$); x^2 (Im f: $[0, +\infty)$; sen x.

Observaciones:
Tanto el seno como el arc tg son funciones acotadas, pues su conjunto imagen también lo es; pero no presentan el mismo "tipo" de acotación. Así:

Im sen = [-1 ; 1] (intervalo cerrado) ; Im arc tg = (- $\pi/2$; $\pi/2$) (intervalo abierto)

- cotas superiores de *Im sen* : 5 ; π ; 3/2 ; 1.3 ; **1** (menor cota superior)
- cotas superiores de *Im arc tg*: 5 ; π ; 5/2 ; 1.6 ; **π/2** (menor cota superior)

Si un conjunto es acotado (o acotado superiormente) tiene infinitas cotas superiores y, entre todas ellas existe una que es la ***menor*** de todas**.** El carácter de esta cota depende del conjunto imagen, si es cerrado o abierto, ya que como puede verse de los ejemplos la *menor cota superior* coincide con el *extremo superior del intervalo imagen* . Luego, y en relación al valor de la función en este punto, puede darse que la misma esté definida en él (si el intervalo imagen es cerrado superiormente) o no (intervalo abierto).

Así; Im sen = [-1 ; 1] $\Rightarrow$ existe x*X Df tal que sen x* = **1** (menor cota sup.) (x*= $\pi/2$)
Im arctg = (- $\pi/2$; $\pi/2$) $\Rightarrow$ no existe x*X Df tal que arctg x* = **π/2** (menor cota sup.)

Observamos lo mismo en el caso de una función acotada inferiormente; en cuyo caso existe la ***mayor cota inferior*** en la cual, la función puede o no estar definida. Para distinguir estas situaciones introducimos nuevos conceptos

DEFINICION

supremo ***ínfimo***	◆ Supremo de f (*sup. f*): menor cota superior del conjunto Im f. ◆ Infimo de f (*inf. f*): mayor cota inferior del conjunto Im f.

DEFINICION

máximo ***mínimo***	◆ si existe x* tal que *sup f* = f(x*) entonces al supremo de f se le da el nombre de ´máximo de f´ , que se indica: *max f.* ◆ si existe x** tal que *inf f* = f(x**) entonces al ínfimo de f se le da el nombre de ´mínimo de f´ , que se indica: *min f.*

<u>Equivalentemente</u> :

- El ´*max f* ´ es el mayor valor de la función en todo su dominio; o sea,
  M = *máx f* $\Leftrightarrow$ existe $x^* \in Df$ tal que $M = f(x^*)$ y $f(x^*) \geq f(x)$; $\forall x \in Df$
- El ´*min f* ´ es el menor valor de la función en todo su dominio,
  m = *mín. f* $\Leftrightarrow$ existe $x^{**} \in Df$ tal que $m = f(x^{**})$ y $f(x^{**}) \leq f(x)$; $\forall x \in Df$

Vemos a continuación otras propiedades importantes de las funciones continuas, particularmente aquellas que tienen que ver con la acotación de la función.

TEOREMA 14 : f continua en [a; b] $\Leftrightarrow$ f es *acotada* en [a; b] (s/d)

O sea, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es una función acotada en ese intervalo.

▪ Por otro lado una función acotada en cierto domino tiene, cuanto menos, supremo e ínfimo. Si bien este dato es importante en sí mismo, mucho más útil es saber si la función tiene máximo y/ó mínimo. Luego, ¿existirán propiedades de la función que permitan decidir cuando una función tiene máximo y mínimo?.

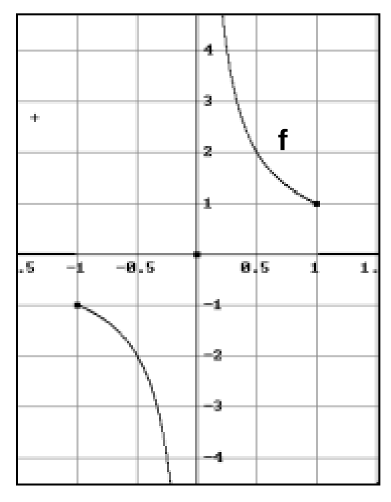
TEOREMA 15 : (de Weiertrass) (s/d)

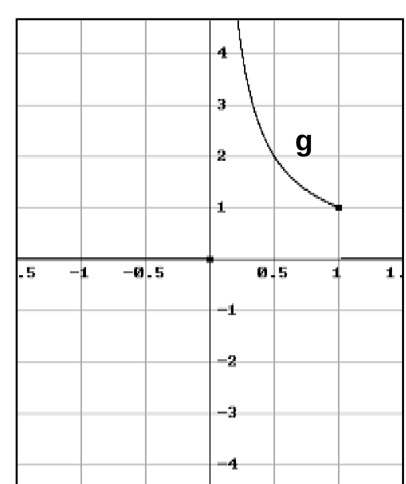
Si f es continua en [a; b] entonces existen máximo y mínimo absolutos de f en [a; b].

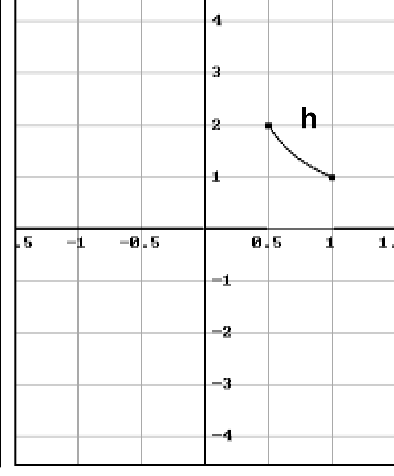
Observaciones:

1) Tenemos así que la continuidad en un cerrado y acotado es *condición suficiente* para que la función alcance un valor máximo y un valor mínimo en ese dominio.
2) El intervalo debe ser cerrado y acotado, la continuidad sola no garantiza la existencia de extremos absolutos. Así por ejemplo, $f(x) = \log x$ con Df = (0,1] es continua pero no tiene mínimo en ese dominio (no está acotada inferiormente).
3) La función debe ser continua, un dominio cerrado y acotado no garantiza la existencia de extremos. Así por ejemplo, $f(x)= 1/x$, $f(0)=0$, con Df = [-1,1] no tiene máximo ni mínimo, pues no es acotada en un entorno del cero.
4) Observamos también cómo, si modificamos el dominio, funciones con la misma ley puede pasar de continua a discontinua y viceversa. O sea, comprobamos nuevamente la importancia del dominio en la definición del concepto de función, como influye en el carácter o propiedades de la misma y comprendemos la atención prestada a este punto en el capítulo 1, donde insistimos en que una función es más que la ley de correspondencia, que el dominio es parte constitutiva del concepto, con peso propio.

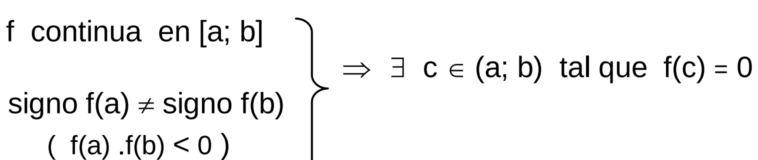
- $f(x) = 1/x$, $f(0) = 0$, con D_f = [-1,1]; no tiene máximo ni mínimo.
- $g(x)= 1/x$, $g(0)= 0$, con D_g =[0,1]; no tiene máximo, sí tiene mínimo: *min.g* = g(1) = 1
- $h(x) = 1/x$, con D_h =[½ , 1]; tiene máximo: *max. h* = h(½) = 2
  tiene mínimo: *min. h* = h (1) = 1

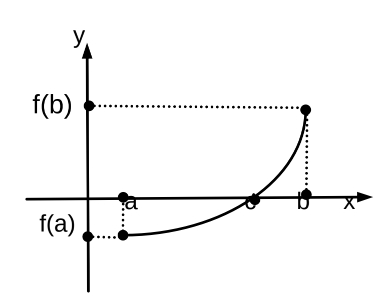






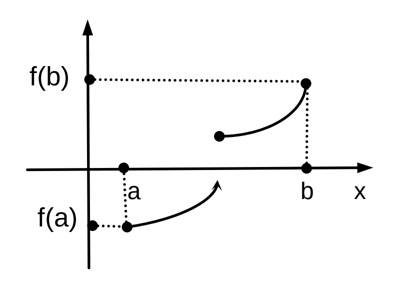
TEOREMA 16 : (de Bolzano) (s/d)

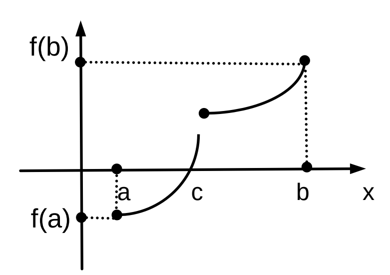




Observaciones:

1) Si una función f es continua en [a;b] y, por ejemplo, f(a)< 0 y f(b)>0 entonces para pasar del punto (a, f(a)) al punto (b, f(b)) la graf f debe, *necesariamente*, cortar al eje x; o sea, cada vez que una función continua en un intervalo tenga signo distinto en los extremos del mismo estamos en condiciones de asegurar que la función tiene al menos un cero en ese intervalo.
2) Para una función f discontinua en un intervalo el hecho de que tenga signo distinto en los extremos del mismo no permite asegurar nada respecto de la existencia de ceros.





3) este teorema facilita la detección de ceros de una función y resulta particularmente útil cuando las fórmulas o métodos de cálculo que conocemos a este efecto (resolverte de la ecuación de 2do grado, Ruffini para ceros de polinomios, etc), no pueden ser aplicadas .
Así por ejemplo dado $p(x) = 25 \cdot x^3 + 35 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 5.6$, tenemos que:

- p es continuo en todo los reales; luego, es continuo en cualquier intervalo cerrado.
- p(-2) = -57.6 y p(-1) = 8.4 ; p continuo en [-2 , -1]

Luego, p presenta una raíz o cero en el [-2, -1] .

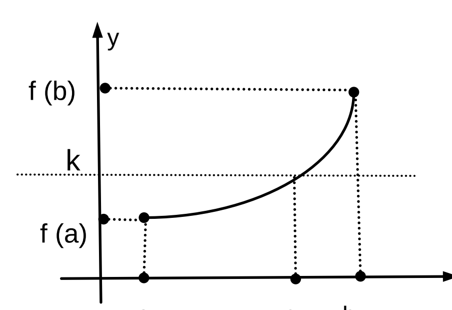
Ejercicio : - Demostrar que p tiene otra raíz real en el [-1 , 0] .
- ¿tiene p otra raíz? ; ¿real o compleja? .; ¿ en qué intervalo ?
- p(-1.5) = -5.225 . Este dato , ¿Qué información proporciona?.

TEOREMA 17 : (del valor *intermedio*)

- f continua en [a; b], $f(a) \neq f(b)$
- $k \in R$ un número entre f(a) y f(b)

$\Rightarrow \exists\ c \in (a; b)$ tal que $f(c) = k$

Demostración :



Suponemos $f(a) < f(b)$.
En tal caso, para k tenemos: $f(a) < k < f(b)$
Definimos $g(x) = f(x) - k$

- g continua en [a; b]
- $g(a) = f(a) - k < 0$
- $g(b) = f(b) - k > 0$

BOLZANO $\Rightarrow \exists$ **$c \in (a; b)$** tal que $g(c) = 0$

pero, $g(c) = f(c) - k \Rightarrow f(c) - k = 0 \Rightarrow$ **$f(c) = k$**

Corolario:

Dada f continua en [a,b] con m y M, mínimo y máximo absolutos de f en [a,b] , entonces f toma todos los valores comprendidos entre m y M; es decir, Imf = [m , M].

➢ ***Comportamiento de f en un entorno de un punto de continuidad.***

Dijimos que las 3 condiciones que caracterizan la continuidad en un punto pueden ser resumidas en una sola: f continua en $x_o \Leftrightarrow \lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Dicho de otra forma, f continua en x_o , si y sólo si para x suficientemente próximo a x_o, f(x) resulta próximo a $f(x_o)$; o sea, si para x suficientemente próximo a x_o , f(x) difiere de $f(x_o)$ en una cantidad ´infinitesimal´
En el siguiente teorema esta idea ($x \approx x_0$ entonces $f(x) \approx f(x_0)$) se formula a través de una expresión algebraica, hecho este que resulta de gran utilidad a la hora de ´operar algebraicamente ´ con el concepto de límite, hacer demostraciones.

TEOREMA 18 : (de escritura fuera del límite)

$$\lim_{x \to xo} f(x) = L \Rightarrow f(x) - L = \varepsilon(x), \quad \text{con } \varepsilon \text{ infinitésimo para } x \to x_0 \ (*)$$

(*) decimos que ε es un infinitésimo para $x \to x_0$ si y sólo si $\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = 0$

demostración:

si $\varepsilon(x) = f(x) - L$,
y aplicamos límite a ambos lados: $\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = \lim_{x \to xo} (f(x) - L)$

$\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = \lim_{x \to xo} f(x) - \lim_{x \to xo} L$ (por teor. 1 de límite)

$\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = L - L$

$\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = 0$

Luego, $f(x) - L$ es un infinitésimo para $x \to x_0$ y podemos escribir, $f(x) = L + \varepsilon(x)$

Corolario : si f es continua en x_0 entonces :

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x), \text{ con } \varepsilon \text{ un infinitésimo para } x \to x_0 \quad (f(x) \approx f(x_0))$$

Observación:

Los *infinitésimos* juegan un rol muy importante en la teoría del cálculo diferencial a la vez que proporcionan una herramienta muy útil para el análisis del comportamiento de una función. A esto último también contribuyen los *infinitos.*
En lo que sigue definimos y analizamos la utilidad de estos conceptos.

2.8 Infinitésimo e Infinitos

2.8.1 Infinitésimos

DEFINICIÓN: *f es un infinitésimo para x→p* $\Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = 0$

Usamos la letra p para referirnos indistintamente a un nro, $+\infty$ ó $-\infty$.
Una función cuyo límite es cero para x→p, es una función cuyos valores se hacen ´infinitamente pequeños´ al desplazarse x en el sentido indicado, de allí que le damos el nombre de infinitésimo.

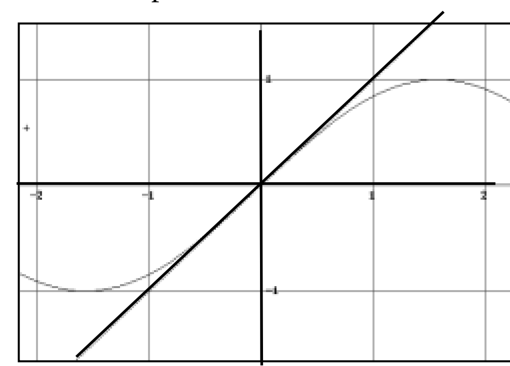
Ejercicio:
para las funciones a continuación te pedimos que analices si existe ´p´ tal que la misma resulte un infinitésimo para x→ p.

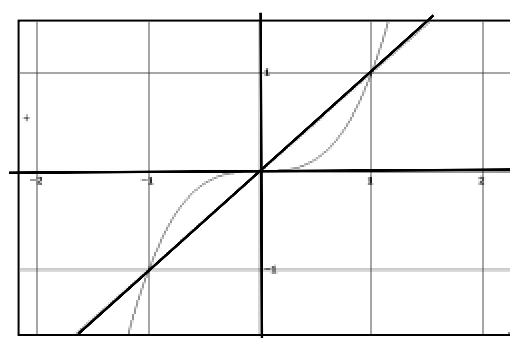
$\text{sen } x$; $x^2 - 2x + 1$; $1/x$; $\ln x$; e^x

- ***Comparación de infinitésimos.***

El cociente de dos infinitésimos es una forma indeterminada (0/0), siendo por lo tanto imposible establecer, a priori, sin efectuar el límite, cual puede ser el resultado del mismo. Sin embargo una vez calculado, su valor proporciona una información muy rica en cuanto al comportamiento de uno de los infinitésimos con respecto al otro.

Por ejemplo vimos que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$, y que este resultado nos dice que en un entorno del origen, sen x ≈ x; o dicho de otra manera, que sen x se aproxima a cero prácticamente con la misma rapidez con que lo hace x´s.





Si hacemos el gráfico de los infinitésimos x^3 y x vemos que no sucede lo mismo, que x^3 tiende a cero mucho más rápido que x. ¿Qué sucede en este caso con el límite?

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

O sea, vemos que el límite del cociente entre dos infinitésimos brinda una herramienta para ´***comparar***´ el comportamiento de uno de ellos con respecto al otro.

- Siendo f y g dos infinitésimos para x→ p , decimos que:

1) f y g son infinitésimos equivalentes si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2) f y g son infinitésimos del mismo orden si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$

3) f es un infinitésimos de orden superior a g si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4) g es un infinitésimos de orden superior a f si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

5) f y g no son comparables si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \nexists$

Ejercicio:

a) analizar que informan (3) y (4) acerca del comportamiento de g con respecto a f.

b) La identidad, Id (x) = x , es infinitésimo para x→0 el cual recibe el nombre de ´infinitésimo fundamental´, pues es el que normalmente se usa para ´comparar´ con otro cuya rapidez de convergencia a cero se quiere estimar.
Te pedimos que, entre los infinitésimos para x→0 indicados a continuación, establezcas cuales resultan equivalentes al infinitésimo fundamental:

sen x ; $x.\ e^x$; tg x ; $x - x^3$; $2x - x^3$; $x^2 - x^3$; x. sen 1/x ; x. cox(tg^2x).

2.8.2 Infinitos

DEFINICIÓN: *f es un infinito para x→p* $\Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = \infty$

Usamos la letra p para referirnos indistintamente a un nro, $+\infty$ ó $-\infty$.
Usamos el símbolo ∞ para referirnos indistintamente a $+\infty$ ó $-\infty$.

Una función cuyo límite es $+\infty$ ó $-\infty$ para x→p, es una función cuyos valores se hacen ´infinitamente grandes´ (en valor absoluto) al desplazarse x en el sentido indicado, de allí que le damos el nombre de infinito.

Ejercicio:
para las funciones a continuación te pedimos que analices si existe ´p´ tal que la misma resulte un infinito para x→ p.

$\operatorname{sen} x$; $x^2 - 2x + 1$; $1/x^2$; $\ln x$; e^x

Al igual que los infinitésimos, los infinitos se pueden ´comparar´ y establecer así con que rapidez van creciendo sus valores.

➢ ***Comparación de infinitos.***

Siendo f y g dos infinitos para x→ p , decimos que:

1) f y g son infinitos equivalentes si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2) f y g son infinitos del mismo orden si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$

3) f es un infinito de orden superior a g si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

4) g es un infinito de orden superior a f si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

5) f y g no son comparables si : $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \nexists$

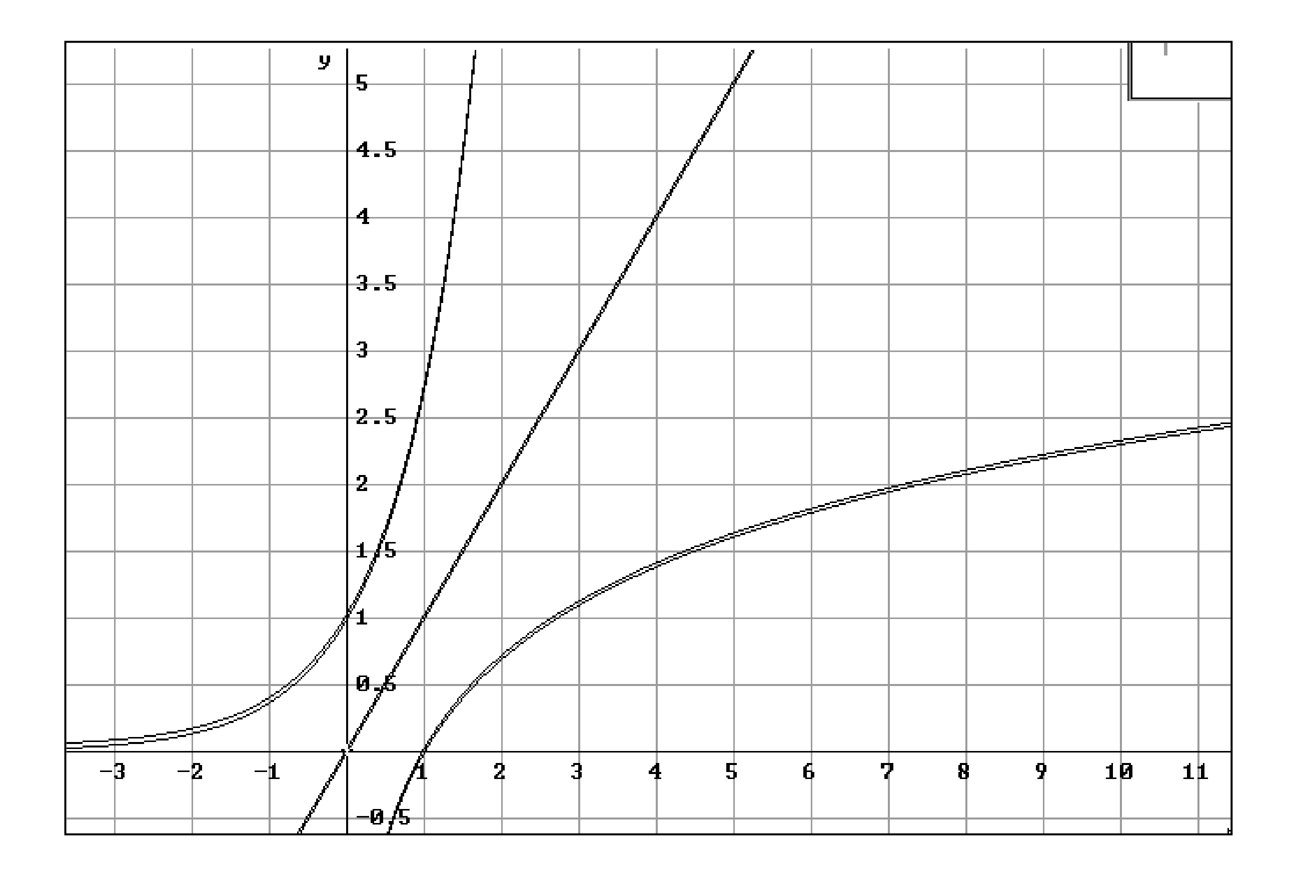
Ejercicio:

a) analizar que informan (1), (3) y (4) acerca del comportamiento de g con respecto a f.
b) La identidad, Id (x) = x , es infinito para x→ ∞ el cual recibe el nombre de ´infinito fundamental´, pues es el que normalmente se usa para ´comparar´ con otro cuya ´rapidez de crecimiento´ se quiere estimar.
Te pedimos que, entre los infinitos para x→ ∞ indicados a continuación, establezcas cuales resultan equivalentes al infinito fundamental:

$4x-2$; $x + 1000$, $x^3 + x$; $x^2 - x^3$; $x.^2 \operatorname{sen} 1/x$;

$\sqrt{x}$; $x.^2 \operatorname{sen} 1/x$; e^x ; $\ln x$.

(para las dos últimas funciones decidir por ´comparación´ de ´gráficos´)


y
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

2.9 Ejercicios: límite y continuidad

1) Si $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$, se pide :

a) Explicar, en palabras, que dice esta expresión acerca del comportamiento de f

b) En un sistema coordenado x-y marcar sobre el eje x un entorno cualquiera de $x_o=3$. Señalar luego una región del plano en la que con seguridad se puedan encontrar imágenes de x por f, para los x´s antes marcados. Identificar una región del plano la cual contenga parte del graf f.

c) Graficar , si es posible, una función que se comporte según lo que indica este límite y tal que f (3) = 2.

d) Si g(x) = f(x) + 2 : ¿ cuanto vale $\lim_{x \to 3} g(x)$? .

e) Si h(x) = f(x) + μ y $\lim_{x \to 3} h(x) = 10$, ¿cuánto vale μ ? .

f) Si k(x) = f(x) + ω y $\lim_{x \to 3} k(x) = 0$, ¿cuánto vale ω ? .

2) Un artesano debe cortar cierta cantidad de piezas cuadradas de una plancha de metal de 5 cm. de ancho. Para ello realiza marcas sobre la misma, las cuales, debido a errores propios del sistema que emplea, no resultan todas de igual longitud; es decir, no todas las piezas quedan con un largo exacto de 5 cm.



a) ¿ Qué área (A_o) deberían tener *exactamente* los cuadrados ? .

b) Si indicamos con x el largo *real* de cada corte, expresar A (*área real de la pieza*) en función de x , A = f(x)

c) Si la obra que el artesano desea realizar soporta una diferencia de ± 1 cm^2 en el área de cada pieza, ¿ cuál es el rango, en cm., en que puede variar la longitud del corte de modo que la pieza sirva, aún cuando no resulte *exactamente cuadrada* ?.

Sugerencias:

i) Hallar el intervalo de valores admisibles para A. (¿con que otro nombre, que no sea el de ´intervalo´, podemos nombrar este conjunto ?.)

ii) En un sistema coordenado x-A graficar el conjunto obtenido en (i).

iii) En el mismo sistema graficar A como función de x.

iv) Obtener, gráfica y analíticamente, los valores admisibles para x según las condiciones de trabajo planteadas.

d) En términos de la definición ε–δ de $\lim_{x \to 5} A(x) = L$, ¿quién es L en este caso? ; ¿ quien ε ?; ¿ cuál el δ que le corresponde ?.

3) Para los valores de a, c y ε y las funciones que se indican a continuación, determinar gráficamente, de ser posible, un E*(a, r) tal que:
´si x X E*(a,r) entonces f(x) X E(c, ε)´

a) f(x) = x+2 ; a = 2 ; c = 4 , ε = ½

b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \ ; \ x \neq 2 \\ 1 \ ; \ x = 2 \end{cases}$; a = 2 ; c = 4 , ε = ½

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; a = 2 ; c = 4 , ε = ½

d) $f(x) = \begin{cases} x \ ; \ x < 2 \\ x+2 \ ; \ x > 2 \end{cases}$; a = 2 ; c = 3 , ε = 2

e) $f(x) = \begin{cases} x \ ; \ x < 2 \\ x+2 \ ; \ x > 2 \end{cases}$; a = 2 ; c = 3 , ε = ½

4) Estimar a partir del gráfico de f si existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Indicar el valor (si existe).

a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$

c) $f(x) = e^x + 1$

d) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x+1 \ ; \ x < 0 \\ -3 \ ; \ x = 0 \\ e^x \ ; \ x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = 2^{|x|}$

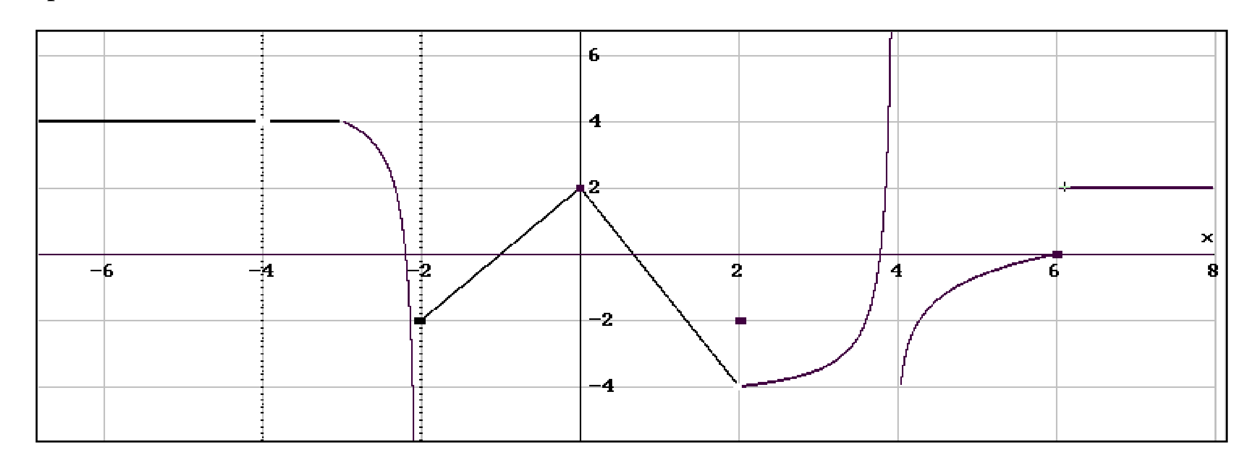
g) $f(x) = 2^{\frac{|x|}{x}}$

h) $f(x) = (2x-1)^2 - 2x^2 + 2x - 5$

i) f(x) = ln (x+1)

j) $f(x) = \begin{cases} x+3 \ ; \ x > 0 \\ 2x \ ; \ x < 0 \end{cases}$

5) Dado el gráfico de f , se pide:
Indicar el domino y analizar la existencia de límite de la función para x → a, para a = -4 , -3 , -2, -1, 0 , 2 , 4 , 6 . Si existe el límite, indicar su valor.



6) Dada f con dominio en el [0;5] y $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ se pide indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) ó falsas (F) justificando las respuestas con alguna propiedad, teorema o definición si es verdadera y con un contraejemplo en caso de no lo sea.

a) f es continua en $x_o = 2$.
b) f es continua en [0;5] .
c) Si $x = 2+\Delta x$ con $\Delta x \approx 0$ entonces $f(x) \approx f(2)$.
d) Si $p(x) = f(x) + 3$ entonces $\lim_{x\to 2} p(x) = f(2) + 3$.
e) Si $q(x) = f^2(x)$ entonces $\lim_{x\to 2} q(x) = f^2(2)$.
f) Si $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ entonces g es continua en $x_o = 2$.
g) Si $h(x) = \sqrt{f(x)}$ entonces h es continua en $x_o = 2$.
h) Si $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;5]$ entonces $h(x) = \sqrt{f(x)}$ es continua en $x_o = 2$ y

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 2} f(x)} = \sqrt{f(2)}$$

i) Si $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;5]$ entonces $k(x) = \ln(f(x))$ es continua en $x_o = 2$ y

$$\lim_{x\to 2} k(x) = \lim_{x\to 2} \ln(f(x)) = \ln\left[\lim_{x\to 2} f(x)\right] = \ln[f(2)]$$

7) Indicar V ó F, justificando con algún teorema, definición, propiedad ó contraejemplo:

a) $\lim_{x\to 1} \lfloor 3x^2 - x + 2 \rfloor = 4$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + \pi}{x + 5} = \frac{4 + \pi}{7}$

c) $\lim_{x\to 0} \log(x+1) = 1$

d) $\lim_{x\to x_o} \log(x+1) = \log(x_o + 1)$

h) $\lim_{x\to 25} \sqrt{x} = 5$

i) $\lim_{x\to x_o} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

j) $\lim_{x\to 10} \frac{x^2}{\log x} = 100$

k) $\lim_{x\to -10} \frac{x^3}{\log x} = -1000$

8) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \lfloor 3x^3 - 2x - 1 \rfloor =$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 3}{x - 2} =$

c) $\lim_{x\to \pi} \cos(9x - \pi) =$

d) $\lim_{x\to 3\pi/2} \frac{\cos x + 1}{\operatorname{sen} x}$

i) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 31)^{1/3} =$

j) $\lim_{x\to -3} \frac{x + 3}{x^3 - 1} =$

k) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{3x + 1} =$

l) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(ax) + 1 =$

e) $\lim_{x\to 2} 16^{\frac{x^2-5}{x^2}} =$

f) $\lim_{z\to 0} (2 \text{ sen } z + z^2)$

g) $\lim_{x\to 1} (2x + 3)^{4x-5} =$

h) $\lim_{z\to 0} \frac{\text{sen}(3z) + a}{2 + z} =$

m) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x + 5}{3 - x}\right)^{x+2} =$

n) $\lim_{x\to 5} \ln\left(\frac{4x - 10}{x}\right) =$

o) $\lim_{x\to 0} \ln\left(2x^2 + 3a^4 + 1\right) =$

p) $\lim_{a\to 0} \ln\left(2x^2 + 3a^4 + 1\right) =$

9) Dadas las funciones $F(x) = \frac{(x+3)^2 - 9}{x}$ y $G(x) = x + 6$ se pide:

a) Analizar si F está definida en x_o= 0. ¿La no existencia de la función en un punto implica la no existencia de límite en dicho punto?.
b) Analizar si F y G son funciones iguales. Si no lo fueran indicar en que difieren . Graficar ambas.
c) Analizar la veracidad de esta afirmación: $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} G(x)$. Calcular $\lim_{x\to 0} F(x)$.

10) Dadas las funciones $F(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ y $G(x) = \frac{1}{x + 1}$ se pide:

a) Analizar si F está definida en x_o= 1. ¿La no existencia de la función en un punto implica la no existencia de límite en dicho punto?.
b) Analizar si F y G son funciones iguales. Si no lo fueran indicar en que difieren . Graficar ambas.
Analizar la veracidad de esta afirmación: $\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} G(x)$. Calcular $\lim_{x\to 1} F(x)$.

11) Calcular :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{5x^2 - 2x}{3x}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{3x - 3}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/2} - 1}{x - 1}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{(x + 1)^{1/2} - 1}$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{(2 - x)^{1/2} - 1}{x - 1}$

g) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

h) $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 5x + 3}$

i) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

j) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 2x}$

k) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6}$

l) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$

m) $\lim_{h\to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$

n) $\lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

o) $\lim_{h\to 0} \frac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

p) $\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1}\right]$

12) Analizar si existe un número real ´a´ tal que $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 + a.x + a - 10}{x^2 + 2x - 8} = L$.

Si existe indicar quien es ´a ´ y quien ´ L ´.

13) Mostrar por medio de un ejemplo que $\lim\limits_{x\to x_o} [f(x)+g(x)]$ puede existir aunque no exista $\lim\limits_{x\to x_o} [f(x)]$ ni $\lim\limits_{x\to x_o} [g(x)]$. (Sugerencia : considerar la función signo ´SG´).

14) Calcular.

a) $\lim\limits_{t\to 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

b) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x - 2}{x^2 + 4}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x + 4}{2 + \sqrt{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \text{arcsen}(x^2 - 1)$

f) $\lim\limits_{x\to \pi} \text{sen}(x + \text{sen } x)$

g) $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2 - x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1 - \text{tg}^2 x)$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \text{arctg} \left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \ln \left(\frac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \ln \left(\frac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$

15) i) Indicar verdadero o falso justificando la respuesta:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } f(x)}{f(x)} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } f(x)}{f(x)} = \frac{\text{sen } f(0)}{f(0)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pi \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } f(x)}{f(x)} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} \frac{\text{sen } f(x)}{f(x)} = 1$

ii) Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x) - \text{sen}(3x)}{5x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{\text{sen } x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(8x)}{\text{sen}(4x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\text{sen}(x - 3)}{x^2 - 9}$

f) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\text{sen}(x - 3)}{x^2 - 9}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg}(4x)}{\text{sen}(8x)}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\text{tg } x}$

j) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\text{sen}(x - 4)}{(4 - x)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x - 4)}{(4 - x)}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(\text{tg}(x))}{\text{sen}(x)}$

16) i) Graficar una función ´f´ con dominio en el [0 ; 6] tal que :

$f(0) = 4$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 4$; $f(2)=5$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 6$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$; $f(6) = 3$

¿ Es f continua en [0; 6] ? . ¿ Porqué ? .

ii) Analizar la existencia de límite para la función y el punto que se indican

a) $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & ; x \le 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$ $(x_o = 0)$

e) $f(x) = \dfrac{|x|.(x^2+1)}{x}$; $(x_o = 0)$

b) $f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x \le 10\,0 \\ 2x-2 & ; x > 100 \end{cases}$ $(x_o = 100)$

f) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x + |\text{sen } x|}{x}$; $(x_o = 0)$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & ; x \le 1 \\ 1/(2-x) & ; x > 1 \end{cases}$ $(x_o = 1)$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & ; -5 < x < 0 \\ 2 & ; x = 0 \\ \text{sen } x + 4 & ; 0 < x < 5 \end{cases}$

$(x_o = 0)$; $(x_1 = \pi)$; $(x_2 = -\pi)$

d) $f(x) = \begin{cases} x+4 & ; x \le 0 \\ x+8 & ; x > 0 \end{cases}$ $(x_o = 0)$

h) $f(x) = \begin{cases} x - 950 & ; x < 10^3 \\ 50 & ; x = 10^3 \\ \log x & ; x > 10^3 \end{cases}$

$(x_o = 10^3)$; $(x_1 = 10^4)$; $(x_2 = 10^2)$

i) Si con [x] indicamos el mayor entero que es menor o igual a x, hallar, si existen, los siguientes límites: (<u>sugerencia</u>: graficar las funciones)

$\lim_{x \to 3^+} [x]$; $\lim_{x \to 3^-} [x]$; $\lim_{x \to 3} [x]$; $\lim_{x \to 3,5} [x]$;

$\lim_{x \to 3^+} [x].(x-3)$; $\lim_{x \to 3^-} [x].(x-3)$; $\lim_{x \to 3} [x].(x-3)$

17) En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorenz

$$L = L_o \sqrt{1 - \left(v^2 / c^2 \right)}$$

L_o= longitud del objeto en reposo c = velocidad de la luz

expresa la longitud ´L´ de un objeto en función de su velocidad ´v´ respecto a un observador.

a) ¿ Cuál es el dominio natural de esta función ? .

b) Analizar cual de los límites que se proponen a continuación ´tiene sentido´, calcular aquél que cumpla esta condición y luego interpretar físicamente el resultado obtenido:

$\lim_{v \to c^+} L$; $\lim_{v \to c^-} L$; $\lim_{v \to c} L$

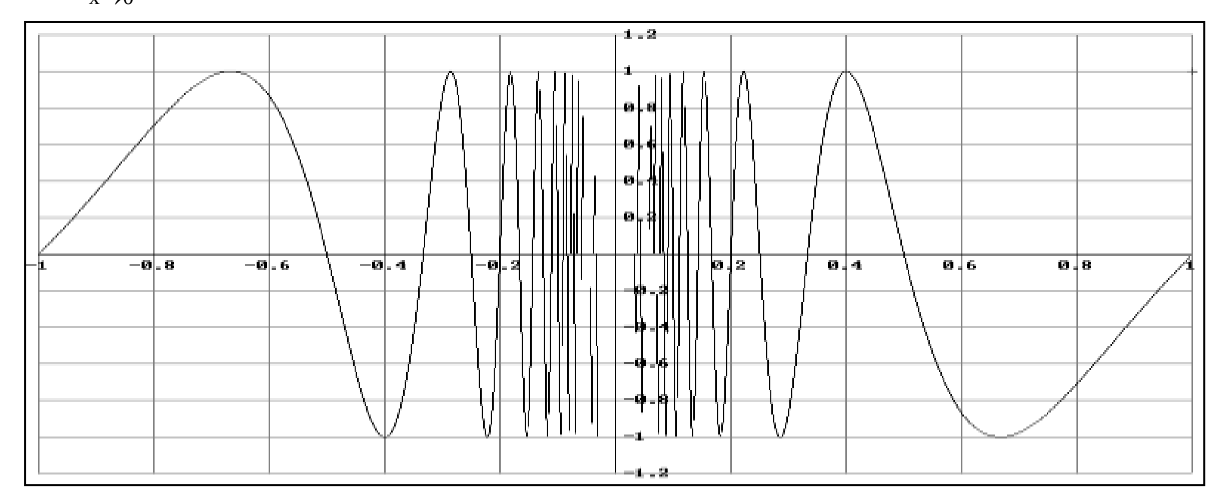
18) La función f(x) = sen (π/x) no está definida en x_o= 0 . En función de ello se decide estudiar su comportamiento para x→0^+. Para ello, y en una primera instancia, se acude al análisis numérico de los datos proporcionados por las siguientes tablas de valores (completarlas).

TABLA I	
x	Sen (π/x)
1	Sen (π) = 0
½	Sen (2π)
1/3	
.....	....
1/10	
1/n	

TABLA II	
x	sen (π/x)
2	sen (π/2) = 1
2/ 5	sen (5 π/2)= 1
2/ 9	
2/ 13	
....	......
2 / (1+4n)	

a) En función de la información proporcionada sólo por la TABLA I, ¿qué podríamos llegar a concluir acerca del comportamiento de f para x→ 0^+ ?. Con base a la información proporcionada por las dos tablas realizar una conjetura acerca del comportamiento de f para x→ 0^+.

b) Analizar el siguiente gráfico (gráfico de f) y decidir luego acerca de la validez de la conjetura hecha en el ítem anterior. Finalmente, concluir acerca del $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(\pi/x)$ y $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\pi/x)$



19) i) Para los siguientes límites analizar cual de ellos admite ser resuelto aplicando el teorema 2 (límite de un producto, pag. 134) o el teorema 13 (de encaje o intercalación- pag. 141). Calcular los límites aplicando el teorema que corresponda en cada caso.
(Sugerencia: recordar que | sen α | ≤ 1 ∀ α ∈ R)

a) $\lim_{x\to 0} \left[x^2 \cdot \operatorname{sen}(\pi/x)\right] =$

b) $\lim_{x\to 1} \left[(x-1).\operatorname{sen}(\pi/x)\right] =$

c) $\lim_{x\to 3} [x].(x-3) =$

ii) Explicar porqué es verdadera la siguiente afirmación:

⊗ Si f y g son tales que $|f(x)| \le k$ para todo x en un entorno de ´a´ (k= cte) y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = 0$.

20) Hallar gráficamente (si existen), el o los valores de "a" para los cuales $\lim_{x \to a} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|} + 2$ e) $f(x) = \dfrac{-2}{|x-2|}$ g) $f(x) = \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|x-2|}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ f) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ h) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2+4}$

21) Graficar las siguientes funciones y leer del gráfico los límites indicados:

a) $\lim_{x \to 0^+} \ln x$ c) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$ e) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x-4}{x-2}$

b) $\lim_{x \to 0^-} (-\ln x)$ d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$ | f) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x-4}{x-2}$

22) Si $\lim_{x \to a} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$ ó $\lim_{x \to a^+} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$ ó $\lim_{x \to a^-} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$, entonces la recta x =a es una asíntota vertical para la curva correspondiente a y = f(x). Para las funciones que se dan a continuación se pide indicar (si existen) las ecuaciones de las asíntotas verticales.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ c) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x+4}$ e) f(x) = ln (x-3) g) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|} + 2$ d) $f(x) = \dfrac{3x-5}{6x-10}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

23) Graficar y determinar del gráfico si existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ d) f (x) = 4x g) $f(x) = \dfrac{4^x}{8^x}$ j) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ e) $f(x) = x^2 - 1$ h) f (x) = sen x k) $f(x) = e^{-x}$

c) f (x) = 3 f) $f(x) = -x^2$ i) f (x) = ln x l) f (x) = sen (π / x)

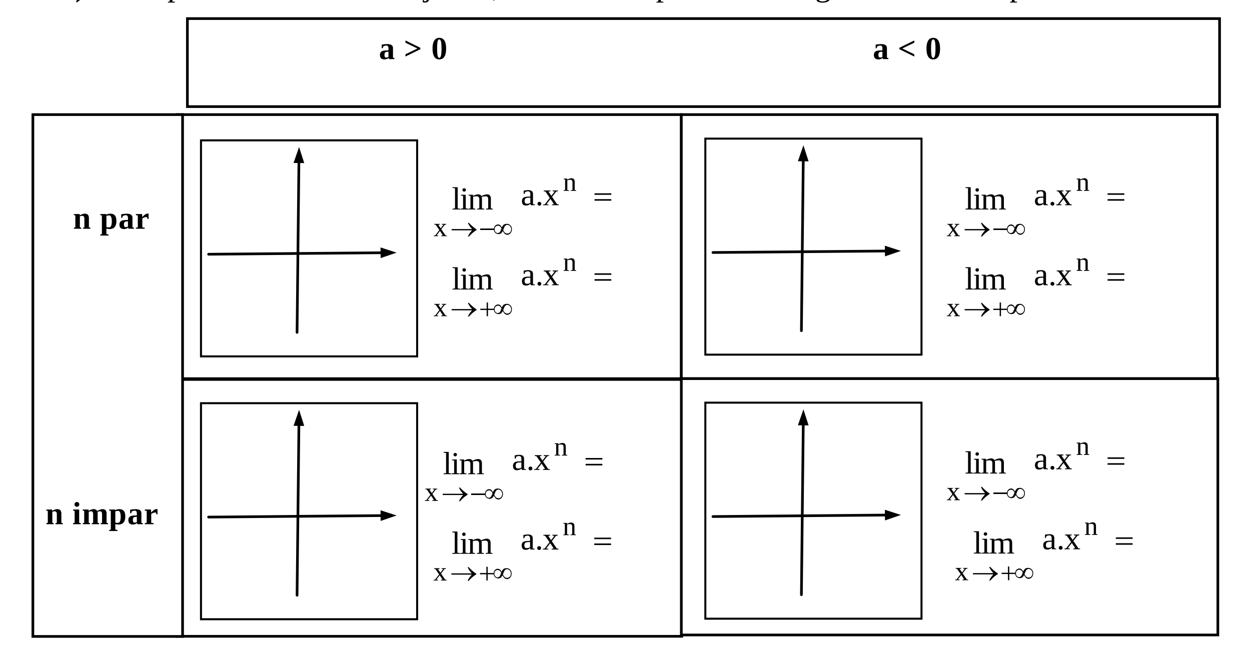
24) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k$, entonces la recta $y = k$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la curva correspondiente a $y = f(x)$. Para las funciones que se indican a continuación se pida dar (si existen) las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ d) $f(x) = e^{-x}$ g) $f(x) = \dfrac{4^x}{8^x}$ j) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x+4}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$ e) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ k) $f(x) = e^{x} + 2$

c) $f(x) = 3$ f) $f(x) = \text{arc tg } x$ i) $f(x) = \ln x$ l) $f(x) = \text{sen } x$

25) Completar el cuadro adjunto, realizando primero las gráficas correspondientes:



	a > 0	**a < 0**
n par	$\lim\limits_{x\to-\infty} a.x^n =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a.x^n =$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a.x^n =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a.x^n =$
n impar	$\lim\limits_{x\to-\infty} a.x^n =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a.x^n =$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a.x^n =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a.x^n =$

26) **Si** f y g son dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ decimos que f y g son funciones ´equivalentes´ para $x \to +\infty$; o sea, son funciones que para valores muy grandes de x´s tienen prácticamente ´el mismo comportamiento´, por ejemplo, si una tiende muy lentamente a infinito la otra también lo hace.

Efectivamente, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ indica que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \cong 1$; o sea , que $f(x) \approx g(x)$

a) dados $p(x) = 3x^5 + 15x^3 + 4x^2 + 3$ y $q(x) = 3x^5$ demostrar que p y q son equivalentes. Usar este resultado para concluir acerca del $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$.

b) dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 .x + a_o$ analizar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando la respuesta.

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} a\ .x^n$$

27) Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^2 + 8) =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x^8 - 4x^3 + 3) =$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^7 + 8x^3 - 3x + \pi) =$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2.x^5 + 4.x + \ln 3) =$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 8x - 1}{3x^3 - 8x + 1} =$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 8x^3 - 1}{3x^3 - 8x + 1} =$

g) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{9 - 3t^3}{3.t^2}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} =$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 + 2x - 3}{x^2 + 2x^3} =$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 5x^3 + 3}{2.x^3 + x^6 + 7x - 1} =$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 - 2x + 3}{0.5.x^2 + 2x - 1} =$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2.(x-8)^{35}.}{.(x-1)^{35}}$

m) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{(t-3).(t-4)}{3.t\ \ (t+1)}$

n) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{(t-3)^3.}{.t^2}$

28) ***Límites del cociente de funciones, en general.***

Completar la tabla que sigue, teniendo en cuenta que con p indicamos un punto x_o , + ∞ ó - ∞ y , con ∞ nos referimos a +∞ o el - ∞.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7
Lim f(x)= x→p	L_1	$L_1 \neq 0$	0	∞	$L_1 \neq 0$	∞	0
Lim g(x)= x→p	$L_2 \neq 0$	∞	∞	∞	0	0	0
Lim f /g = x→p					∞ si:	∞ si:	

En base a la tabla calcular los siguientes límites.
En caso de ser posible graficar las funciones y verificar los resultados, tanto los de los ejercicios como los de la tabla:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{|x|} =$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{e^x} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} =$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} =$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x}{3^{-x}} =$

29) Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones (si existen). Clasificarlos.

a) $f(t) = \dfrac{2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4x-5}$

f) $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}x)$

g) $f(x) = e^{1/x}$

h) $f(x) = \text{tg}\ x$

i) $f(t) = \dfrac{\text{sen}(3.t)}{t}$

j) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

k) $f(x) = \ln(x^2+1)$

l) $f(x) = 1/\ln(x^2+1)$

m) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}.4x}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 1 & ;\ x = 0 \end{cases}$

n) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & ;\ x \neq 2 \\ 2 & ;\ x = 2 \end{cases}$

30) **a)** Analizar la continuidad en el punto que se indica en cada caso para las funciones del ejercicio 16 (ii)- pag 167. Clasificar las discontinuidades.
b) Idem para $x = 0$ y las funciones del ejercicio 4- pag 163.

31) Hallar el valor de las constantes de modo que las funciones definidas a continuación resulten continuas en R

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}.4x}{x} & ;\ x \neq 0 \\ A & ;\ x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & ;\ x \neq 3 \\ A & ;\ x = 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2.\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & ;\ x \neq 0 \\ A & ;\ x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & ;\ x \geq 1 \\ x - A & ;\ x < 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x + A & ;\ x > 0 \\ 2 & ;\ x = 0 \\ A & ;\ x < 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x + A & ;\ x > 2 \\ B & ;\ x = 2 \\ -x + 7 & ;\ x < 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x1} & ; \ x \neq 0 \\ A & ; \ x = 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen.}(x-2)}{x^2-4} & ; \ x > 2 \\ A & ; \ x = 2 \\ x + B & ; \ x < 2 \end{cases}$

32) Encontrar cual es el segmento de recta que debemos tomar para que la siguiente función resulte continua en todo los reales.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; \quad x \leq -1 \\ mx + h & ; \ -1 < x < 1 \\ 2x - 4 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

33) La fuerza gravitacional F ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria M a una distancia ´r´ del centro del planeta viene dada por:

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & ; \quad r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & ; \quad r \geq R \end{cases}$$

M = masa de la Tierra
R = radio de la Tierra
G = cte gravitacional

- ¿ Es F una función continua de r, distancia de M al centro de la Tierra ?.
- Graficar la función en un sistema r – F.

34) Aplicar el teorema de Bolzano para demostrar que existe una raíz real de la ecuación dada en el intervalo especificado.

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$ en (0 ; 1)

b) $x^2 = \sqrt{x+1}$ en (1; 2)

c) $\cos x = x$ en (0 ; 1)

d) $\ln x = e^{-x}$ en (1; 2)

35) Probar que las siguientes ecuaciones tienen por lo menos una raíz real e indicar un intervalo que la contenga.
(Sugerencia: graficar cada una de las funciones que forman la ecuación y determinar, del gráfico, el intervalo donde ambas gráficas se cortan. ¿Para qué sirve?).

a) $x^3 = 2x - 1$

b) $\sqrt{2x} = x - 3/2$

36) Resolver el ejercicio 76 (pag 123), desde la óptica de los conceptos vistos en este capítulo .

Apéndice A: Números reales: conjuntos, propiedades

A1.- CONJUNTOS DE NÚMEROS – PROPIEDADES

- *Los números son sin duda una herramienta básica para cualquier rama de la Matemática. Podríamos compararlos con el átomo en Química o la célula en Biología. Luego, conocerlos y saber usarlos es un requisito indispensable para construir nuevos conocimientos a partir de ellos. Se resumen entonces a continuación las principales características del conjunto de los números reales a los efectos tanto de nivelar los conocimientos previos y establecer un punto de partida como de convenir el lenguaje y símbolos a usar en el desarrollo de la materia.*

- Los pueblos primitivos se valían de piedras para contar sus rebaños. ¿Cuáles son las *´piedras´* que usamos hoy para contar?: *los números naturales.*

La necesidad de realizar otras operaciones (restar, dividir, etc) determinó que fueran apareciendo otros conjuntos numéricos: *los números negativos, los fraccionarios, etc.*
Cada conjunto numérico se representa por una letra según se indica a continuación:

ENTEROS POSITIVOS ó NATURALES: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$

ENTEROS NEGATIVOS: $\mathbf{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4\ldots\ldots\}$

ENTEROS: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{N}$

RACIONALES: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / \ p \in Z, \ q \in N \ (q \neq 0) \right\}$

Observaciones:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ y $\mathbf{Z}^- \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

b) Todo número racional se puede representar en forma *decimal periódica*.

c) No todo número decimal representa un número racional; por ejemplo el número π ($\pi = 3.141592653\ldots$, que generalmente aproximamos como $\pi \approx 3.14$ ó $\pi \approx 3.1416$); tiene una representación decimal *infinita no periódica.*

Luego, π no es un número racional. Existen otros números con representación decimal *no periódica*: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, **e**..... (e = 2.718281828……….).

Tenemos así otro conjunto de números: el de los *irracionales*; que indicamos, **I.**

IRRACIONALES: $\mathbf{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e, \ldots\ldots\}$

Finalmente, de la unión de racionales e irracionales resultan los ***números reales***, **R**.

REALES .	$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$

- Existe otro conjunto de números, los ***números complejos,* C**

$$\mathbf{C} = \left\{ z = a + b.i \ / \ a, b \in R; \ i = \sqrt{-1} \right\}$$

- ***Relación de orden en R.***

Introducimos aquí las propiedades de orden como un conjunto de axiomas referidos al concepto primitivo de ***positivo.*** Así, partimos de admitir que en **R** existe un subconjunto que indicamos $\mathbf{R}^+$ *(reales positivos)* que satisface:

Axioma 1: si $x , y \in R$ entonces $x+y \in R$ y $x. y \in R$
Axioma 2: $\forall\, x \neq 0$, $x \in R^+$ ó $-x \in R^+$. (no ambos)
Axioma 3: $0 \notin R^+$

A los elementos de $\mathbf{R}^+$ los llamamos: ***´números positivos´*** ó ***´positivos´*** :

DEFINICIÓN: *relación de orden en R*

$\mathbf{b > a \Leftrightarrow b - a \in R^+}$ (o sea, si b-a es *positivo* **)**

Observaciones:
a) Si en la definición anterior hacemos a = 0, tenemos: $\mathbf{b > 0 \Leftrightarrow b \in R^+}$ Luego:

REALES POSITIVOS , $\mathbf{R^+ = \{ x \in R / \ x > 0 \}}$

b) Dado $\mathbf{x \in R}$ si $\mathbf{-x}$ es positivo entonces escribimos $\mathbf{x < 0}$ y decimos, ´*x* ***negativo***´.

Tenemos así los siguientes subconjuntos de números reales:

<u>REALES POSITIVOS</u>: $\mathbf{R^+ = \{x \in R / \ x > 0\}}$

<u>REALES NEGATIVOS</u>: $\mathbf{R^- = \{x \in R / \ x < 0\}}$

<u>REALES NO NEGATIVOS</u>: $\mathbf{R_0^+ = \{x \in R / \ x \geq 0\}}$

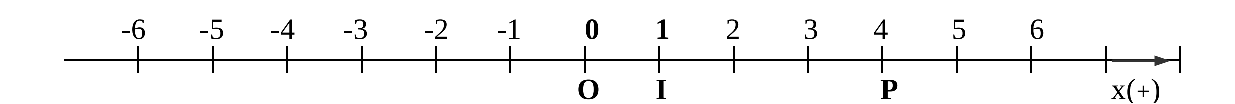
<u>REALES NO POSITIVOS</u>: $\mathbf{R_0^- = \{x \in R / \ x \leq 0\}}$

Propiedades:

a) $x > y$; $a \in R \Rightarrow x + a > y + a$
b) $x > y$; $a > 0 \Rightarrow x . a > y . a$
c) $x > y$; $a < 0 \Rightarrow x . a < y . a$ (¡cuidado!: *cambia el sentido de la desigualdad!!)*
d) $x > y$; $a > b \Rightarrow x + a > y + b$
e) $\frac{x}{y} \in Q$; $\frac{a}{b} \in Q$; $\frac{x}{y} > \frac{a}{b} \Rightarrow x . b > a . y$

A2- LA RECTA REAL

La representación de los números reales como puntos de una recta es una herramienta muy útil para el desarrollo de la Matemática. Esta idea se ilustra en el siguiente gráfico:



Para obtener una representación comenzamos por identificar dos puntos cualesquiera de la recta con **0** y **1.** El semieje que contiene al **1** es el semieje (+), cuestión que indicamos poniendo una flecha en el extremo del mismo. Luego desplazamos el segmento $\overline{\mathbf{OI}}$ (la unidad) sobre la recta y, según la cantidad desplazada y la dirección del desplazamiento, establecemos la correspondencia entre punto y número.

En el gráfico: $\overline{\mathbf{OP}}$ se obtiene de desplazar 4 veces $\overline{\mathbf{OI}}$ hacia la derecha; luego, $\mathbf{P \leftrightarrow 4}$.
El número asociado al punto lo llamamos ´coordenada´, lo indicamos **P**(4).
Usualmente decimos "punto 4" en lugar de "punto de coordenada 4".

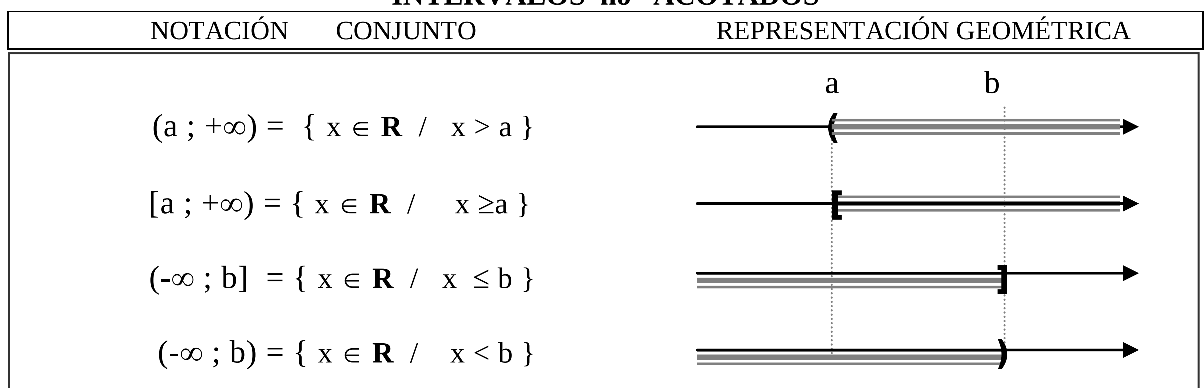
- Además de los conjuntos ya vistos, existen otros conjuntos que ocurren con frecuencia en el cálculo: los **intervalos**. Estos conjuntos son aquellos que geométricamente se corresponden con segmentos o semirrectas. En función de ello convenimos en asignarles un nombre y un símbolo para distinguirlos entre sí y del resto de los conjuntos numéricos.

Se tiene así la siguiente notación para nombrar intervalos:

INTERVALOS ACOTADOS

NOTACIÓN	CONJUNTO	REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA
(a ; b)	$= \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a < x < b \}$	a ( ) b
[a ; b]	$= \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a \le x \le b \}$	[ ]
(a ; b]	$= \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a < x \le b \}$	( ]
[a ; b)	$= \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a \le x < b \}$	[ )

INTERVALOS no ACOTADOS



A3 - VALOR ABSOLUTO

DEFINICIÓN:

VALOR ABSOLUTO	El valor absoluto de una número x, denotado por | x |, es un número real que, es *igual a x* , si x es positivo ó cero y , es *el opuesto de x*, si x es negativo. $\mathbf{\lvert x \rvert = x \quad ; \quad si \quad x \ge 0}$ $\mathbf{\lvert x \rvert = -x \quad ; \quad si \quad x < 0}$

Ejemplos:

$\lvert 3 \rvert = 3$	$\lvert \pi - 1 \rvert = \pi - 1$ [$\pi - 1 > 0$]	$\lvert \log(\pi-2) \rvert = \log(\pi-2) = 0.058$ [$\log(\pi-2) > 0$]
$\lvert -3 \rvert = -(-3) = 3$	$\lvert 1 - \pi \rvert = -(1-\pi) = \pi - 1$ [$1-\pi < 0$]	$\lvert \log(\pi-3) \rvert = -\log(\pi-3) = 0.85$ [$\log(\pi-3) < 0$]

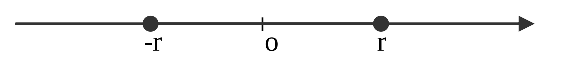
Nota: *observar que en todos los casos el resultado es un número positivo.*

Propiedades :

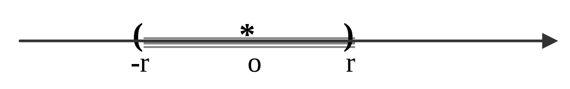
a) $\lvert \mathbf{x} \rvert \geq \mathbf{0}$; $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$.

b) $\lvert \mathbf{x} \rvert = \lvert -\mathbf{x} \rvert$; $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$.

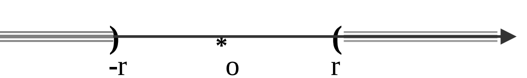
c) $\lvert \mathbf{x} \rvert = \mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{r}$ ó $\mathbf{x} = -\mathbf{r}$



d) $\lvert \mathbf{x} \rvert < \mathbf{r} \Leftrightarrow -\mathbf{r} < \mathbf{x} < \mathbf{r}$



e) $\lvert \mathbf{x} \rvert > \mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{x} < -\mathbf{r}$ ó $\mathbf{x} > \mathbf{r}$

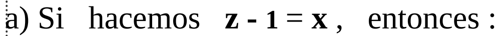


f) $\sqrt{\mathbf{x}^2} = \lvert \mathbf{x} \rvert$; $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$.

> Recordar que $\sqrt{\ }$ significa "la raíz cuadrada positiva de... "
> O sea: $\sqrt{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b}^2 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

Ejemplos :

a) Hallar $\mathbf{z}$ / $\lvert z-1 \rvert = 2$.



-1   0   1   2   3

a) Si hacemos $\mathbf{z - 1 = x}$, entonces :

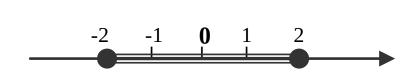
$\lvert \mathbf{x} \rvert = 2 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 2$ ó $\mathbf{x} = -2$ (por (c))

$\Leftrightarrow (z-1) = 2$ ó $(z-1) = -2$

$\Leftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{3}$ ó $\mathbf{z} = \mathbf{-1}$

$\boldsymbol{S} = \{ -1 ; 3 \}$

b) Hallar $\mathbf{z}$ / $\lvert z \rvert < 2$.

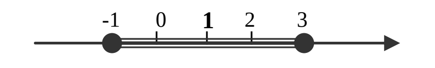


b) Por (d); $\lvert \mathbf{z} \rvert < \mathbf{2} \Leftrightarrow \mathbf{-2} < \mathbf{z} < \mathbf{2}$;

o sea : $\{z \in R \,/\, -2 < z < 2\} = \mathbf{(-2 ; 2)}$

$\boldsymbol{S} = \mathbf{(}-2 ; 2\mathbf{)}$

c) Hallar $\mathbf{z}$ / $\lvert z-1 \rvert < 2$.



c) Si hacemos $z - 1 = \mathbf{x}$, entonces:

$\lvert \mathbf{x} \rvert < \mathbf{2} \Leftrightarrow \mathbf{-2} < \mathbf{x} < \mathbf{2}$ (por (d))

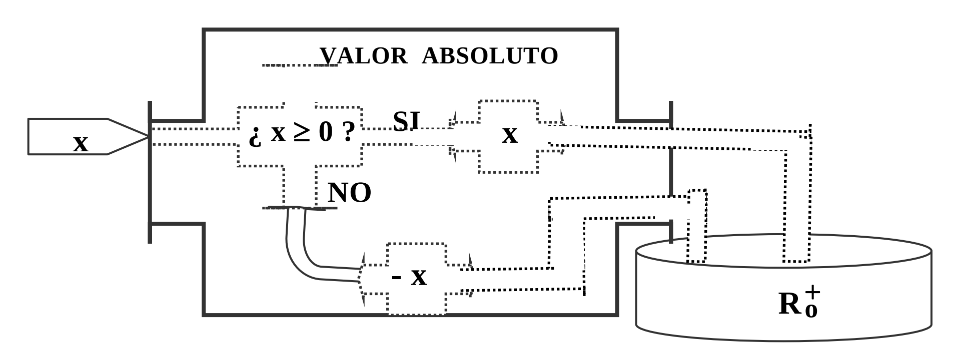
$\Leftrightarrow \mathbf{-2} < \mathbf{z-1} < \mathbf{2}$

$\Leftrightarrow \mathbf{-1} < \mathbf{z} < \mathbf{3}$;

o sea : $\{z \in R \,/\, -1 < z < 3\} = \mathbf{(-1 ; 3)}$

$\boldsymbol{S} = \mathbf{(}-1 ; 3\mathbf{)}$

(*) El valor absoluto puede ser concebido como una ´*máquina*´ que procesa números (como es la calculadora). O sea , como una máquina con una entrada por donde ingresan números y una salida por donde egresan los *transformados* de dichos números. Imaginada así, esta máquina [valor absoluto] , ´positiviza´ números, ya que, si entra un número positivo, sale *el mismo* (positivo); mientras que si entra un número negativo sale el *opuesto del mismo* (positivo por ser el opuesto de un negativo).

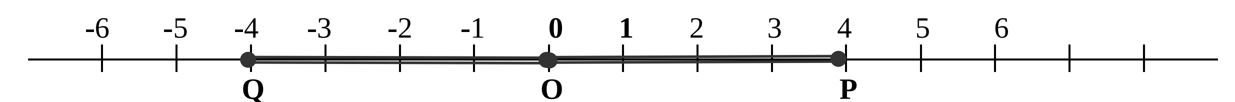


A4 - DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE LA RECTA

DEFINICIÓN :

d(A,B),	Llamamos distancia entre dos puntos **A** y **B ,** que denotamos **d(A,B)**, a la medida del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$. O sea, **d(A,B)** = *med* $\overline{\mathbf{AB}}$

- ¿Qué relación existe entre la coordenada de un punto y su distancia al origen ? .

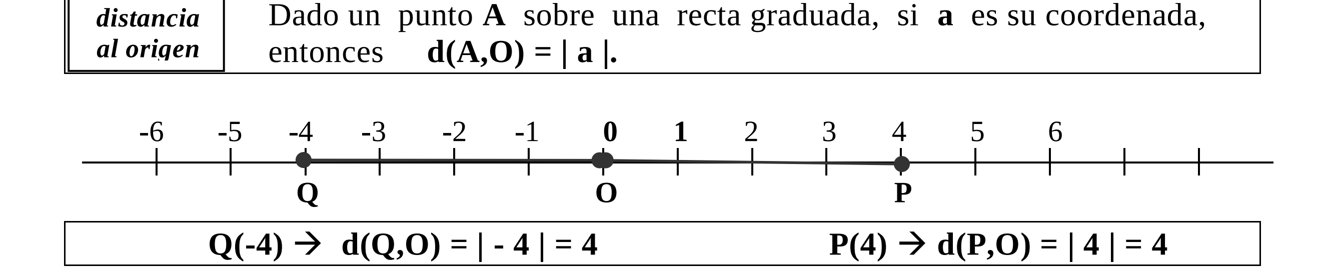


- Del gráfico vemos que: **P(4)** y **d (O,P) = 4** ⇒ coordenada P = d (O,P)
Q(-4) y **d (O,Q) = 4** . ⇒ coordenada Q = - d (O,Q)

Conclusión: la coordenada de un punto y su distancia al origen o bien coinciden o bien son opuestas una de la otra; o sea, a lo sumo, difieren en el signo.

Luego, podemos conectar estos dos conceptos entre sí a través del ´valor absoluto´ .
Efectivamente, vemos que conocida la coordenada de un punto basta ´positivizar´ la misma para tener su distancia al origen. Como el valor absoluto ´positiviza´ números, esta es entonces la herramienta que permite pasar de ´coordenadas´ a ´distancia al origen´ así como también la que permite obtener un método algebraico para el cálculo de distancia entre puntos.

distancia al origen	Dado un punto **A** sobre una recta graduada, si **a** es su coordenada, entonces **d(A,O) = | a |.**



Q(-4) → d(Q,O) = | - 4 | = 4	**P(4) → d(P,O) = | 4 | = 4**

Observaciones: Conocida la coordenada de un punto, conocemos su distancia al origen. ¿Vale la recíproca?; o sea, conocida la distancia, ¿conocemos la ´coordenada´ del punto?. Queda claro que no, ya que **d(A,O)** = α sólo informa que *med* $\overline{\mathbf{AO}}$ = α , y esto no alcanza: existen dos puntos que cumplen esta condición, uno a cada lado del origen. Luego, para establecer la coordenada se necesita otro dato: de que lado del origen está A.
¿Cómo distinguimos de qué lado del origen está un punto?: con el signo de su coordenada.
- si A está a la derecha del origen su coordenada es (+) ; o sea, **coord A** = α (= *med* $\overline{\mathbf{AO}}$ *)*.
- si A está a la izquierda del origen su coordenada es (-); o sea, **coord A** = - α (=- *med* $\overline{\mathbf{AO}}$ *)*

Medida con signo

Definimos la medida con signo de $\overline{\mathbf{AO}}$, como sigue:
- *med.c/sig* $\overline{\mathbf{AO}}$ = *med* $\overline{\mathbf{AO}}$, si A está en el semieje positivo (+)
- *med.c/sig* $\overline{\mathbf{AO}}$ = - *med* $\overline{\mathbf{AO}}$, si A está en el semieje negativo (-).

Coordenada

la coordenada de A es la medida con signo del segmento $\overline{\mathbf{AO}}$.
O sea, A(a) → a = *med.c/sig* $\overline{\mathbf{AO}}$

Ejemplo: **P (4)** → 4 = *med. c/sig* $\overline{\mathbf{OP}}$; indica **P** a 4 unidades de **O** y en el semieje (+)
Q(-4) → - 4 = *med. c/sig* $\overline{\mathbf{OQ}}$; indica **Q** a 4 unidades de **O** y en el semieje(-).

cálculo d(A,B)

Dados dos puntos **A** y **B** sobre una recta graduada, si **a** y **b** son sus respectivas coordenadas, entonces: **d(A,B) = | b – a |.**

Nota: Esta fórmula para el cálculo de la distancia entre dos puntos se obtiene a partir de tener en cuenta que las coordenadas de los puntos son las medidas con signo de los respectivos segmentos que determinan con el origen.

Distancia: ´ bien definida´

Es un hecho que la distancia entre **A** y **B** es la misma que entre **B** y **A.** Luego, para comprobar si la fórmula de cálculo dada es *consistente* con la realidad, analizamos si verifica esta propiedad.

| x | = | –x |

d(A,B) = **| b – a |** = **| - (b – a) |** = **| a – b |** = **d(B,A)** ⇒ **d(A,B)** = **d(B,A).**

distancia entre números

Dados los números reales a y b, llamamos **d(a,b)** a la distancia entre los puntos **A** y **B** cuyas coordenadas son a y b respectivamente.

d(a,b) = | b-a |

Ejemplos:

a) Los puntos P(3); Q(5) y R(z) son distintos y se hallan todos sobre una misma recta. Si d(P,R) = d(P,Q) **,** ¿ quién es R ?.

- **d(P,R) = d(P,Q)** ⇒ | z-3 | = 2 ⇒ z-3 = 2 **ó** z-3 = –2 ⇒ z = 5 **ó** z = 1.
  Como son distintos ⇒ z = 1 ⇒ **R(1)**

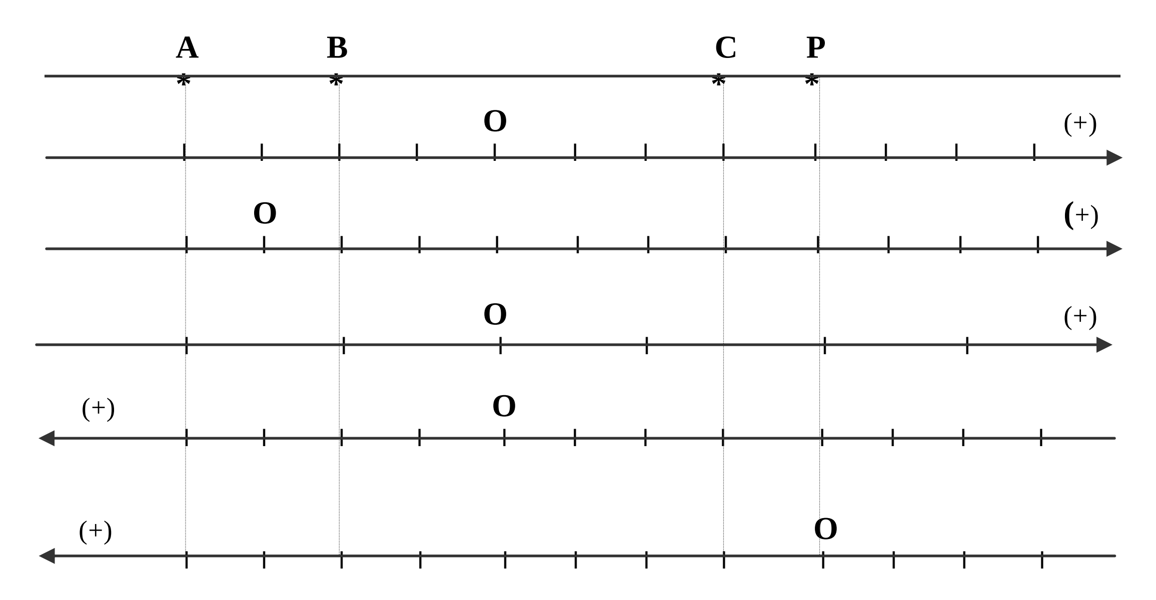
b) Los puntos P(3); Q(5) y R(z) son distintos y se hallan todos sobre una misma recta. Si d(P,R) = d(Q,R) , ¿ quién es R ?

- **d(P,R) = d(Q,R)** ⇒ | z-3 | = | z-5 | ⇒ z-3 = z-5 **ó** z-3 = –(z-5)
  ⇒ ∅ **ó** **z = 4.** ⇒ **R(4)**

Apéndice A: Ejercicios

1.- Los puntos A ; B; C y P se hallan todos sobre una misma recta. A los efectos de asignarles coordenadas se procede a graduar la recta. Se pide:

a) dar las coordenadas de A ; B; C y P para cada una de las graduaciones de la recta que se indican a continuación si, en todas ellas, la longitud entre dos marcas consecutivas es de "1 unidad" y **O** es el origen .



b) En cada caso indicar: d (A,O) ; d (P,O) ; d (A,P).

c) Si x = coord. de P; indicar V ó F , justificar:
- d (P,O) = x
- d (P,O) = | x |
- Si P pertenece al semieje negativo entonces x = - d (P,O)
- x = med. sig. $\overline{OP}$.

2.- a) Hallar todos los puntos **X**(x) cuya distancia a **P**(3) sea 2.
b) Hallar todos los puntos **X**(x) tal que d (3,x) < 2.

Nota: al conjunto { x ∈ R / d(3,x) < 2 } lo llamamos: entorno de 3 de radio 2 .
Lo indicamos: E(3;2)

Entorno de un punto	Entorno de x_0 de radio δ. **E(x_0;δ) = { x ∈ R / d(x_0 , x) < δ**

3.- Resolver graficando en cada caso todos los puntos o conjuntos que se obtengan.

a) Los puntos P(-2); Q(2) y R(z) son distintos y se hallan todos sobre una misma recta. Si d(P,R) = d(P,Q) **,** ¿ quién es R ?. Graficar todos los puntos.

b) Los puntos P(-2); Q(2) y R(z) son distintos y se hallan todos sobre una misma recta.

Si d(P,R) = d(Q,R) , ¿ quién es R ?

c) Hallar todos los puntos **X**(x) cuya distancia a **P**(5) sea 2. Idem, pero d (P, X) < 2.

d) Hallar todos los puntos **X**(x) cuya distancia a **P**(-3) sea 2. Idem, pero d (P, X) < 2.

4.- a) Escribir A usando notación de conjuntos si A es el conjunto de los “x´s” que distan 4 unidades del punto –2.

b) Escribir A como entorno de un punto si: A = (3 , 9) ; A=(-1; 3) ; A=(0;4)

5.- Representar sobre un eje coordenado los intervalos A ; B ; $A \cap B$ y $A \cup B$ para:

a) A = [2 ; 6] ; B = [-3 ; 4]

b) A = [2 ; 6] ; B = [-3 ; 0]

c) A = [2 ; 4] ; B = [4 ; 7]

d) A = [2 ; 4) ; B = [4 ; 7]

e) e) A = [2 ; 6] ; B = [3 ; 4]

f) A = E (3,1) ; B = E(3,2)

g) $A = \{x \in R \ / \ \frac{x}{x-1} \geq 0 \}$

$B = \{x \in R \ / \ \frac{x}{x-1} \leq 0 \}$

6.- Unir cada conjunto de la primer columna con su equivalente de la segunda.

$A = \{ x \in R \ / \ \lvert x-2 \rvert < 5 \}$	J = (-2 ; 10)
$B = \{ x \in R \ / \ \lvert x+2 \rvert < 5 \}$	K = (δ -3 ; δ +3)
$C = \{ x \in R \ / \ \lvert x - 3 \rvert < \delta \}$	L = (-3 , 7)
$D = \{ x \in R \ / \ \lvert x - 4 \rvert < -6 \}$	M = (-7 , 3)
$E = \{ x \in R \ / \ \lvert 2x + 4 \rvert < 6 \}$	N = (-5 , 1)
$F = \{ x \in R \ / \ \lvert -2x - 4 \rvert < 6 \}$	O = $\varnothing$
$G = \{ x \in R \ / \ d(x,2) < 5 \}$	P = (3-δ ; 3+δ)
$H = \{ z \in R \ / \ d(z,3) < \delta \}$	Q = (3 ; 3+δ)

7.- Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar respuesta.

a) $x^2 \geq 0 ; \ \forall x \in R$

b) $a \leq b \Rightarrow -a \leq -b$

c) $x < 1 \Rightarrow 1/x > 1$

d) $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$

e) $-x \leq 0 ; \ \forall x \in R$

f) $x = -x - 6 \Rightarrow -x > 0$

g) $x = 6 - x \Rightarrow -x < 0$

Apéndice B: El plano coordenado

Hasta ahora hemos considerado puntos sobre una recta e identificado los mismos a través de números reales. Ahora consideramos puntos en el plano.
Como el plano es ´bidimensional´ para identificar puntos del mismo necesitamos *dos direcciones*. O sea, instalada una copia de la recta real debemos añadir *otra copia*. En principio la única condición que se pide a ambas rectas es que se intersequen en el origen. En tal caso, constituyen lo que se llama un **sistema de referencia plano.**
Normalmente la segunda recta real se ubica perpendicular (*ortogonal)* a la primera (pero no es condición necesaria para tener un sistema de referencia plano). En este caso es de uso y costumbre que una se tome horizontal y la otra vertical, que sobre la horizontal el sentido positivo se fije hacia la derecha mientras que, para la vertical, se tome hacia arriba. (el sentido positivo (+) se indica con una flecha en el extremo del semieje que elegimos como tal).
A la recta horizontal la llamamos **eje x**, a la vertical, **eje y** y ambas constituyen un, ´**sistema cartesiano *ortogonal***´. (sistema de referencia donde los ejes son ortogonales).

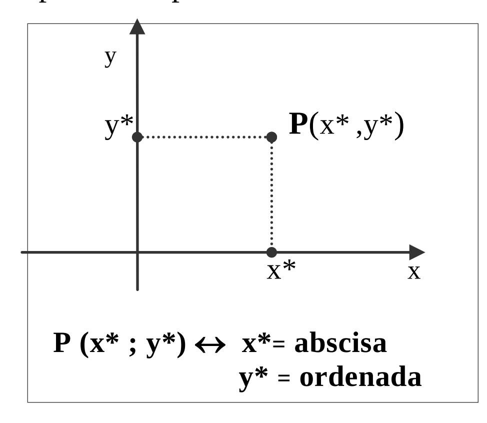
plano cartesiano

Un plano al que se añade un sistema cartesiano ortogonal se llama **plano cartesiano**. Se denota $\boldsymbol{R}^2$; ya que usamos dos *copias* de ***R.***

En un plano cartesiano, cualquier punto se localiza mediante un par ordenado de números reales llamados, igual que antes, **coordenadas *cartesianas* del punto.**

He aquí cómo hacemos para asignar coordenadas a un punto del plano:

- Sea **P** punto del plano, luego para hallar sus coordenadas cartesianas trazamos perpendiculares desde **P** hasta cada uno de los eje coordenados .
- Una perpendicular interseca al eje x en la "coordenada x" ó **abscisa de P**; etiquetada como **x*** en el gráfico.
- La otra interseca al eje y en la "coordenada y" u **ordenada de P**; etiquetada como **y*** .
- El par de números **(x*; y*)**, en ese orden, son las **coordenadas cartesianas** de **P .**
- Para ser concisos hablamos de " el punto **P (x* ; y*)** ".

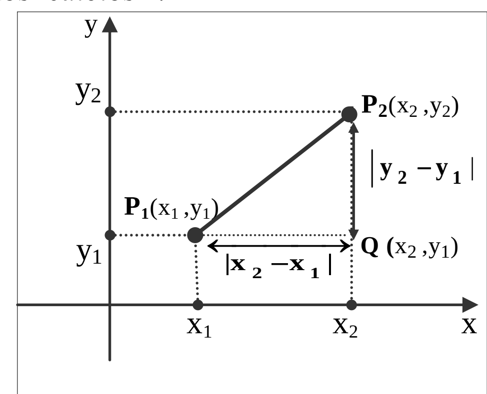


Distancia entre puntos del plano

El concepto de *distancia entre puntos del plano* se sustenta en el **teorema de Pitágoras**: "en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ".

- La distancia d ($\mathbf{P}_1$ **;** $\mathbf{P}_2$) es, por definición, la medida del segmento $\overline{\mathbf{P_1 P_2}}$.
- Del gráfico resulta claro que $\overline{\mathbf{P_1 P_2}}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices $\mathbf{P}_1$ **,** $\mathbf{P}_2$, **Q**.
- Luego , por Pitágoras, concluimos que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}) = \sqrt{(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_1})^2+(\mathbf{y_2}-\mathbf{y_1})^2}$$



Apéndice B: Ejercicios

1.- Trabajando en un sistema convencional :

a) Indicar a qué cuadrante o eje pertenecen los puntos que se indican a continuación si "a" no es cero y "e" es la base de los logaritmos naturales:
A $(-10^6, 10^3)$; **B** $(\pi, -3)$; **C** $(e, 1-e)$; **D** $(\sqrt{2}-5, -2e)$; **E** $(\log 1, \log 10^{-3})$;
F $(a^2, \pi-3)$; **G** $(a, -3)$; **H** $(-a^2, (-a)^2)$; **I** $(\sqrt{(-4)^2}, 4)$; **J** $(\log 10, \ln 1)$.

b) Dados P (a,b) ; Q (-a, -b) y R (a; -b) indicar a qué cuadrante pertenece cada uno de ellos si:
(i) $a>0$; $b>0$ (ii) $a>0$; $b<0$ (iii) $a<0$, $b<0$.

c) Dado P (a,b) graficarlo en un sistema coordenado ortogonal si:
(i) $a.b>0$ y $a<0$ (ii) $a.b>0$ y $\sqrt{a} \in R$ (iii) $a+b=0$ y $|a| = -a$

2.- En los ejercicios que siguen completar el cuadro y analizar si los puntos que se dan en ellos presentan alguna particularidad digna de destacar:

a) Sea **A**(3,4)

B	(2,3)	(3,1)	(4,4)	(-3,-4)	(0,0)	(-1,1)
d(A,B)						

b) Sea **A**(0,2)

B	(2,2)	(3,2)	(0,2)	(-3,2)	(-4,2)	(x,2)
d(A,B)						

c) Sea **A**(1,2)

B	(4,6)	(5,5)	(1,-3)	(-4,2)	(6,2)	(-2,6)	(1,7)	(5,-1)
d(A,B)								

(*) Si indicamos con **C** la curva que determinan estos puntos (¿nombre?) , hallar una fórmula que exprese que el punto P(x,y) pertenece a **C.**

3.- a) La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. En función de esta propiedad hallar la ecuación de la circunferencia de centro C (a,b) y radio r.

b) Dar la ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro C(0,0). Luego obtener 6 puntos de esta circunferencia.

c) Dar la ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro C(2,4). Luego obtener 6 puntos de esta circunferencia.

4) a) Graficar una recta r_1 paralela la eje x que pase por el punto P(1,3) . Hallar (gráficamente) tres puntos de la misma de modo que la distancia entre dos puntos "consecutivos" permanezca constante e igual a "2".
Verificar analíticamente.

b) Graficar una recta r_2 perpendicular a la anterior en el punto P(1,3) . Hallar (gráficamente) dos puntos de la misma que disten 3 unidades del punto P.

c) Dado el punto Q(2,1) determinar (gráfica e intuitivamente) R, punto de r (item (a)) que se encuentra a menor distancia de Q. Indicar cual es esa distancia. Verificar con algunos puntos. Idem para la recta del item (b).
La distancia obtenida en cada caso se llama, "*distancia del punto a la recta*".

d) Indicar V ó F:
   i) si R es el punto de r a menor distancia de Q y R≠ Q , entonces R se encuent sobre la recta perpendicular a r que pasa por Q.
   ii) Si d = d (Q; r) entonces la circunferencia de centro en Q y radio d es tangente a la recta r .

e) Escribir en una oración el procedimiento para hallar la distancia de un punto a una recta (a la cual no pertenece).

5.- A continuación se indican tres conjuntos de puntos A , B y C y cuatro sistemas coordenados, se pide:
   a) Enumerar los elementos de B y C.
   b) Representar los sistemas en un papel milimetrado.
   c) Graficar cada conjunto en el sistema que resulte más adecuado para ello.

A= { (5,0) ; (-5,0) ; (0,0) ; (0,5) ; (0,-5) ; (-4,3) ; (-4,-3) ; (-3,4) ; (3,-4) ; (3,4) ; (4,3) }

B = $\{ (\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{10}}, \mathbf{y}) / (x, y) \in A \}$; C = $\{ (\mathbf{x}, 10\,\mathbf{y}) / (x, y) \in A \}$

Los sistemas están en la posición convencional pero difieren en la graduación de sus ejes. A continuación indicamos la unidad con que se gradúa cada uno de ellos.

	S_1	S_2	S_3	S_4
U_x	1 cm.	0.5 cm.	5 cm	0.1 cm
U_v	1 cm.	0.5 cm.	1 cm.	0.1 cm.

6.- Graficar los conjuntos que se indican a continuación:

A = { (x, y) / $x \in N$; $1 \le x \le 5$; y = 2 }

B = { (x, y) / $x \in R$; $1 \le x \le 5$; y = 2 }

C = { (x, y) / $x \in R$; y = 2}

D = { (x, y) / x = y ; $x \in R$ }

E = { (x, y) / x . y = 0 }

F = { (x, y) / $x \ge 0$; $y \in R$ }

G = { (x, y) / $x \ge 0$; $y \le 0$ }

H = { (x, y) / x .y < 0 }

J = { (x, y) / $-2 \le x \le 3$; $y \in R$ }

K = { (x, y) / $-2 \le x \le 3$; $-1 \le y \le 1$ }

L = { (x, y) / | x | =1 ; $y \in R$ }

M = { (x, y) / $x^2 + y^2 = 0$ }

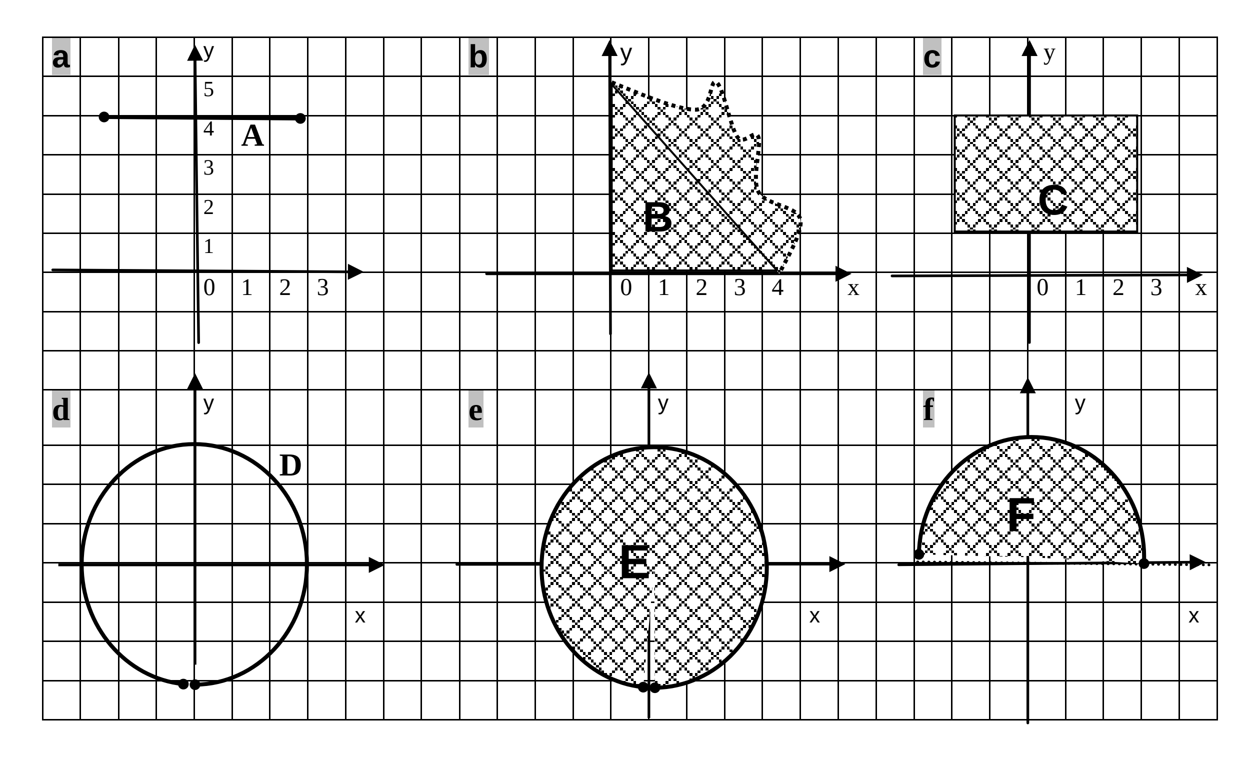
N = { (x, y) / $x^2 + y^2 = 4$ }

O = { (x, y) / $x^2 + y^2 \le 4$ }

P = { (x, y) / $x^2 + y^2 > 4$ }

Q = N $\cap$ { (x, y) / $y \ge 0$;

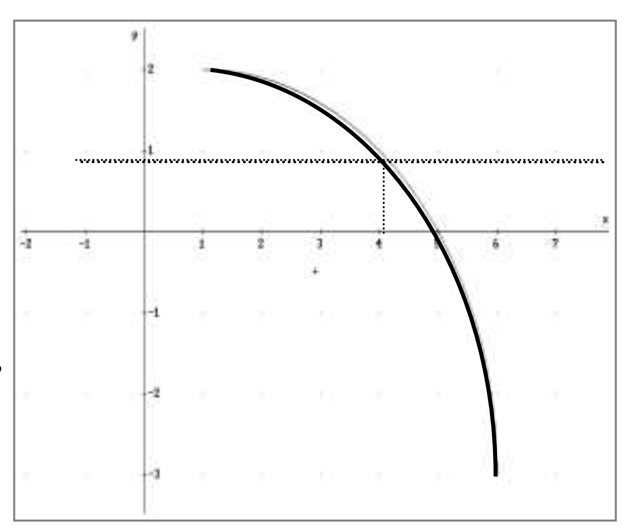
7.- Describir por comprensión los conjuntos cuyas gráficas se indican



11.- Dada la curva "C" se pide:

a) Identificar, gráficamente, los siguientes conjuntos .
   A = {(x,y) ∈ C / y < 0 }
   B = {(x,y) ∈ C / y ≥ 0 }
   C = {(x,y) ∈ C / y ≥ 1 }
   D = {(x,y) ∈ C / 4 ≤ x ≤ 5 }
   E = {(x,y) ∈ C / 5 ≤ x ≤ 6 }

b) Identificar, gráfica y analíticamente, los siguientes conjuntos.
   G = { **x∈ R** / (x,y) ∈C ; y ≥ 0 }
   H = { **x∈ R** / (x,y) ∈C ; y ≤ 1 }
   I = { **x∈ R** / (x,y) ∈C ; y ≤ 0 }



12.- Dado el conjunto **E** = {(x ,y) ∈ $\boldsymbol{R}^2$ / y = (x –1) . (x-9) } , se pide:

a) Indicar tres puntos de **E** y tres puntos que no pertenezcan a **E**.
b) Hallar todos los puntos de **E** correspondientes a las siguientes abscisas:
   $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 5$; $x_4 = 10$.
c) Hallar y *graficar* todos los puntos de **E** correspondientes a las sgtes ordenadas:
   $y_1 = 20$; $y_2 = 9$; $y_3 = 0$; $y_4 = -12$; $y_5 = -16$; $y_6 = -21$.
d) Demostrar que los puntos de **E** de abscisa "5-δ " y "5+δ" *tienen la misma ordenada* y , que el punto medio entre ellos tiene siempre abscisa "5" .
e) Dado A,B, C puntos del conjunto **E** determinar *gráficamente* sus simétricos respecto de la recta x=5 y verificar que también pertenece n al conjunto **E.**
   A(0, 9) ; **B**(3, -12) ; **C**(4, -15) .

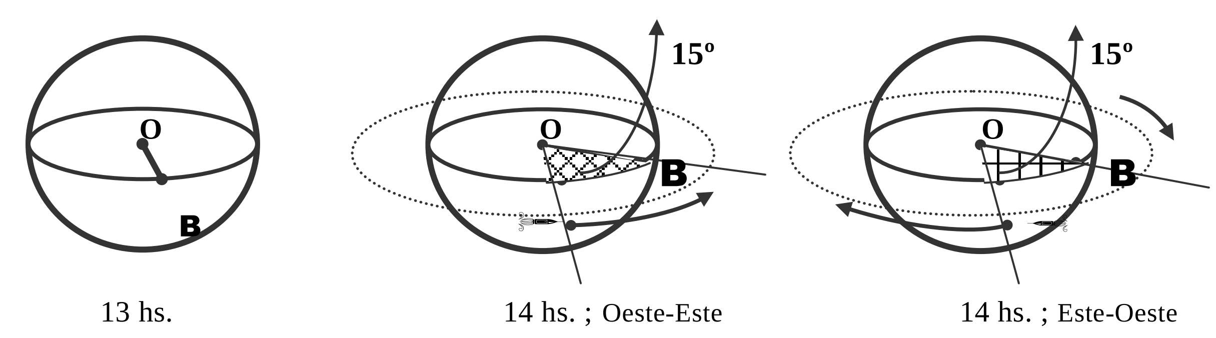
Apéndice C: Funciones trigonométricas

C1 .- ANGULOS DIRIGIDOS

Según sea el ámbito donde trabajemos los ángulos admiten distintas conceptualizaciones. Así, en la geometría clásica, los ángulos son considerados como el resultado de la intersección de dos semiplanos; luego, no tienen signo y son siempre menores de cuatro rectos. Esta definición es útil en la geometría ya que ésta es, esencialmente, estática; pero apenas se considera la posibilidad de ´movimiento´ la misma resulta ´insuficiente´. Veamos el siguiente ejemplo.

(*) La tierra gira sobre su eje, luego tomado un punto sobre un paralelo (por ejemplo el Ecuador) éste ´gira´ alrededor del centro de la tierra. Se sabe que lo hace a razón de 15º por hora y de Oeste a Este. Consideremos ahora que a las 13 hs de cierto día se lanza, desde una base espacial (B), un cohete para circunvolar la tierra con una velocidad de giro de 360º por hora (1 giro, en una hora). Nos preguntamos: a la hora del lanzamiento, el cohete ¿ pasó o está pasando sobre la base?.

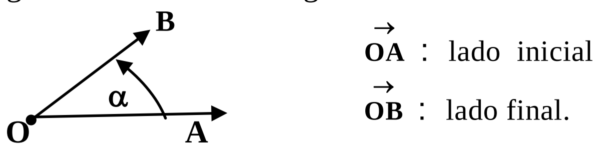
- *Los gráficos adjuntos muestran que no podemos contestar esta pregunta si no se informa **en que sentido gira el cohete** (O→E ó E→O). En el primer caso la respuesta es NO, pues si bien el cohete ha realizado un giro completo y está ´en el punto de partida´, la base se ha desplazado 15º , luego debe volar unos minutos más para pasar sobre ella.* (¿cuántos?). *En el segundo caso la respuesta es SI, pasa sobre ella ´antes de la hora´.*



13 hs. 14 hs. ; Oeste-Este 14 hs. ; Este-Oeste

*En la resolución de este problema vemos que el ángulo aparece interpretado como, ´la porción de plano barrida por una semirrecta móvil (el radio vector) que gira alrededor de su origen **O´.** Observamos también la necesidad de distinguir el **sentido** de generación del ángulo (éste influye en el resultado). Finalmente, en el giro Oeste-Este, vemos claramente también que hallar el instante en que el cohete pasa nuevamente sobre la base requiere considerar giros **mayores de 360º.** Esta u otras cuestiones similares son de consideración frecuente en el desarrollo de la ciencia. Luego, necesitamos precisar una definición de ángulo que resulte adecuada para el tratamiento de las mismas.*

ángulo Llamamos ángulo $\widehat{AOB}$ a la porción de plano barrida por una semirrecta móvil que gira alrededor de su origen **O.**



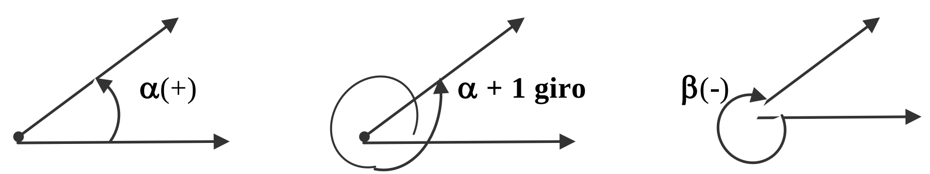
$\vec{OA}$: lado inicial

$\vec{OB}$: lado final.

(*) el lado inicial, $\vec{OA}$, al girar alrededor del origen puede hacerlo en dos sentidos: horario (**sentido negativo)** y antihorario (**sentido positivo**). Esto lo indicamos con un "arco dirigido"; o sea, un arco con una flecha en uno de sus extremos.

ángulo dirigido

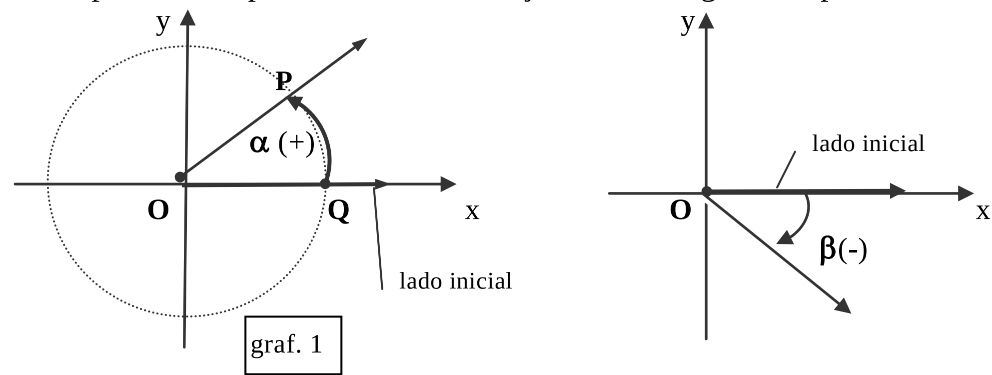
Angulo en el que se distingue el ´*sentido de giro*´ . Está determinado por dos semirrectas con origen común (lado inicial y lado final) y un ´arco dirigido´ que indica el sentido de giro y el número de giros.



Nota: a partir de ahora prescindiremos del término ´dirigido´ y usaremos la palabre **ángulo**. Saldrá del contexto a cual nos referimos.

posición estándar

Un ángulo está en **posición estándar** cuando su vértice coincide con el origen de un sistema cartesiano y su lado inicial está sobre el eje x positivo. A partir de ahora trabajamos con ángulos en posición estándar.



circunferencia trigonométrica y medida de ángulos

- Circunferencia con centro en el origen de un sistema cartesiano y **radio 1.** (graf.1)
- Los lados de un ángulo en posición estándar cortan la circunferencia trigonométrica en dos puntos: **Q** (s/ lado inicial) y **P** (s/ lado final).

Luego, determinan un arco de circunferencia: $\overset{\frown}{QP}$.

Así, a cada ángulo le corresponde un arco. Como los arcos los sabemos ´medir´, (establecer su longitud) los usamos para asignar una ´medida´ a los ángulos. Así :

´ la medida de un ángulo es la medida del arco que este subtiende en la circunferencia trigonométrica´.

- Los arcos (ángulos) se pueden medir en grados o en radianes (rad).
- La diferencia radica en la unidad de medida adoptada. En el sistema sexagesimal es el GRADO (360 avas partes de la long. de la circunferencia); mientras que en el sistema radian es el metro (o, sus unidades derivadas: cm. , mm, etc).

medida de ángulos en RADOS

la medida en grados del ángulo α es la medida en grados del arco $\overset{\frown}{QP}$ que este intercepta en la circunferencia (trigonométrica o no).

medida de ángulos en RADIANES

La medida en radianes del ángulo α es la ***longitud*** del arco $\overset{\frown}{QP}$ que este intercepta en la circunferencia *trigonométrica* .

unidad de medida de ángulos

1 GRADO = *360 avas partes de la longitud de la circunferencia*.

1 RADIAN = *ángulo que en la circunferencia trigonométrica subtiende un arco de longitud 1.*

- El arco abarcado por *1 giro* es una circunferencia completa. Luego, 1 giro mide 360º ó 2π rad. (longitud circunferencia de radio 1). De esta relación básica tenemos:

a) π **rad = 180º**

b) **1 rad**. = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ ≈ **57.3 º** ; **1º** = $\left(\frac{\pi}{180}\right)$ rad. ≈ **0.017** rad.

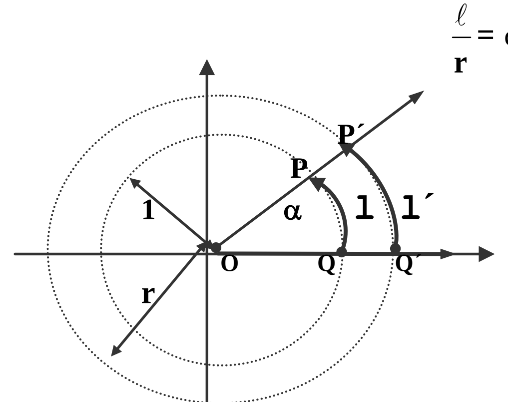
$\left(\frac{180}{\pi}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{180}\right)$ son los *factores de conversión* para pasar de un sistema a otro.

Ejemplos : 3 rad. = $3.\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ ≈ 171.9 º ; 3 º = $3.\left(\frac{\pi}{180}\right)$ rad ≈ 0.051 rad.

Observaciones:

a) Dijimos que la "medida" de un ángulo en radianes es "la *longitud* del arco interceptado por el ángulo en la *circunferencia trigonométrica (ó unidad)* ".
Se ve fácilmente que la longitud del arco *depende del radio*; para un mismo ángulo, si el radio aumenta, la *longitud* del arco interceptado también aumenta .
Más aún, se observa que la longitud del arco es *directamente proporcional* al radio; o sea :

$\frac{\ell}{r}$ = cte. (con l = long. $\overset{\frown}{QP}$)



- Sea l = long. $\overset{\frown}{QP}$ (arco subtendido por α con r =1);
- Sea l' =long. $\overset{\frown}{QP}$ (arco subtendido por α con $r \neq 1$);
- Luego: α (rad.) = l = $\frac{\ell}{1}$ = $\frac{\ell'}{r}$

Conclusión: la medida de un ángulo ***en radianes*** es el cociente entre la longitud del arco que intercepta en la circunferencia y el radio de la misma.

$$\alpha \text{ (rad.)} = \frac{\ell'}{r}$$

b) La medida de un ángulo en el sistema radian es un **número real adimensional.**
Por ejemplo: hallar el ángulo que subtiende un arco de 6 cm. en una circunferencia de 5 cm. de radio.

α = l / **r** = 6 cm. / 5 cm.= **1, 2** (las unidades se simplifican)

c) l = α(rad.) . **r .**
Sabiendo que el radio de la tierra es de 6377 km. ¿cuánto se desplaza un punto sobre el Ecuador en una hora? (Recordar que se mueve a razón de 15º por hora)

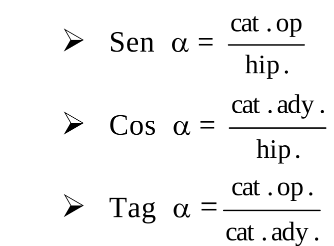
α = **15º** = $15.\left(\frac{\pi}{180}\right)$ = 0,2625 (rad.)

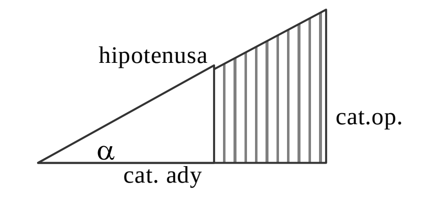
Lueog, l = α(rad.). **r** = 0.2625 . 6377 = **1673.95 Km**.

C2- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El origen de las ´*funciones trigonométricas*´ está en la TRIGONOMETRÍA.
Esta ciencia cuya aparición se remonta a 150 años a.de C. y se atribuye a Hiparco; se ocupó en su origen y como su nombre lo expresa (trígonos = triángulo, metrón = medida) del cálculo de todos los elementos del *triángulo* (*lados, alturas, superficie, ángulos, medianas, bisectrices*). Tales cálculos revelan en su momento que en un triángulo rectángulo, si se cambian los lados pero no los ángulos, las razones entre los lados permanecen constante. A estas razones que permanecían constantes se les dio nombre, se las llamó ´*razones trigonométricas*´. *Según los lados que intervienen en la razón tenemos* ***el seno, el coseno o la tangente.***

Para α tal que:
0º < α < 90º
tenemos las
relaciones trigonométricas





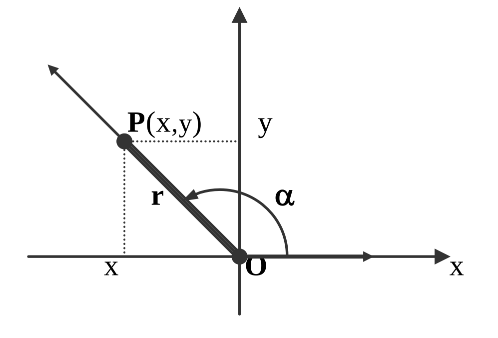
Hoy en día este primer objetivo de la trigonometría ha sido ampliamente rebasado. Los ángulos dejaron de ser considerados sólo como elementos de interés para el estudio de las figuras geométricas y se constituyeron en objetos matemáticos con entidad propia. Esto trajo aparejado la aparición de las ***funciones trigonométricas****; las cuales resultan una generalización de las ´relaciones trigonométricas´,* ya que para la definición de estas funciones se quita la restricción de que el ángulo sea agudo.
El conocimiento de las funciones trigonométricas resulta imprescindible para comprender fenómenos de muy distinta naturaleza, no sólo ligados a la Geometría sino también al Análisis y el Álgebra. Las funciones trigonométricas están involucradas en todo proceso cíclico o periódico (ondas, vibraciones, sonidos, estaciones, etc), el carácter de *periódicas* que poseen hace que se constituyan en el sistema de representación *natural* para la modelización de este tipo de fenómeno.

▪ **DEFINICIÓN**

funciones trigonométricas

Dado un ángulo α en posición estándar y P(x,y) un punto cualquiera del lado final del ángulo, si indicamos con r la distancia de P al origen (radio vector) entonces definimos las funciones trigonométricas *básicas*, como sigue:

- **sen** $\alpha = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}$
- **cos** $\alpha = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}}$
- **tag** $\alpha = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$



r = 1 ;
- **sen α = y** (ordenada de P)
- **cos α = x** (abscisa de P)

Luego, el signo o propiedades de las funciones trigonométricas básicas (seno y coseno) queda determinado por el signo o propiedades de la ordenada ó la abcisa de **P ,** punto cualquiera del lado final del ángulo.

Cofunciones: a las recíprocas de las funciones trigonométricas básicas se les da un nombre . Tenemos así:

- recíproca del seno → cosec α = r/y
- recíproca del coseno → sec α = r/x
- recíproca de la tangente → ctg α = x/y

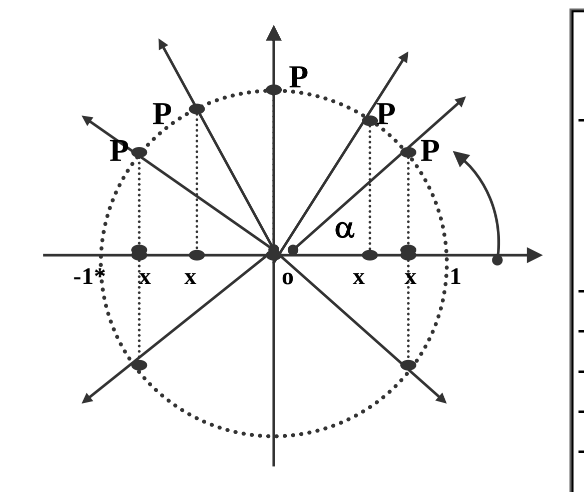
Nos abocaremos al estudio de las trigonométricas *básicas* ya que, conocidas las propiedades de estas, las de sus recípocas se deducen automáticamente. Por ejemplo, conocido el signo del seno y coseno, se tiene el signo de todas las demás funciones.

Funciones trascendentes

En general el seno o coseno de un ángulo es un número irracional. Por esta razón se las llama *funciones trascendentes.*

- ***Variación del seno y el coseno en los cuatro cuadrantes***

Para estudiar la variación de estas funciones, partimos del ángulo de 0º y hacemos girar el lado final del mismo alrededor del origen. Generamos así una *sucesión de ángulos* a partir de los cuales determinamos la variación de las funciones trigonométricas. Para ello necesitamos un punto del lado final del ángulo. Tomamos **P** tal que distancia de P al origen sea **1.** Con esta elección simplificamos el análisis ya que así **r=1** y, por ende, seno y coseno son ordenada y abscisa del **punto P.**



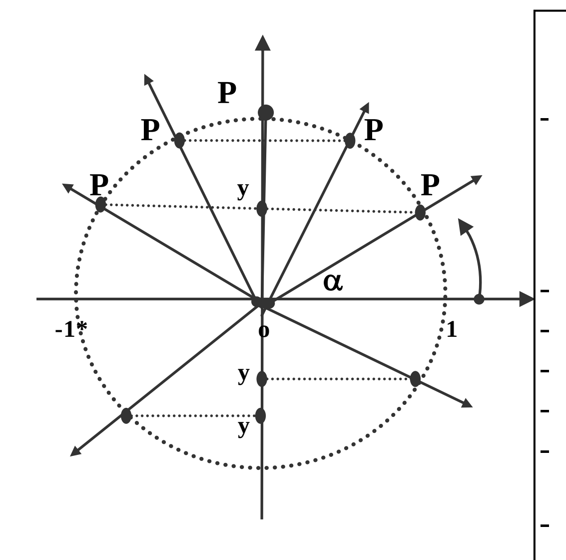
-1 ≤ cos α ≤ 1

cos α = abscisa de P = x

- del gráfico, observamos que mientras $0< \alpha < \pi$; o sea, mientras P recorre la semicircunferencia superior, su abscisa toma todos los valores del intervalo [-1;1]. ¿Cómo?:

- $\alpha = 0$ → x = 1 ⇒ **cos 0 = 1**
- $0 < \alpha < \pi/2$ → 0<x<1 ⇒ **0 < cos α < 1**
- $\alpha = \pi/2$ → x = 0 ⇒ **cos π/2 = 0**
- $\pi/2 < \alpha < \pi$ → -1<x<0 ⇒ **-1 < cos α < 0**
- $\alpha = \pi$ → x = -1 ⇒ **cos π = -1**

- Idem, si hacemos que **P** recorra la semicircunf. inferior, barremos todos los ángulos entre π y 2π y, leyendo del gráfico la variación de “x” , vemos que nuevamente toma todos los valores del intervalo [-1;1]; pero yendo de -1 a 1.



sen α = ordenada de P = y

- del gráfico, observamos que mientras $0 < \alpha < \pi$; o sea, mientras P recorre la semicircunferencia superior, su ordenada toma todos los valores del intervalo [0;1]. ¿Cómo?:

- $\alpha = 0$ → $y = 0$ ⇒ **sen 0 = 0**
- $0 < \alpha < \pi/2$ → $0<y<1$ ⇒ **0 < sen α < 1**
- $\alpha = \pi/2$ → $y = 1$ ⇒ **cos π/2 = 1**
- $\pi/2 < \alpha < \pi$ → $0<y<1$ ⇒ **0 < sen α < 1**
- $\alpha = \pi$ → $y = 0$ ⇒ **sen π = 0**

- Idem, si hacemos que **P** recorra la semicircunf. inferior, barremos todos los ángulos entre π y 2π y, leyendo del gráfico la variación de "y" , vemos que toma todos los valores del intervalo [-1;0]; yendo de 0 a -1 en el 3er C. y de –1 a 0 en el 4to C.

$-1 \leq$ sen α ≤ 1

NOTA : El análisis de las demás funciones puede hacerse partir de los datos hallados para seno y coseno, teniendo siempre el cuidado de considerar que el resto de las funciones presenta una diferencia esencial con respecto a estas dos. Todas ellas (tg, ctg, sec y cosec) tienen alguna de las coordenadas del punto en el denominador; luego, en tal caso la función no está definida donde esta coordenada vale ´cero´ (no se puede dividir por cero).

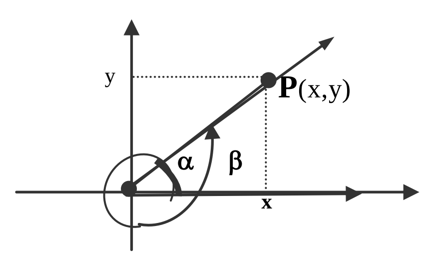
Sea, por ejemplo, la tangente: $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

Luego, la tangente no está definida donde la abscisa del punto es cero; o sea, donde es cero el coseno del ángulo: **π/2 ; - π/2** y todos los congruentes con ellos.
A partir del signo de seno y coseno se determina fácilmente el de la tangente, por ejemplo:

$$\pi/2 < \alpha < \pi \rightarrow \left(\begin{array}{l} 0 < \text{sen } \alpha < 1 \rightarrow \mathbf{0 < sen\ \alpha} \\ \\ -1 < \cos \alpha < 0 \rightarrow \mathbf{\cos \alpha < 0} \end{array} \right) \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} < 0$$

ángulos congruentes

Dos ángulos se dicen congruentes cuando difieren un número entero de giros. Así α y β son congruentes si β = α + **k giros**, con **k** ∈**Z**. Sus medidas difieren en **2 k π** ($\beta = \alpha + 2 k \pi$) y el lado final de β coincide con el de α.



Para las funciones de ángulos congruentes, tenemos:

- **cos β = cos α = x** → **cos (α + 2 k π) = cos α**
- **sen β = sen α = y** → **sen (α + 2 k π) = sen α**

funciones periódicas

Son funciones cuyos valores se repiten *cíclicamente* o *periódicamente*; o sea aquellas que, cubierto un ´ciclo´, comienzan luego a tomar los mismos valores y así continuan indefinidamente.

» Las funciones seno y coseno (y en consecuencia todas las demás) son funciones periódicas con un ciclo o período igual a 2π ; ya que $\forall\alpha$:

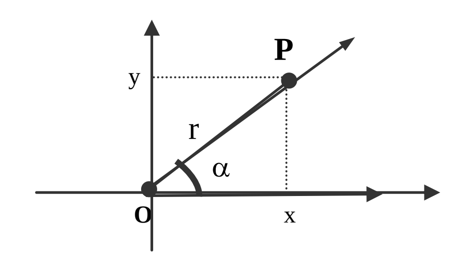
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$
$$\text{sen}(\alpha + 2\pi) = \text{sen}\,\alpha$$

C3 - IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica es una relación entre funciones trigonométricas. Vemos las más elementales de ellas. Las restantes son consecuencia o se pueden obtener a partir de las que vemos a continuación

I) ***Identidad pitagórica:***

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

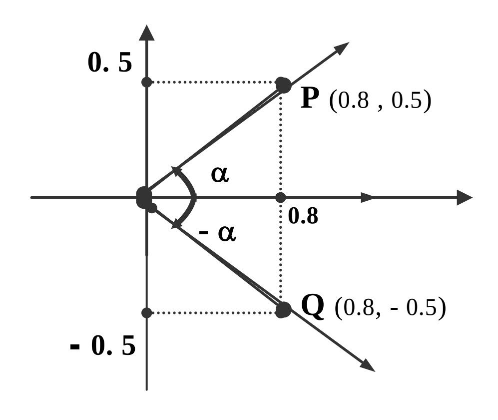


Por Pitágoras sabemos que: $x^2 + y^2 = r^2$

- Si **r = 1** , entonces : $\text{sen}\,\alpha = x$
$\cos\alpha = y$

- Luego: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = x^2 + y^2$
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2$
(r =1) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

II) ***Propiedades de reflexión***



» $\text{sen}\,\alpha$ = ordenada de P = y
» $\text{sen}(-\alpha)$ = ordenada de Q = - y

Luego : $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

» $\cos\alpha$ = abscisa de P = x
» $\cos(-\alpha)$ = abscisa de Q = x

Luego : $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

III) ***Fórmulas de adición***

» $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$

» $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$

A partir de las fórmulas de adición junto a las de reflexión se obtienen las de la diferencia. ($\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta))$)

» $\mathbf{sen}(\alpha - \beta) = \mathbf{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \mathbf{sen}\,\beta$

» $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \mathbf{sen}\,\alpha \cdot \mathbf{sen}\,\beta$

(*) De (I) ; (II) y (III) se obtienen el resto de las identidades trigonométricas.

- Fórmulas del ángulo doble

- Haciendo $\beta = \alpha$ en las fórmulas de adición :

$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Luego:

$$\mathbf{sen}(2\alpha) = 2\,\mathbf{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \mathbf{sen}^2\alpha$$

- Si en la última fórmula obtenida, reemplazamos $\operatorname{sen}^2\alpha$ ó $\cos^2\alpha$ por las expresiones que se obtiene despejando en la identidad pitagórica, obtenemos las siguientes fórmulas alternativas para el coseno del ángulo doble:

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ ó $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$

$\mathbf{cos}(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$\mathbf{cos}(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = (1 - \operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

Luego :

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\,\mathbf{sen}^2\alpha$$

- Finalmente de estas expresiones obtenemos el cuadrado del seno y coseno:

$$\mathbf{sen}^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

(*) Las identidades trigonométricas son útiles en la resolución de ecuaciones trigonométricas como, por ejemplo:

- hallar todos los valores de x en el intervalo $[\mathbf{0} ; \mathbf{2\pi}]$ tales que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2x)$

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2x)$ (aplicando la fórmula del ángulo doble)

$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

$\operatorname{sen} x - (2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x) = 0$ (sacando ´sen x´ como factor común)

$\operatorname{sen} x \cdot (1 - 2 \cos x) = 0$ (transformamos la expresión en un producto)

Un producto es cero si uno de los factores lo es; luego, tenemos dos posibilidades:

$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = \mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{2\pi}$

ó ; $1 - 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = ½ \rightarrow x = \boldsymbol{\pi/3}, \mathbf{5\pi/3}$

luego, $S = \{ 0 , \pi/3 , \pi , 5\pi/3 , 2\pi \}$

(*) Estas identidades permiten también calcular las funciones trigonométricas de ángulos pertenecientes a distintos cuadrantes conociendo las del 1er cuadrante; así como también la relación entre ángulos complementarios, suplementarios, etc.

» Por ejemplo: ¿qué relación guardan entre sí los ángulos suplementarios ; o sea α y β tal que $\alpha + \beta = 180º$?

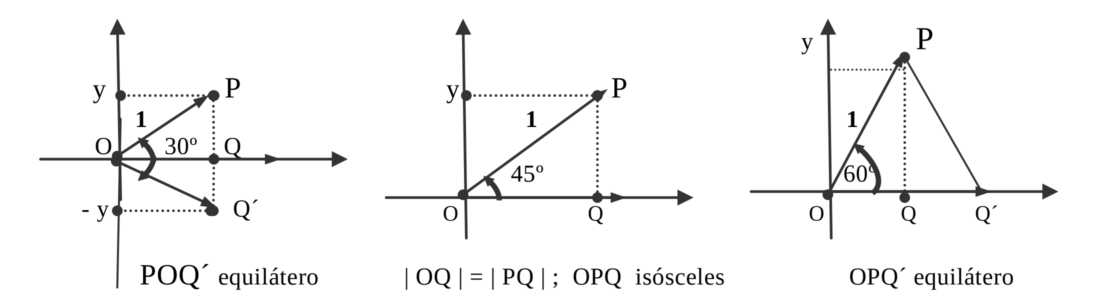
$$\textbf{sen } \beta = \text{sen}(180º - \alpha) = \overbrace{\text{sen } 180º}^{0} \cdot \cos\alpha - \overbrace{\cos 180º}^{-1} \cdot \text{sen } \alpha = \textbf{sen } \alpha$$

Luego : **sen β = sen α**

Así tenemos: **sen 150º = sen 30º ; sen 120º = sen 60º ; sen 135º = sen 45º**

C4 - CALCULO DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Como ya dijimos los valores de las funciones trigonométricas son en general números irracionales luego, normalmente, lo que damos son "aproximaciones" de los mismos; acudiendo para ello a la calculadora. Sin embargo, con la ayuda de la geometría clásica podemos dar los valores "exactos" de las funciones de algunos ángulos del 1er cuadrante.



POQ´ equilátero | OQ | = | PQ | ; OPQ isósceles OPQ´ equilátero

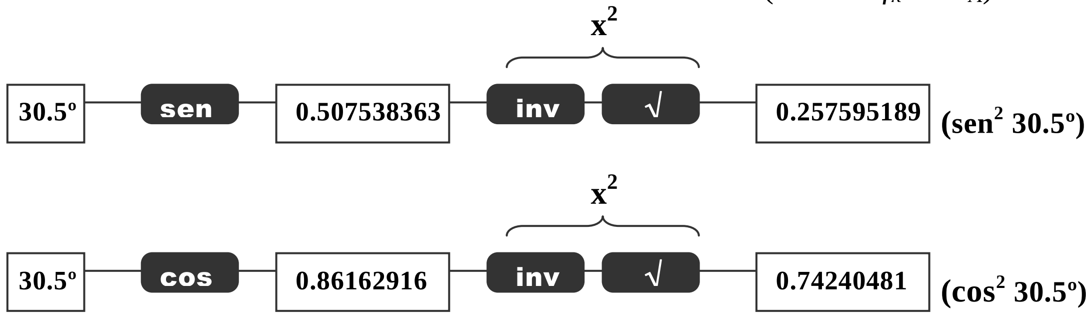
Considerando que para **r =1** es **sen α = y** (= ord. de P), te pedimos que a partir de esta definición y los triángulos indicados justifiques el primer renglón del cuadro adjunto (*sugerencia*: recordar el teorema de pitágoras) . Completa luego el cuadro según las indicaciones que se dan en cada caso, aplicando identidades trigonométricas.

α	0º	30º	45º	60º	90º
sen α	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha = \text{sen}(90º - \alpha)$	1				
$\text{tag }\alpha = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$					no existe

Ejemplo: verificar que: $\textbf{sen}^2\ \mathbf{30º} + \mathbf{cos}^2\ \mathbf{30º = 1}$

Reeplazando por los valores del cuadro: $(½)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ = ¼ + ¾ = 1

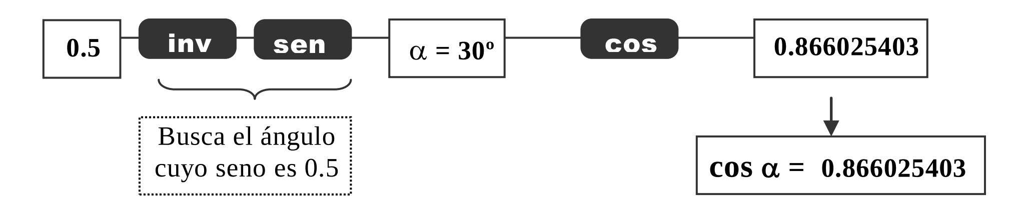
Ejemplo: Calcular: **sen^2 30.5º + cos^2 30.5º .**
En este caso debemos acudir a la calculadora (CASIO *f_x -500_A*) :



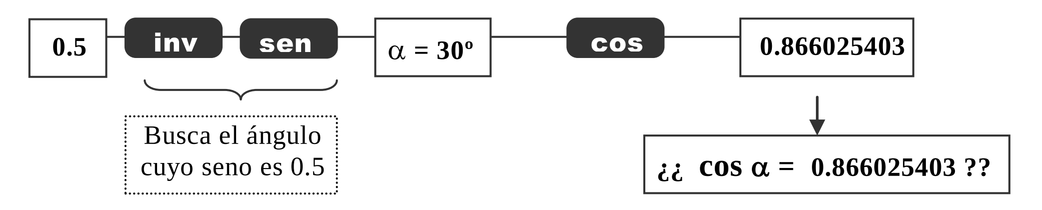
Luego : **sen^2 30.5º + cos^2 30.5º =** 0.257595189 + 0.74240481 = 0. 999999999 ($\neq$ 1)

¿Qué pasó? . ¿La identidad pitagórica no valía para todo ángulo?. *Sí, valía y sigue valiendo*. La diferencia que se observa (pequeña, pero diferencia al fin) es debida a los errores de redondeo que se introducen al trabajar con la calculadora. Como ya dijimos, los valores del seno y coseno son en general números irracionales. Estos tienen *infinitas cifras decimales*; luego, como no podemos indicarlas todas, procedemos (o procede la calculadora) a ´redondear´ el resultado, en este caso en la novena cifra decimal. Se introducen así los errores de redondeo , los cuales son los verdaderos causantes de la diferencia observada.
Una formación teórica insuficiente unida a una confianza ciega en la calculadora podría llevarnos a la *absurda conclusión* de que la identidad pitagórica no se verifica para el ángulo de 30.5º.

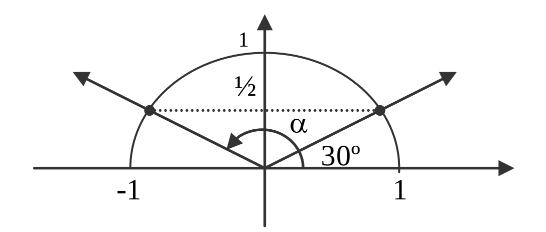
Ejemplo : Sabiendo que sen α = ½ y 0º < α < 90º , hallar "cos α"
Acudimos a la calculadora y a las funciones "inversas" de las trigonométricas.



Ejemplo : Sabiendo que sen α = ½ y 90º < α < 180º , hallar "cos α" .
Acudimos nuevamente a la calculadora.



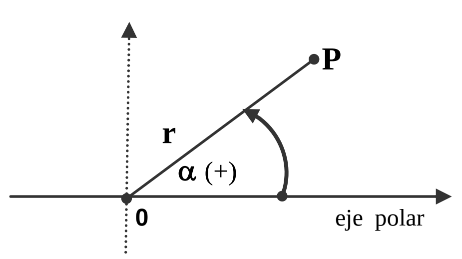
¿Qué pasó aquí ? . ¿El coseno de ángulos del segundo cuadrante no era **negativo**?. *Sí, lo era y lo sigue siendo.* ¡¡ Esto ya no es un error de redondeo !! . Descubrimos nuevamente que no podemos confiar ciegamente en la calculadora y que sólo una sólida formación teórica nos permite comprender qué está pasando en este caso.



- el ángulo cuyo seno es 0.5, **no es único.**
- sen 30º = sen α = ½ .
- Vemos entonces que la calculadora **nos da sólo un ángulo** (30º - luego veremos porqué).
- El α buscado en este caso se obtiene de hacer : α + 30º = 180º → **α = 150º**
- **cos 150º = - 0.866025403**

C5 - COORDENADAS POLARES

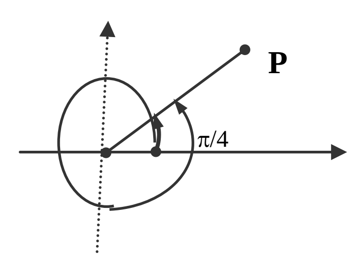
Ya vimos que una forma de localizar un punto en el plano es a través de sus ´coordenadas cartesianas´ (x,y) . En algunos problemas es más conveniente localizar un punto por sus ´coordenadas polares´.
Las coordenadas cartesianas dan la posición del punto en relación a dos ejes perpendiculares; las polares lo hacen en referencia a un punto fijo **O** (*polo*) y a un rayo (*eje polar*) que parte de **O**. Para identificar un punto por sus coordenadas polares comenzamos por escoger un punto del plano como *polo u origen* **O** y a partir de él trazar una semirrecta con origen en **O**, el *eje polar*. El eje polar se dibuja usualmente en dirección horizontal hacia la derecha; o sea, en correspondencia con el eje x del sistema cartesiano ortogonal.



Dado el polo y el eje polar el punto P tiene **coordenadas polares r y α ,** que escribimos como el par ordenado **(r, α)** con :

- **r** (radio polar ó radio) = **d (O,P)**
- **α** (argumento) = ángulo dirigido entre el eje polar y la línea *OP*.

NOTAS
(*) si r = 0 , no importa cual sea α la coordenada polar (0 , α) representa el origen sin importar el valor de la coordenada angular α .
(*) las coordenadas polares difieren de las cartesianas en que cualquier punto tiene más de una representación en coordenadas polares; o sea, no existe correspondencia uno a uno entre punto y coordenada polar.



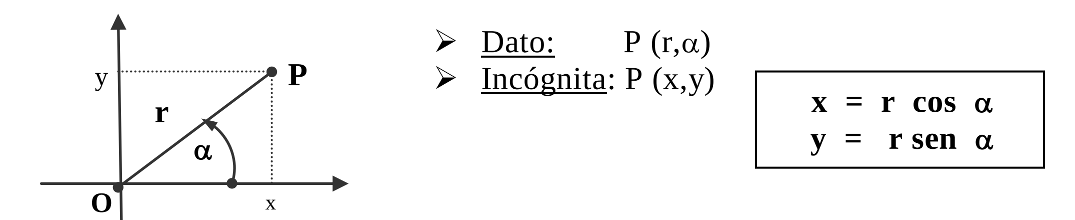
Por ejemplo si consideramos las coordenadas polares (r , **π/4**) y (r, **π/4 + 2π**) vemos que representan el mismo punto **P**.
Más general este punto P tiene coordenadas polares (r, **π/4 + 2 kπ**), con k ∈ N.

(*) La definición de las coordenadas polares (r, α) se extiende al caso de r negativo, conviniendo que (r, α) y (-r, α) se encuentran sobre la misma línea por O (la del lado terminal del ángulo)), ambos a la misma distancia de O (| r |) pero, sobre lados opuestos

a O. Dado que en el desarrollo de la materia no usamos esta definición extendida, no abundamos en aclaraciones sobre la misma.

- ***Relación entre coordenadas polares y cartesianas***

Ubicado el polo y el eje polar coincidiendo con el origen y el eje x de un sistema cartesiano ortogonal podemos fácilmente pasar de unas coordenadas a otras con el auxilio de las funciones trigonométricas de la coordenada angular α .



Ejercicios:

a) Graficar los puntos A (2; $\pi/4$) ; B (3; $\pi/2$) ; C (3; - π) ; D (1; π) . Dar las coordenadas polares de sus simétricos respecto del origen.

b) Sea P(r ; $\pi/4$). Si r varía tomando todos los valores entre 2 y 4 graficar todas las posiciones posibles para P e indicar que "distancia" recorre P en este caso.

c) Sea P(3 ; α). Si α varía tomando todos los valores entre 0 y π graficar todas las posiciones posibles para P e indicar que distancia recorre P en este caso. (Recordar : α (radianes) = $\frac{\text{long.arco}}{r}$)

d) Sea P(3; α). Si α varía tomando todos los valores entre 0º y 60º graficar todas las posiciones posibles para P e indicar que "distancia" recorre P en este caso.

e) Sea P(3; α). Si al variar α el punto P recorre una distancia de 6 cm. a partir del eje x ; indicar la variación de α en radianes y grados.

Apéndice C: Ejercicios

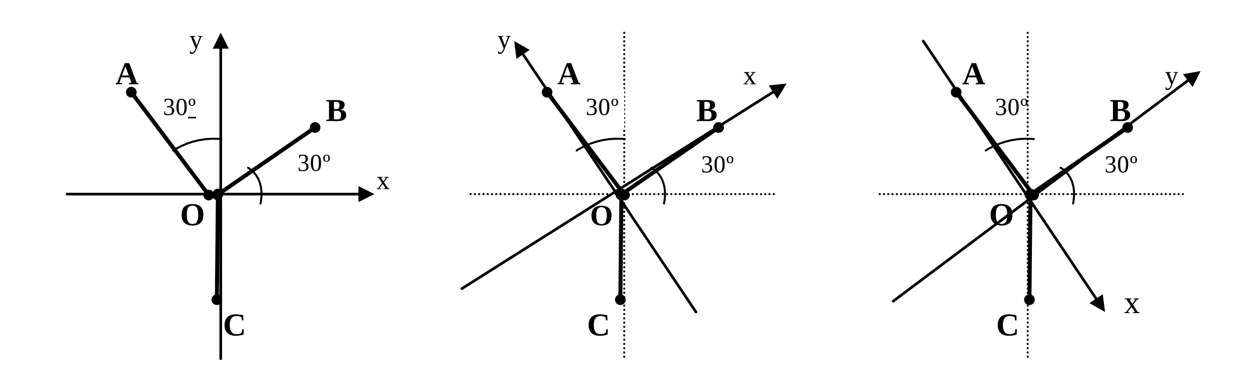
1.- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a) Marcar en un sistema cartesiano ortogonal un punto P(u,v) sabiendo que u = -3 ; v > 0 y d (P,O) = 5. Dibujar luego, en posición estándar, el ángulo α cuyo lado final pasa por P . Calcular sen α ; cos α y tag α .
b) Dibujar dos ángulos cuyo coseno valga ½.
c) Dibujar tres ángulos cuyo seno valga - ½.
d) Dibujar dos ángulos cuya tg valga ¾ .

2.- a) Marcar en un sistema cartesiano ortogonal un punto Q(a,b) sabiendo que a>0; b < 0 y d (Q,O) = 1. Dibujar luego, en posición estándar con sentido antihorario, el ángulo β cuyo lado final pasa por Q . Indicar los valores de sen β; cos β y tag β en función de las coordenadas de Q . A partir de estos valores decidir el signo de las respectivas funciones trig. del ángulo β.

b) Si $\theta = \beta$-180º, usando identidades trigonométricas obtener los valores de sen θ ; cos θ y tag θ en función de a y b. Graficar el ángulo θ y verificar. A partir de estos valores decidir el signo de las respectivas funciones trigonométricas del ángulo θ.

3.- Los puntos A ; B y C se encuentran en un plano. Para hallar sus cooordenadas se introduce en el mismo un sistema de referencia. Indicar las coordenadas de los puntos según el sistema de referencia adoptado en cada caso si d(A,O)= d(B,O) = d(C,O) =1



4.- Dar las coordenadas de (x,y) del punto P si :

a) sen α = 0. 25 ; d (P, O) = 2 ; x < 0 .
b) cos α = - 0.5 ; d (P, O) = 4 ; y < 0 .
c) sen α = cos α ; d (P, O) = 1 ; $0 < \alpha < \pi/2$

5.- Graficar los siguientes puntos sabiendo que $\alpha \in$ II C.
Usar identidades trigonométricas para determinar las coordenadas cuando haga falta.

A ($\cos \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha$) ; **B** ($3\cos \alpha$, $3\operatorname{sen} \alpha$) ; **C** ($\cos(\alpha+\pi)$, $\operatorname{sen}(\alpha+\pi)$) ;
D ($\cos(-\alpha)$, $\operatorname{sen}(-\alpha)$) ; **E** ($\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)$; $\cos(\pi/2 - \alpha)$); **F** ($\cos(\alpha+2\pi)$, $\operatorname{sen}(\alpha+2\pi)$)

6.- a) Demostrar que si a y b son números dados, existe otro número c y un ángulo " α" tal que:

$$\mathbf{a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c \cdot \operatorname{sen}(x + \alpha)}$$

b) Escribir como el seno de un ángulo. Verificar la igualdad para x = 0 .

$\operatorname{sen} x + \cos x =$

$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x =$

$\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x =$

$-\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x =$

7.- Hallar el mínimo valor de "p" no nulo tal que:

a) $\operatorname{sen}[2(x+p)] = \operatorname{sen}(2x)$
b) $\operatorname{sen}[3(x+p)] = \operatorname{sen}(3x)$
c) $\operatorname{sen}[\omega(x+p)] = \operatorname{sen}(\omega x)$

3 — Derivada

En el CAPÍTULO 2 vimos los conceptos, métodos ó instrumentos necesarios para determinar el comportamiento de una función en su dominio. En particular, para estudiar el ***comportamiento de f***:

☞ ***en el entorno de un punto x_o*** (para ello definimos: $\lim_{x \to x_o} f(x)$),

☞ ***para x´s "muy grandes"* (±)** (para ello definimos: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$);

☞ ***en el punto x_o*** (para ello definimos: ***continuidad de f en x_o***)

En definitiva, dada $y = f(x)$ nos ocupamos de estudiar formas o métodos para conocer ***como*** varía ***f*** al variar ***x*** (¿tiene comportamiento "*definido*"?, ¿se acerca a un "*valor determinado*" ?, ¿se hace "*cada vez más grande*"?, ¿presenta "*salto*" ó "*agujero*"?)

En este capítulo continuamos estudiando las funciones pero desde otra perspectiva. Dada $y = f(x)$ y x_o en su dominio ahora el objetivo esencial es determinar ***cuánto*** varía ***f*** al variar ***x*** en un ***entorno de x_o***.

3.1 Notaciones y Definiciones

DEFINICIÓN:

Incremento de una variable : **Δz**	Dado un punto fijo (z_o) y uno variable (z), a la diferencia entre z y z_o producida al variar z en el entorno de z_o la llamamos ***incremento de z*** y la simbolizamos **Δz** . O sea: $\Delta z = z - z_o$.

Observaciones:

1) Todo punto variable z puede escribirse en función de su incremento: $z = z_o + \Delta z$.
En tal caso nos referimos a dicho punto como al "*punto incrementado*"..

2) **Δz** puede ser positivo, negativo ó cero:
- si $z < z_o$ entonces $\Delta z < 0$
- si $z > z_o$ entonces $\Delta z > 0$
- si $z = z_o$ entonces $\Delta z = 0$

$z = z_o - 2$ z_o $z = z_o + 2$

1 3 5

$\Delta z = -2$ $\Delta z = 2$

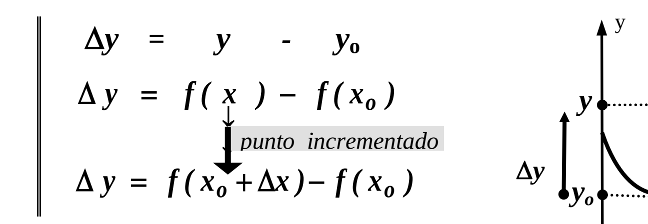
3) Dada $y = f(x)$ y un $x_o \in Dom\, f$, quedan definidos dos tipos de incrementos:

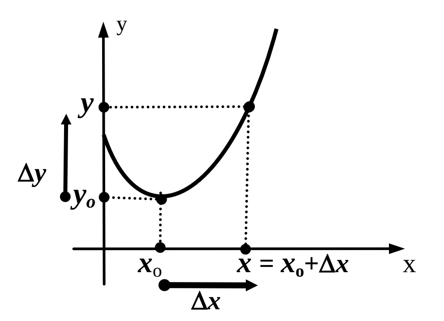
* ***el incremento de la variable independiente***: $\Delta x = x - x_o$; y,

* ***el incremento de la variable dependiente***: $\Delta y = y - y_o$; con $y = f(x)$; $y_o = f(x_o)$

En este caso, o sea cuando las variables x e y están relacionados entre sí, los respectivos incrementos, Δx y Δy, también se encuentran relacionados entre sí.

En particular, **"** si $y = f(x)$ y $x_o \in Dom\, f$ entonces ***Δy depende de Δx*** **".**





Conclusiones:

- Δy depende de x_o y de Δx,
- Para x_o fijo, Δy depende sólo de Δx.
- Para x_o fijo, Δy es **función** de Δx; o sea, existe φ / $\Delta y = \varphi(\Delta x)$.

Ejemplo: $f(x) = x^2$; $x_o = 1$ ⇨ Δx → $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$

*$\Delta x = 2$ → $\Delta y = f(3) - f(1) = \underline{8}$

*$\Delta x = 3$ → $\Delta y = f(4) - f(1) = \underline{15}$

Δx → $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$

$\Delta y = (1+\Delta x)^2 - 1 = \underline{2\,\Delta x + \Delta x^2}$ ⇒ $\Delta y = \varphi(\Delta x)$.

Notas:

ⓘ Un ***error*** frecuente en el cálculo de **Δy´s** es que conocido "un **Δy",** los restantes se calculen aplicando "*regla de tres simple*". Esta forma de cálculo es válida en el caso que f sea una función lineal y "sólo en tal caso". Si f no es lineal, usando regla de tres no se obtiene el verdadero valor de **Δy.** Vemos esto en el caso del ejemplo anterior:

Δx = 2 → Δy = 8 [dato]

Δx = 3 → Δy =? [incógnita] $\xrightarrow[\text{de tres}]{\text{regla}}$ **Δy =** $\dfrac{3 \cdot 8}{2}$ **= 12**

Resumiendo:

Δx =3 $\xrightarrow{\text{por def}}$ **Δy = 15** (verdadero valor)

Δx =3 $\xrightarrow{\text{regla de tres}}$ **Δy = 12** (valor *aproximado*) ⇨ $\mathbf{E}_{(error)} = 3$

Conclusión: por regla de tres no se obtiene el *verdadero valor*. Se introduce un "error", el cual, como en este caso, puede ser "*muy grande*".

ⓘ ***Por definición,*** Δy informa el ***cambio total en y*** al variar x de x_o a $x_o + \Delta x$.

Veremos luego que este valor es de relativa utilidad ya que no permite apreciar la "significatividad" del cambio; o sea, establecer si este es "grande", "pequeño" o "prácticamente despreciable". Para decidir esta cuestión resulta necesario analizar el cambio y su "contexto"; o sea, relacionarlo con los otros cambios que se producen a su alrededor.

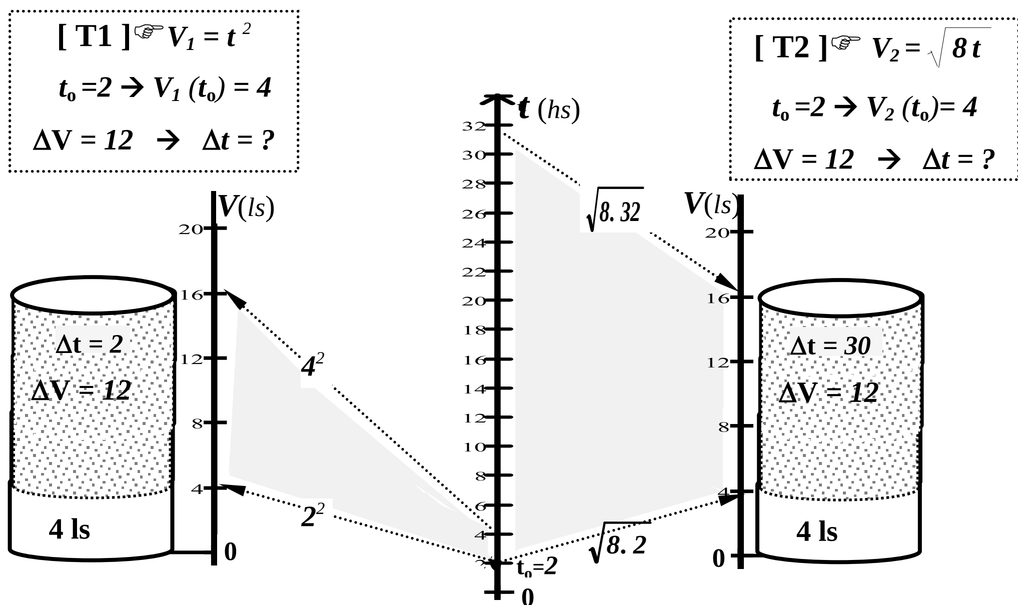
Así de lo que finalmente nos vamos a ocupar es del ***"cambio en y, en relación al cambio en x "***; a lo que se da el nombre de ***"razón de cambio".***

***Ejemplo 1*:**

En la empresa donde trabaja, finalizada la jornada se han llenado todos los tanques del día, excepto uno. Su jefe le pide que por favor se haga cargo de este tanque, que se quede *un poco más*, que hace *2 hs*. que empezó a llenarse y *sólo* le faltan *12 ls*.

Su jefe, al decir que faltan "sólo" 12 ls. está sin dudas insinuando que esta cantidad es "poca". Si Ud. sabe que hay dos tipos de tanques, que estos se diferencian por la ley que rige la entrada de solución al tanque en función del tiempo: ¿le convence el argumento de su jefe de que 12 ls. es "poco"?; ¿o preguntaría de que tanque se trata antes de aceptar quedarse ?.

ⓘ En el contexto de este problema no se puede afirmar que una "cantidad de litros" (12), sea "poca" (o "mucha"). Sin dudas, y en este caso, esta apreciación está absolutamente ligada al "tiempo" requerido para que tal cantidad de litros entre al tanque..... Y es de sospechar que si las "leyes de llenado" son distintas también lo sean los "tiempos de llenado".
Luego, resolver esta cuestión requiere calcular el tiempo necesario para que, en cada tanque y a partir de $t_o = 2$, se produzca un "incremento de volumen" (Δ**V**) de 12 ls.



[T1] ☞ $\Delta t = 2 \rightarrow$ ***en* T1 *entran 12 ls.* → *termina de llenarse en "2hs".***

Verificación: $\Delta V = V(2+\Delta t) - V(2) = (2+2)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ (ls.)

[T2] ☞ $\Delta t = 30 \rightarrow$ ***en* T2 *entran 12 ls* → *termina de llenarse en "30 hs".***

Verifición: $\Delta V = V(2+\Delta t) - V(2) = \sqrt{8(2+30)} - 4 = 16 - 4 = 12$ (ls.)

Conclusión final:

Observamos aquí que conocer la cantidad de litros que faltan para llenar el tanque no es, en sí mismo, un dato útil para la toma de decisiones. Que decidir acerca de la *significatividad* de un valor requiere *evaluar* su relación con otras variables vinculadas al mismo. En este caso, con el tiempo requerido para producir el Δ**V** deseado**.** Contrastados Δ**V** versus Δ**t** en ambos tanques, concluímos que ***12 ls***. es *relativamente poco* para T1 y *relativamente mucho* para T2; porque T1 se llena en ***2hs.*** (nos podemos ir rápido!) mientras que T2 necesita ***30 hs***. para llenarse.

Ejemplo 2*:** dados $y = f(x)$, x_o y Δx que se indican a continuación, hallar Δy, ***cambio total en y al variar x desde x_o hasta $x_o + \Delta x$.

[1] $y = x^2$; $x_o = 2$; $\Delta x = 2$ ⇨ $\Delta y = y(2+\Delta x) - y(2) = 4^2 - 4 = 12$

[2] $y = \sqrt{8x}$; $x_o = 2$; $\Delta x = 30$ ⇨ $\Delta y = y(2+\Delta x) - y(2) = \sqrt{256} - 4 = 12$

¿Qué informa **Δy*?***: que ***y aumentó 12 unidades*** al variar ***x*** de ***2*** a ***2+Δx*** .

Δy = *12 u.* : ***¿ es mucho?, ¿ poco ?, ¿o es relativo?***

Evaluar cuan significativo es el ***cambio en y***, requiere referir el mismo al ***cambio en x .***

☞ ***$y = x^2$*** ; ***$\Delta x = 2$*** <<<< ***$\Delta y = 12$***

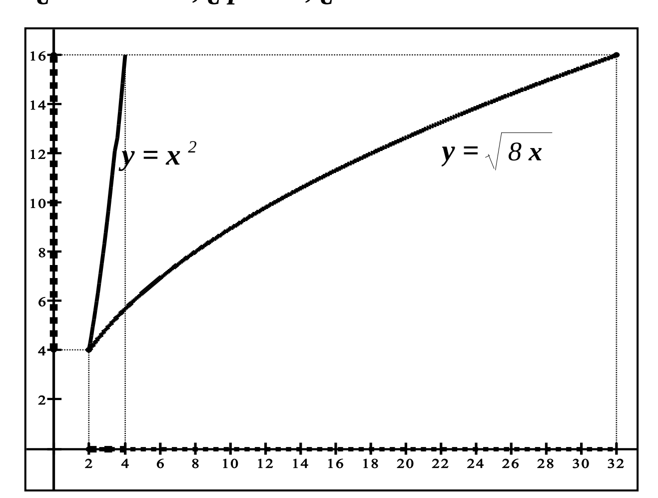
el cambio en ***y*** es *´grande´* en *´relación´* al cambio en ***x***.

Decimos que ***y***, ***crece rápidamente***

☞ ***$y = \sqrt{8x}$*** ; ***$\Delta x = 30$*** >>> ***$\Delta y = 12$***

el cambio en ***y*** es *´chico´* en *´relación´* al cambio en ***x.***

Decimos que ***y***, ***crece lentamente***



Verificamos así que mientras el ***cambio total en y*** es un valor de escasa utilidad, el ***cambio en y "en relación" al cambio en x*** , es un dato realmente útil por cuanto informa acerca de la ***´rapidez´*** con que una función varía en el entorno de un punto.

Una forma práctica de evaluar esta relación es a través del cociente de los incrementos. Tan importante es este cociente que se le da un nombre y se dedica una rama del Cálculo a su estudio. Se lo llama ***razón relativa de cambio*** ó ***razón de cambio en y respecto al cambio en x*** . Abreviadamente, ***"razón de cambio ".***

5) ***Razón de cambio*** ($\frac{\Lambda y}{\Delta x}$)***:***

Este cociente recibe diversos nombres los que dependen de la disciplina de que se trate. Así, en matemática se lo llama ***cociente incremental*** mientras que en las ciencias fácticas lo más habitual es llamarlo, ***razón de cambio*** .

¿Qué información brinda la "razón de cambio" respecto al comportamiento de f ?.

En lo que sigue vemos esto; o sea, características y propiedades de la razón de cambio.

Para investigar este cociente vamos a hacerlo al modo de un investigador : en forma sistemática y con método, partiendo del ´caso simple´ *ó* ´conocido´.

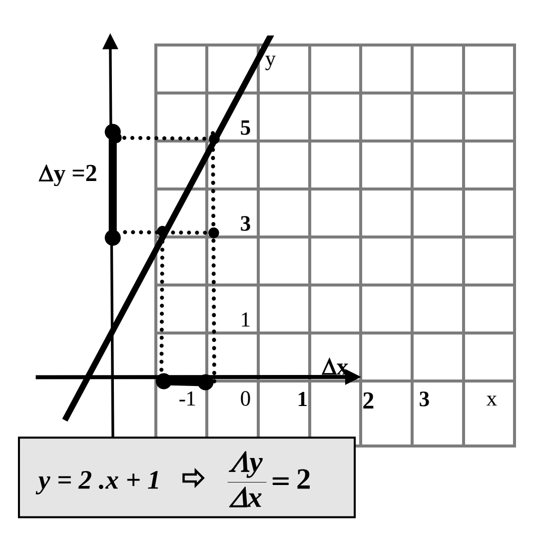
❶ *Razón de Cambio y Función Lineal .*

Al estudiar la función lineal, $y = f(x)$ con $f(x) = m\,x + h$, concluimos que:

f* lineal** ⇔ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$; $\forall\, \Delta x$ ⇔ ***la razón de cambio es constante

ⓘ ***¿qué dice esto de la función lineal ?***:

- que **Δy** es ***directamente proporcional*** a **Δx**.
  (lo que legitima el uso de *´regla de tres´*)
- que, ***y cambia exactamente ´m´ unidades por cada cambio unitario en x*** ; de otra forma, que ***y varía a ´velocidad constante´*** .
- finalmente, y fundamentalmente, que ***´velocidad de variación constante´*** es lo que ***caracteriza*** a la función lineal. O sea, una ***propiedad que presenta la función lineal y sólo ella***.



ⓘ Esta última observación: ***¿qué dice de las funciones no lineales ?***:

- que, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq$ *cte*;
- que, Δy no es *directamente proporcional* a Δx. (no vale el uso de *´regla de tres´*)
- que no se puede establecer *a priori* cuanto variará ***y*** al variar ***x*** en una unidad. De otra forma, que la ***velocidad de variación de y, no es constante***.

Dada ***f no lineal*** y x_o un punto de su dominio, ¿habrá algún método o forma de conocer la ***velocidad*** a la que estaría variando ***f* , *cuanto menos en ese punto ?***.
Contestar esta pregunta requiere investigar la ***razón de cambio*** para ***f*** no lineales; la existencia de alguna ***´regularidad´*** o ***´patrón´*** en el comportamiento de las mismas.

❷ *Razón de Cambio y Función No Lineal.*

Comenzamos investigando un *´caso simple´* : $f(x) = x^2$. Para ello procedemos a:

- ***elegir*** un x_o → $x_o = 1$
- ***calcular*** **Δy** para distintos **Δx**; hacer esto de la forma más apropiada al caso.
- ***calcular*** **Δy/Δx**; ***organizar*** la información de modo que permita detectar algún hecho o dato peculiar en el comportamiento del cociente incremental.

***Cálculo de Δy* :** disponemos de dos procesos para concretar este cálculo,

(I) *cálculo por definición*: $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$

(II) *cálculo por fórmula:* consiste en obtener **Δy** como función de **Δx.** O sea, hallar **φ** tal que $\Delta y = \varphi(\Delta x)$. Hallada **φ,** disponemos de una fórmula de cálculo.

Si el objetivo es hallar un único ***Δy,*** no se justifica el uso del proceso (II).
Pero si el objetivo es hallar ***Δy*** para varios ***Δx***, el proceso (II) es más conveniente pues provee de una *´fórmula´* que facilita y agiliza la tarea.

Usamos (II) para investigar la razón de cambio para $f(x) = x^2$ y $x_o = 1$.

$$\Delta x \in \mathbf{R} \rightarrow \Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^2 - (1)^2 = 2.\Delta x + \Delta x^2$$

Luego**:** $\Delta y = \varphi(\Delta x)$ con $\varphi(\Delta x) = 2.\Delta x + \Delta x^2$

- Obtenida φ, la usamos para calcular rápida y sistemáticamente los Δy correspondientes a distintos Δx (elegidos según el caso)
- Organizamos los resultados en una tabla .
- Calculamos y registramos el cociente $\Delta y/\Delta x$. Procedemos a investigar el comportamiento de dicho cociente; o sea, de la *razón de cambio*.

Δx	$\Delta y = 2.\Delta x + \Delta x^2$	$\Delta y / \Delta x$
2	**8**	**4**
1. 5	**5.25**	**3. 5**
1	**3**	**3**
0. 5	**1.25**	**2. 5**
0.25	**0.56**	**2. 24**

$\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$?? $\Delta y / \Delta x \neq$ constante; $\Delta y / \Delta x$, ¿decrecen??

Observaciones:

1) La lectura de la tabla muestra una *tendencia* en el comportamiento de los Δy; estos pareciera que *decrecen a medida que* $\Delta x \to 0$.

2) Nos preguntamos, *¿tendrán los* Δy *un comportamiento definido* ?, *¿se acercarán* "*tanto como quieran" a un único número*?.

De continuar la tabla con Δx cada vez más chicos ($\Delta x = 0.1; 0.01;...$) veríamos que los Δy siguen acercándose a "*cero*" y, aparentemente, "*tanto como quieran*".
¿Cómo corroboramos o refutamos esta hipótesis?: calculando $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} [\,2\,\Delta x + (\Delta x)^2\,] = \mathbf{0} \ \checkmark$$

<u>Conclusiones</u>:

* Δy es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$ (según lo demostrado)

* Δx es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$ (trivial)

* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, la ***razón de cambio***, es un ***<u>cociente de infinitésimos</u>*** .

El trabajo hecho permite descubrir que la ***razón de cambio*** además de ser vista como un ***cociente de incrementos*** puede ser visualizada como un, ***<u>cociente de infinitésimos</u>***.

La cuestión es si esta nueva forma de visualizar la razón de cambio habilita un camino útil a nuestros fines; o sea, un método para investigar ***el cambio en y en relación al cambio en x,*** en un entorno de x_o. En el Cap.2 vimos que una forma de investigar el ***comportamiento ´relativo´ de dos infinitésimos*** era a través de evaluar el límite del cociente entre ambos (lo que llamamos, "comparación de infinitésimos"). Luego, visualizar la razón de cambio como cociente de infinitésimos, proporciona un método útil a nuestro propósito: ***<u>evaluar el límite del cociente entre los respectivos incrementos</u>***.

Concluimos así que una forma de resolver el interrogante planteado para el caso de las funciones no lineales es a través del cálculo y evaluación del $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

El estudio y cálculo de este límite constituye en su momento el desvelo y objetivo de grandes matemáticos como Newton o Leibniz; da lugar al desarrollo de una de las dos ramas fundamentales en las que se divide el Cálculo o Análisis Matemático: el ***CALCULO DIFERENCIAL****.*
La importancia de este límite radica en que da respuesta a problemas de muchas y muy diversas ciencias (matemática, física, química, biología, economía, ecología, etc.). Así, y debido a ello, se le da nombre propio, ***derivada****, y se crean distintos símbolos para representarlo.*
Algunos de ellos: $f'(x_o)$; $y'(x_o)$; $\dfrac{dy}{dx}(x_o)$

Luego, y en definitiva, de lo que nos ocupamos en este capítulo es de la **DERIVADA.** Comenzamos con la definición.

DEFINICIÓN de DERIVADA:

Derivada de una función en un punto $f´(x_o)$	Dada $y = f(x)$, $x_o \in Df$ con $f´(x_o)$ indicamos la derivada de f en x_o, la que definimos como: $f´(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (si el límite existe finito)

***Observaciones*:**

1) El proceso de hallar la derivada de una función se llama ***derivación***.
2) Si existe $f'(x_o)$, decimos que la función es ***derivable en x_o***.
3) Si existe $f'(x_o)$, $\forall x_o \in D$, decimos que la función es ***derivable en D***.
4) Existen otras notaciones para la derivada , alguna de las cuales son:

$$y = f(x) \xrightarrow{derivada} f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = Df(x)$$

5) Al cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lo llamamos *cociente incremental* (**CI**).
6) El ***cálculo*** de derivadas es, en principio y básicamente un ***cálculo de límite*** ya que ***la derivada*** no es otra cosa que el ***límite*** del cociente incremental $\Delta y / \Delta x$.
7) El cociente incremental se puede expresar de distintas formas según como se escriba el ***incremento en x*** (Δx ó $x - x_o$) y el ***punto incrementado*** (x ó $x_o + \Delta x$). La elección que se haga determina dos formas para Δy , por ende, para el CI :

☞ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = CI_{(1)}$

☞ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = CI_{(2)}$

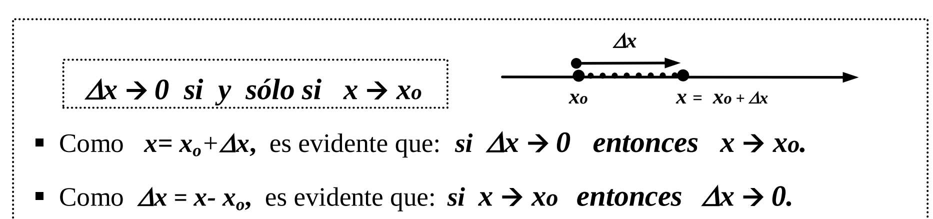
La diferencia entre ambas formas, es *la variable* en la que queda expresado el CI en cada caso:
CI $_{(1)}$ → queda en función de Δx.
CI $_{(2)}$ → queda en función de x.

➢ ***Cálculo "por definición" de*** $f'(x_o)$

Con $CI_{(1)}$ → $f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$

Con $CI_{(2)}$ → $f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

En (*) el cociente incremental queda en función de ´x´ ; luego, es necesario *cambiar la variable del límite*. Para hacer esto tenemos en cuenta que:



ⓘ Para hallar la derivada de una función, por ejemplo $f(x) = x^n$; procedemos a:

☞ elegir alguna forma de expresar el CI → $CI_{(2)} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \dfrac{x^n - x_o^n}{x - x_o}$,

☞ calcular el límite del CI elegido → $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{x^n - x_o^n}{x - x_o}$

ⓘ Cualquiera sea la forma en que planteemos el límite, debe quedar una indeterminación del tipo 0/0. (**CI**: ***cociente de infinitésimos***).

***Ejemplo**: cálculo por definición de f´(5) para* $f(x) = x^n$ con $n = 2; 3; 4$

- $f(x) = x^2$ → $f'(5) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5^2}{x - 5} \underbrace{=}_{ind.\left(\frac{0}{0}\right)}$ *(dividimos)*

  $= \lim\limits_{x \to 5} (x + 5) = 5 + 5 = 10$

- $f(x) = x^3$ → $f'(5) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^3 - 5^3}{x - 5}$ = *(dividimos)*

  $= \lim\limits_{x \to 5} (x^2 + 5.x + 5^2) = 5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$

- $f(x) = x^4$ → $f'(5) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^4 - 5^4}{x - 5}$ = *(dividimos)*

  $= \lim\limits_{x \to 5} (x^3 + 5.x^2 + 5^2.x + 5^3) = 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 = 500$

ⓘ El análisis retrospectivo y en conjunto de los pasos realizados para obtener ***f´(5)*** para distintos ***n***´s permite apreciar un ***´patrón´*** en el ***proceso de cálculo*** de los respectivos límites. O sea, posibilita la detección de un *esquema* que se repite potencia a potencia y que, de ser válido para todo ***n***, permitiría *generalizar el proceso*, ***simplificar el cálculo de la derivada***.
Generalizar un proceso requiere trabajar con método; es decir, *proceder a la observación y registro sistemático de casos según ciertos principios básicos como*:

* expresar algunos resultados sin realizar los cálculos, aunque estos sean obvios.
  (si efectivamente existe un esquema o patrón de cálculo, dicho patrón se hace visible, no queda *enmascarado por el resultado particular del caso*).
* organizar el trabajo de modo que facilite la detección del ***patrón*** que se busca.

n	*f(x)*	$\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{x^n - x_o^n}{x - x_o} =$	*f´(5)*	*f´(5)*	*f´(5)*
2	x^2	$= \lim\limits_{x \to 5} (x + 5)$	= 5 +5	= **2** .5	= 10
3	x^3	$= \lim\limits_{x \to 5} (x^2 + 5.x + 5^2)$	$= 5^2 + 5^2 + 5^2$	$= \mathbf{3} .5^2$	= 75
4	x^4	$= \lim\limits_{x \to 5} (x^3 + 5.x^2 + 5^2.x + 5^3)$	$= 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3$	$= \mathbf{4} .5^3$	= 500
...	....	*vemos así como se va configurando*	*el ´resultado´*	....	....
n	x^n	.... *que, para **n** genérico*	*el ´resultado´ sería*	$= \mathbf{n} .5^{n-1}$	
		.... *que, para* x_o y ***n*** *genérico*	*el ´resultado´ sería*	$= \mathbf{n} .x_o^{n-1}$	

ⓘ El trabajo realizado permite ´*inducir*´ una ´*fórmula*´ para el cálculo de la derivada de una potencia. Como esta fórmula resulta de un ´*proceso inductivo*´ no podemos afirmar que sea válida $\forall n$. Para ello debemos ´*demostrar*´ que vale $\forall n$.

Regla de la potencia	Si $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbf{N}$, entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$; $\forall x \in \mathbf{R}$

Demostración: $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{x^n - (x_o)^n}{x - x_o} = \quad \textit{(dividiendo por Ruffini)}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \underbrace{(x^{n-1} + x_o \,.\, x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + (x_o)^{n-2}.\, x + (x_o)^{n-1})}_{n \text{ sumandos}}$$

$$= \underbrace{(x_o)^{n-1} + x_o \,.\, (x_o)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + (x_o)^{n-2}.\, x_o + (x_o)^{n-1}}_{n \text{ veces } (x_o)^{n-1}} = n.\,(x_o)^{n-1}$$

Conclusión: x_o valor genérico; luego, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$; $\forall n \in \mathbf{N}$.

➢ El resultado hallado para exponentes *naturales* nos lleva a preguntar si la regla no valdrá para otros exponentes. Para ver esto calculamos y concluimos:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ [$= x^{-1}$]. Calculando por *def.* → $f´(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ [$= (-1)\, x^{-2}$]

b) $f(x) = \sqrt{x}$ [$= x^{1/2}$]. Calculando por *def.* → $f´(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ [$= ½\ x^{-½}$]

Para estos ejemplo (exponente negativo y fraccionario), la regla se cumple.

Si bien dos ejemplos no permiten sacar conclusiones generales, más adelante, vistos otros resultados teóricos, demostraremos que esta regla vale *para todo exponente real*.

O sea, demostraremos la siguiente regla de derivación:

Regla de la potencia *(generalizada)*	Si $f(x) = x^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbf{R}$, entonces $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$

ⓘ En muchos casos, antes de derivar, conviene simplificar la función; de ser posible, trasformar la misma en una potencia. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea:

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ → $f´(x) = (-2)\, x^{-3}$
- $g(x) = x.\sqrt{x} = x^{3/2}$ → $g´(x) = (3/2).\, x^{1/2}$
- $h(x) = \dfrac{x.\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{5}{4}}$ → $h´(x) = (5/4).\, x^{1/4}$

ⓘ Dado que el cálculo *´por definición´* de una derivada desemboca siempre en una indeterminación del tipo *0/0* en lo que sigue vamos a buscar formas alternativas de cálculo; en particular, ***reglas de cálculo*** del estilo de las halladas para las potencias. O sea, vamos a buscar ***reglas de derivación*** que faciliten el ***cálculo de derivadas.***

ⓘ ***Pero, ¿ porqué o para qué calculamos derivadas?***.
Ocupados en el *cálculo en sí* quizás hemos perdido de vista ***el problema que dio origen al concepto de derivada***; no hemos analizado aún si ***la derivada*** es efectivamente una respuesta apropiada a dicho problema.

Conviene entonces detenerse y reflexionar acerca de esta cuestión; es decir, si la derivada resuelve el problema planteado al inicio de este capítulo, permite cuantificar o cuanto menos estimar el ***"cambio en y relativo a un cambio en x"*** para toda ***f.***

Revisamos los resultados obtenidos y tratamos de concluir algo al respecto.

➢ $y = x^2$; $x_o = 5$ $\xrightarrow{pag.208}$ $y´(5) = 10$; ***¿qué nos dice este valor? :***

- $y´(5) = 10 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$,
- $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$ indica, por *definición de límite*, que:

"si $\Delta x \approx 0$ entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx 10$ " ; equivalentemente que,
"si $\Delta x \approx 0$ entonces $\Delta y \approx 10.\Delta x$ ".

o sea, que al ***incrementar x*** a partir de $x_o = 5$
"y $(= x^2)$ ***se incrementa aproximadamente 10 veces lo que x***".

➢ $y = x^3$; $x_o = 5$ $\xrightarrow{pag.208}$ $y´(5) = 75$. En forma análoga que para x^2,
concluimos que al ***incrementar x*** a partir de $x_o = 5$,
"y $(= x^3)$ ***se incrementa aproximadamente 75 veces lo que x***".

Vemos así que $f´(x_o)$ da la información buscada; o sea, informa acerca del ***cambio en y en relación al cambio en x*** (al menos da una *aproximación* en un entorno de x_o).

ⓘ En su momento, al ***comparar infinitos p/*** $x \to +\infty$, en particular potencias, concluimos que la de mayor grado (*ej*: x^3) le *ganaba* a la de menor grado (*ej*: x^2) (es decir, aumentaba más *rápido*, a mayor *velocidad*).
Y esto es lo que corroboramos aquí. Más aún, ahora estamos en condiciones de dar una estimación de *cuanto más* crece una potencia que otra en el entorno de x_o .
Efectivamente, y por ejemplo, del análisis hecho vemos que,

en el entorno de 5 **y** ***para un mismo*** Δx ,

x^2 *se* ***incrementa*** (*aprox*.) **10** *veces lo que* ***x*** ;

x^3 *se* ***incrementa*** (*aprox*.) **75** *veces lo que* ***x*** ; y,

x^4 *casi* ***500*** *veces!!!* .

3.2 Función Derivada

En la definición de derivada, al punto fijo lo indicamos con x_o. Dado que x_o representa un valor genérico, lo podemos reemplazar por x, escribir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Luego, para cada ´*x*´ donde este límite existe finito queda definida una ***función*** .

DEFINICIÓN:

función derivada $f´$	Dados $y = f(x)$ y $D = \{ x \in \mathbf{R} \ / \text{ existe } f´(x) \}$; llamamos ***función derivada*** , que indicamos $f´$, a la siguiente función **:** $f´ : D \longrightarrow \mathbf{R}$; $x \longrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ejemplos:

1) $f(x) = k$ (cte) ; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{calculando por definición}}$ $f´(x) = 0$; $D_{f´} = R$

2) $f(x) = x$; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{regla de la potencia}}$ $f´(x) = 1$; $D_{f´} = R$

3) $f(x) = x^5$; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{regla de la potencia}}$ $f´(x) = 5x^4$; $D_{f´} = R$

4) $f(x) = \sqrt{x}$; $D_f = R_0^+$ $\xrightarrow{\text{regla de la potencia}}$ $f´(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $D_{f´} = R^+$

5) $f(x) = x^5 + x^2$; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{calculando por definición}}$ $f´(x) = 5x^4 + 2x$; $D_{f´} = R$

6) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{calculando por definición}}$ $f´(x) = \cos x$; $D_{f´} = R$

7) $f(x) = \ln x$; $D_f = R^+$ $\xrightarrow{\text{calculando por definición}}$ $f´(x) = 1/x$; $D_{f´} = R^+$

Observaciones:

1) Las demostraciones de las derivadas *por definición* se hallan en el apéndice.

2) Respecto al dominio de la función derivada es importante destacar que calcular **Δy** requiere calcular $f(x+\Delta x)$ y $f(x)$; que, en consecuencia, el dominio de la derivada puede ser menor o igual que el de la función, nunca mayor al mismo. Así, y por ejemplo, en el caso del logaritmo vemos que su derivada, ***1/x*** , puede ser calculada para cualquier ***x´s*** distinto de cero pero dado que la función ***ln x*** no existe para ***x´s*** negativos, estos números deben ser descartados del dominio de la derivada. O sea que: $D_{f´} = R - \{0\} \cap R^+ = R^+$.

3) En general, el dominio de la función derivada es: $D_{f´} = D_{(\text{ley de } f´)} \cap D_f$.

4) En el ejemplo (5) vemos que la **f** es ***suma de dos funciones*** (dos potencias), que **f´** resulta ser ***la suma de las derivadas*** de esas dos potencias.

Luego cabe preguntarnos si esta no será una propiedad de la derivación; o sea, *la derivada de una suma de funciones*, ¿será siempre *la suma de las derivadas*? .Y en el caso de un producto de funciones, ¿qué pasará?.
En lo que sigue vemos estas cuestiones.

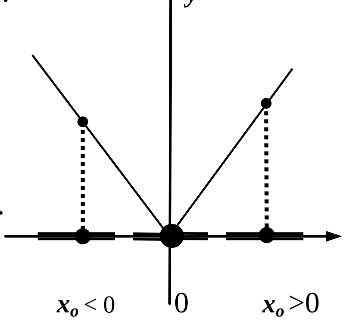
3.3 Propiedades de la Derivada – Reglas de Derivación

Continuidad y derivabilidad son propiedades deseables para una función; luego, debemos:

* idear criterios *rápidos* para hallar dominio de continuidad y derivabilidad de ***f***.
* determinar si existe alguna relación entre ambos conceptos.

Por otro lado una función puede venir dada por su gráfico o ser fácil de graficar con el auxilio de alguno de los tantos dispositivos que hoy existen; así, conviene disponer de *criterios gráficos* que permitan detectar fácilmente del gráfico los puntos de discontinuidad y no derivabilidad.
Respecto al *dominio de derivabilidad* , este depende de cómo esté dada la función. Así, si la ley viene dada por una ecuación: Df´ = Df ∩ D(ley de f´).
¿Y si la ley viene dada por más de una ecuación?. Veamos un ejemplo:

<u>Ejemplo</u>: Hallar dominio de derivabilidad de ***f*** (x) = | x |.





● si $x_o > 0$; existe un entorno de x_o donde $x > 0$;
o sea, donde | x | = x . Luego:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{|x| - |x_o|}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} 1 = 1 \ .$$

● si $x_o < 0$; existe un entorno de x_o donde $x<0$;
o sea, donde | x | = - x . Luego:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{|x| - |x_o|}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{(-x) - (-x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} -1 = -1$$

● si $x_o = 0$; no existe ningún entorno donde los *x*´s <u>*no cambien de signo*</u> ;
luego el cálculo del límite debe hacerse a través de <u>*límites laterales*</u>.

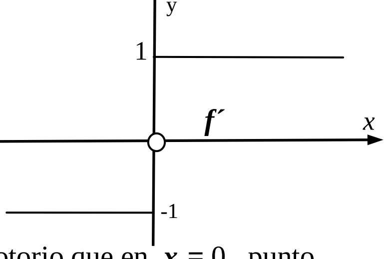
$$(*) \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

$$(*) \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to x_0} -1 = -1$$

Límite laterales <u>distintos</u>.
⇒ <u>no existe</u> el límite del CI;
⇒ <u>no existe derivada;</u>
⇒ no existe ***f´*** **(0)** .

<u>Conclusión</u>: ***f*** (x) = | x | es derivable en **R** –{0}:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & si \ \ x < 0 \\ 1 & si \ \ x > 0 \end{cases}$$

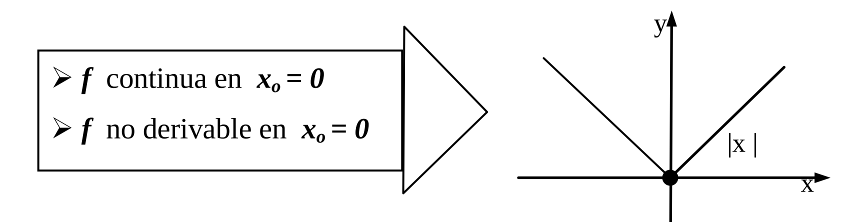


ⓘ Si observamos la gráfica de ***f*** (x) = | x | resulta notorio que en $x_o = 0$, punto donde ***f*** no es derivable (y sólo allí), la gráfica presenta un *´ángulo´* o *´esquina´*.

En razón de ello a este tipo de punto lo llamamos *´**<u>punto anguloso</u>**´*.

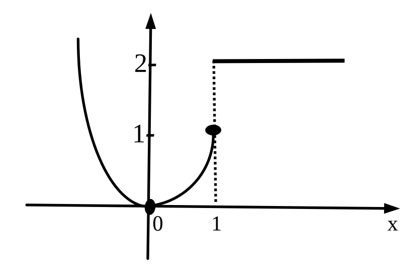
ⓘ Se puede probar que un *punto anguloso* señala un punto donde *la derivada no existe.*

ⓘ Si observamos la gráfica de ***f*** (x) = | x | con el objeto de detectar alguna relación Entre *derivabilidad* y *continuidad*, claramente vemos que ***f*** *es continua en cero.* Esto indica que ***la continuidad <u>no es condición suficiente</u> para la derivabilidad***.



Ejemplo :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \le 1 \\ 2 & ; \ x > 1 \end{cases}$$



- $\forall\, \mathbf{x_o} < 1$; existe δ tal que $\forall\, x \in E(x_o;\delta) \rightarrow f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x \Rightarrow \boldsymbol{f'(x_o) = 2x_o}$
- $\forall\, \mathbf{x_o} > 1$; existe δ tal que $\forall\, x \in E(x_o;\delta) \rightarrow f(x) = 2$; $f'(x) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{f'(x_o) = 0}$;
- $\mathbf{x_o = 1}$ **;** *f* cambia de ley en **1** → calculamos límites laterales.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = \boldsymbol{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Límite laterales <u>distintos</u>.

$\Rightarrow$ <u>no existe</u> el límite del CI;

$\Rightarrow$ <u>no existe derivada;</u>

$\Rightarrow$ no existe $\boldsymbol{f'(1)}$.

ⓘ Si observamos la gráfica de ***f*** ; vemos que ***f*** es discontinua en $\mathbf{x_o = 1}$
Luego, ***la continuidad*** en el punto parece ser <u>***condición necesaria***</u> para la existencia de derivada en el punto . En lo que sigue vemos esto.

TEOREMAS FUNDAMENTALES del CALCULO DIFERENCIAL

TEOREMA 1 (relación entre derivabilidad y continuidad)

Si f es derivable en x_o, entonces f es continua en x_o.

Demostración: *f derivable en x_o* $\Rightarrow \lim_{x\to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o)$

Luego, por el teorema de escritura fuera del límite (teorema 18, capítulo 2), el cociente incremental se puede escribir como el límite, $f'(x_o)$, más un infinitésimo para $x \to x_o$;

o sea: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o) + \varepsilon(x)$; con $\lim_{x\to x_o} \varepsilon(x) = \mathbf{0}$

$$f(x) - f(x_o) = (f'(x_o) + \varepsilon(x)).(x-x_o)$$

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o).(x-x_o) + \varepsilon(x).(x-x_o).$$

Recordando que, f continua en $x_o \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$; calculamos el límite:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} [f(x_o) + f'(x_o).(x-x_o) + \varepsilon(x).(x-x_o)] =$$

$$= f(x_o) + f'(x_o).\, 0 + 0 = f(x_o)$$

Luego: $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o) \Rightarrow$ *f continua en x_o* . **(q.e.d)**✓

Observación **:**

Probada la *verdad* de una afirmación del tipo $p \Rightarrow q$ inmediatamente debemos investigar la verdad de las proposiciones derivadas de ella.

1) ***directa***: **p → q** ; $\underbrace{f \text{ derivable en } x_o}_{p} \Rightarrow \underbrace{f \text{ continua en } x_o}_{q}$ **(V)**

2) recíproca: **q → p** ; f continua en x_o $\Rightarrow$ f derivable en x_o. **(F)**

3) inversa: **~ p → ~q** ; f no derivable en $x_o \Rightarrow$ f discontinua en x_o. **(F)**

4) ***contra-recíproca***: **~q → ~p ;** ***f discontinua en $x_o \Rightarrow$ f no derivable en x_o.*** **(V)**

J*ustificación*

2) La *recíproca* es *falsa*: $f(x) = |x|$ es continua en cero y no es derivable en cero.
4) La *contra-recíproca* es *verdadera* porque la *directa es verdadera.*

O sea, ***discontinuidad implica no derivabilidad*** . Y tenemos otro parámetro para detectar puntos donde no exista la derivada: ***la discontinuidad***. Luego,

f no derivable en los puntos donde el ***graf f*** presente ***ángulos***; ***saltos*** ó ***agujeros***.

TEOREMAS: REGLAS de DERIVACIÓN

En esta sección vamos a ver ´reglas´ para calcular la derivada de funciones obtenidas a partir de otras, a través de operaciones algebraicas, composición o inversión.
La demostración de las mismas se encuentra en el apéndice de este capítulo

TEOREMA 2 (derivada de la suma o resta)

Si f y g son dos funciones derivables en x, entonces $f \pm g$ es derivable en x, y vale que: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

TEOREMA 3 (derivada del producto)

Si f y g son dos funciones derivables en x, entonces f.g es derivable en x, y vale que: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Corolario teorema 3:

Si f es derivable en x y k = cte, entonces k.f es derivable en x, y vale que: $(k f)'(x) = k \cdot f'(x)$

TEOREMA 4 (derivada del cociente)

Si f y g son dos funciones derivables en x y $g(x) \neq 0$, entonces f /g es derivable en x, y vale que:

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

TEOREMA 5 (derivada de la composición o ´regla de la cadena´)

Si **f** es derivable en g(x); **g** es derivable en x y la función compuesta $\mathbf{h} = f \circ g$ está definida en x, entonces **h** es derivable en x, y vale que:

$$\mathbf{h}'(x) = \mathbf{f}'(g(x)) \cdot \mathbf{g}'(x)$$

ó

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(x) = \mathbf{f}'(g(x)) \cdot \mathbf{g}'(x)$$

TEOREMA 6 (derivada de la función inversa)

Si **f** es inyectiva, derivable en y con $\mathbf{f}'(y) \neq 0$ y **g** es la inversa de **f** definida por, $g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$; entonces **g** es derivable en x, y vale que:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{y})} = \frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}$$

Ejemplos:

1) $f(x) = x + 6 \xrightarrow{\text{teorema 2}} f'(x) = (x)' + (6)' = 1 + 0 = 1$

2) $f(x) = x^4 + \sqrt{x} \xrightarrow{\text{teorema 2}} f'(x) = (x^4)' + (\sqrt{x})' = 4x^3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x) = 5\sqrt{x} \xrightarrow{\text{corolario teorema 3}} f'(x) = 5\,(\sqrt{x})' = 5.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $f(x) = m\mathbf{x} + h \xrightarrow{\text{corolario teorema 3}} f'(\mathbf{x}) = m.(\mathbf{x})' + (h)' = \mathbf{m.1+0}$

$$\mathbf{f(x) = m\,x + h \longrightarrow f'(x) = m}$$

5) $f(x) = 3.x^{100} \xrightarrow{\text{corolario teorema 3}} f'(x) = 3.(x^{100})' = 3.100\,x^{99} = 300\,x^{99}$

6) $p(x) = 3x^5 - x^4 + 5x^2 + 3 \xrightarrow{\text{teor 2 y corolario3}} p'(x) = 15x^4 - 4x^3 + 10x$

7) $f(x) = x^2 . \text{sen } x \xrightarrow{\text{teorema 3}} f'(x) = (x^2)' . \text{sen } x + x^2 . (\text{sen } x)'$

$f'(x) = 2x . \text{sen } x + x^2 . \cos x$

8) $f(x) = x^2 / \text{sen } x \xrightarrow{\text{teorema 4}} f'(x) = \dfrac{(x^2)' \text{sen } x - x^2 (\text{sen } x)'}{\text{sen}^2 x}$

$f'(x) = \dfrac{2x . \text{sen } x - x^2 . \cos x}{\text{sen}^2 x}$

9) $f(x) = \underbrace{\text{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} (\underbrace{\mathbf{x}^2}_{\substack{\text{función}\\ \text{interior}}}) \xrightarrow{\text{teorema 5}} f'(x) = \underbrace{\text{sen}'}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la f.}\\ \text{exterior}}} (\underbrace{x^2}_{\substack{\text{evaluada}\\ \text{en la f.}\\ \text{interior}}}) . (\underbrace{x^2}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la f.}\\ \text{interior}}})'$

$f(x) = \text{sen}(x^2) \xrightarrow{\text{teorema 5}} f'(x) = \cos(x^2) . 2x$

10) $f(x) = \text{sen}^2(x) = \underbrace{(\text{sen } x)}_{\text{f.int.}}{}^{\overbrace{2}^{\text{f.ext.}}} \xrightarrow{\text{teorema 5}} f'(x) = \underbrace{2.(\text{sen } \mathbf{x})}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{f.ext. evaluada}\\ \text{en la f.int.}}} . \underbrace{(\text{sen } \mathbf{x})'}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la}\\ \text{f.int.}}}$

$f(x) = (\text{sen } x)^2 \xrightarrow{\text{teorema 5}} f'(x) = 2.\text{sen } x . \cos x$

11) f(x) = cos x = sen (x + π/2) $\xrightarrow{\text{teorema 5}}$ f´(x) = cos (x +π/2).1 = **-** sen x

f(x) = cos x $\longrightarrow$ f´(x) = - sen x

12) f(x) = ***tg x*** = $\dfrac{sen\ x}{cos\ x}$ $\xrightarrow{\text{teorema 4}}$ f´(x) = $\dfrac{(sen\ x)'.cos\ x - sen\ x.(cos\ x)'}{cos^2\ x}$

f´ (x) = $\dfrac{cos\ x.cos\ x - sen\ x.(-sen\ x)}{cos^2\ x}$

f(x) = tg x $\longrightarrow$ f´(x) = $\dfrac{1}{cos^2\ x}$

13) g(x) = e ^{x} $\xrightarrow{\text{teorema 6}}$ g(x) = y $\Leftrightarrow$ ln y = x ; (ln y)´ = 1/y

Luego; **g´(x)** = $\dfrac{1}{(\ln \mathbf{y})'}$ = $\dfrac{1}{1/\mathbf{y}}$ = **y = e ^{x}**

f (x) = e^{x} $\longrightarrow$ f´(x) = e^{x}

14) f (x) = e $^{sen\ x}$ $\xrightarrow{\text{teorema 5}}$ f ´(x) = e $^{sen\ x}$.(sen x)´ = e $^{sen\ x}$. cos x

f (x) = e $^{g(x)}$ $\xrightarrow{\text{teorema 5}}$ f´(x) = e $^{g(x)}$. g´(x)

15) f (x) = ***a*** ^{x} (***a*** >0)

f (x) = ***a*** ^{x} = $e^{\ln a^x}$ = $e^{x \ln a}$ $\xrightarrow{\text{teorema 5}}$ f´ (x) = e $^{x \ln a}$. (x. ln*a*)´

f (x) = *a*^{x} $\longrightarrow$ f´(x) = *a*^{x}. ln*a*

16) f(x) = ***log x*** = $\dfrac{ln\ x}{ln\ 10}$ $\xrightarrow{\text{corolario teorema 3}}$ f´(x) = $\dfrac{1}{ln 10}.(ln\ x)' = \dfrac{1}{ln 10}.\dfrac{1}{x}$

<u>Observaciones</u>:

1) De los ejemplos vemos que las reglas de derivación permiten calcular la derivada de las funciones obtenidas al ´operar´ o ´componer´ dos o más funciones elementales.

Así, con estas reglas y conociendo la derivada de las funciones elementales (seno, logaritmo natural, potencias, etc) podemos obtener la derivada de cualquier otra función. . Luego, resulta conveniente

tabular las funciones derivadas correspondientes a las funciones elementales, disponer así de una **TABLA de DERIVADAS**. (apéndice)

A partir de conocer la derivada de las funciones elementales y las reglas de derivación, el proceso de derivar se resume a la aplicación de estas reglas; o sea, se obvia el cálculo del límite y se usa, en cada caso, los resultados ya probados.

2) Los teoremas de suma, resta, producto o composición se presentan para dos funciones pero se pueden extender a tres o más funciones. Así:

a) $(f + g + h)' = f' + g' + h'$

b) $(f \,.\, g \,.\, h)' = f' . g . h + f . g' . h + f . g . h'$

c) $$(\underbrace{f}_{f.ext} \circ \underbrace{g}_{f.media} \circ \underbrace{h}_{f.int})'(x) = \underbrace{f'}_{\substack{derivada\\ de\ la\ f.\\ exterior}} (g(h(x))) . \underbrace{g'}_{\substack{derivada\\ de\ la\ f.\\ media}} (\underbrace{h(x)}_{\substack{evaluada\\ en\ la\ f.\\ interior}}) . \underbrace{h'(x)}_{\substack{derivada\\ de\ la\ f.\\ interior}}$$

Ejemplo: $k(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^3)) \rightarrow k'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x^3)} . \cos(x^3) . 3.x^2$

3) En el caso de la función compuesta **h = f o g** si hacemos :

$$\left.\begin{array}{l} z = f(y) \\ y = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow z = f(g(x)) = f \circ g(x) \Rightarrow z = h(x)$$

y usamos la notación de Leibniz : $g' = \dfrac{dy}{dx}$; $f' = \dfrac{dz}{dy}$; $h' = \dfrac{dz}{dx}$

la <u>regla de la cadena</u> queda expresada como:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Escrita la regla de la cadena de esta manera queda claro que, en esencia, la derivada de la función compuesta de f y g es el *´producto´* de las derivadas de f y g (*¡en su variable!*). Esta forma de expresar la regla resulta *´consistente´* con la interpretación que hemos hecho de la *´razón de cambio´* como *´ incremento aproximado de la variable dependiente en relación al de la independiente´*.
Así, y por ejemplo, si *´**z*** se incrementa aproximadamente ***5*** veces más rápido que ***y´*** e *´**y*** se incrementa aproximadamente el ***doble*** de rápido que ***x´*** entonces es intuitivamente razonable suponer que para ***z*** como función de ***x*** resulte que *´**z*** se incrementa aproximadamente ***10*** veces más rápido que ***x´***

4) Para ciertos casos de funciones compuestas, aquellos donde una de las funciones es una función elemental, podemos establecer las que llamamos *reglas ´generalizadas´ de derivación* (ver ejemplo14). Así tenemos:

- **<u>Regla 1</u>**: <u>*generalizada para la potencia*</u>: sea α cualquier número real ,

  $$([f(x)]^{\alpha})' = \alpha\, [f(x)]^{\alpha-1} . f'(x)$$

- **<u>Regla 2</u>**: <u>*generalizada para la exponencial*</u>: $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} . f'(x)$

- **<u>Regla 3</u>**: <u>*generalizada para el logaritmo*</u>: $(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)} . f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

5) Un caso especial de composición de funciones es el de una potencia donde tanto base como exponente son funciones: $\boldsymbol{h}(x) = [\boldsymbol{f}(x)]^{g(x)}$.

En este caso debemos escribir ***h*** de otra forma a los efectos de poder detectar cuales son las funciones que la ´*componen*´. Para ello debemos ´*bajar*´ ***g*** del exponente. Acudimos entonces al logaritmo y su inversa la exponencial, aplicamos una a continuación de la otra (y así, dado que la exponencial deshace lo que el logaritmo hace, podemos escribir la igualdad de otra forma, preservándola.)

$$\boldsymbol{h}(x) = [\boldsymbol{f}(x)]^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad h(x) = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} \quad \Rightarrow \quad h(x) = e^{g(x).\ln f(x)}$$

Reconocemos así que ***h***, en esencia, es la ***composición*** de dos funciones:
la exponencial e^x y el producto, $g(x). \ln f(x)$

- **Regla 4**: *derivada de* f^g :

  Si $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$,

  * expresamos ***h*** como exponencial: $h(x) = e^{g(x).\ln f(x)}$,

  * derivamos aplicando la Regla-2 y expresamos ***h*** en su forma original:

  $$h´(x) = e^{g(x).\ln(f(x))} . [\, g(x) . \ln f(x)]´ = [f(x)]^{g(x)} . [\, g(x) . \ln f(x)]´$$

  *derivamos el producto e informamos el resultado (Teor. 3 y Regla-3).

Ejemplo: $h(x) = x^{\text{sen}\, x} = e^{\text{sen}x.\ln x}$

$$h´(x) = e^{\text{sen}x.\ln x} .(\text{sen}\, x . \ln x)´ = x^{\text{sen}\, x}. \ (\cos x . \ln x + \text{sen}\, x . 1/x)$$

Derivada de potencias: podemos ahora justificar la regla de derivación de las potencias.

$$h(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha.\ln x}$$

$$h´(x) = e^{\alpha.\ln x} . (\alpha . \ln x)´ = x^{\alpha}. (\alpha . \frac{1}{x}) = \alpha . x^{\alpha - 1}$$

6) La regla de la cadena facilita el cálculo de la derivada de funciones inversas ya que, si ***g*** es la inversa de ***f***, tenemos que $f \circ g = id$, con $id(x) = x$.
Luego, derivando miembro a miembro, tenemos que:

$[\, f \circ g\,]´ = [\text{id}\,]´$; aplicando las reglas de derivación,

$f´(g(x)). g´(x) = 1$, de donde despejamos $g´(x)$.

Ejemplo: recordando que $y = \text{arc sen}\, x \Leftrightarrow x = \text{sen}\, y, \ y \in [-\pi/2;\ \pi/2];$
vamos a hallar la derivada de $g(x) = \text{arc sen}\, x$, a partir de considerar esta función como la inversa de ***f*** . ($f(y) = \text{sen}\, y$, $D_f = [-\pi/2;\ \pi/2]$)

- $id(x) = f \circ g\, (x)$
- $x = \text{sen}\, (\text{arc sen}\, x)$
- $(x)´ = [\text{sen}\, (\text{arc sen}\, x)]´$
- $1 = \cos(\text{arc sen}\, x) .(\text{arc sen}\, x)´ \Rightarrow$ $(\text{arc sen}\, x)´ = \dfrac{1}{\cos(\text{arc sen}\, x)}$ **(1)**

Esta derivada puede expresarse de otra forma acudiendo a la identidad Pitagórica:

$$sen^2 y + cos^2 y = 1 \underset{-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2}{\Rightarrow} \cos y = \sqrt{1 - sen^2 y}$$

Como $y = arc\ sen\ x \Rightarrow cos\ (arc\ sen\ x) = \sqrt{1 - sen^2 (arc\ sen\ x)} = \sqrt{1 - x^2}$

Reemplazando en **(1)**

$$(arc\ sen\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

De igual manera hallamos las derivadas de las otras funciones trigonométricas inversas.

3.4 Derivadas Sucesivas

Si f es una función derivable en cierto dominio D su derivada, f', es una función con dominio en D; luego, puede ser derivada a su vez, obteniéndose así otra función la que llamamos ***derivada segunda de f*** y denotamos f''.

Así: $\mathbf{f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x \rightarrow f'(x) = 12x^3 + 10x + 2 \rightarrow f''(x) = 36x^2 + 10}$

Otras notaciones: $f'' = y''$ ó $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ (notación de Leibniz)

El proceso puede continuar; obteniéndose así las *derivadas sucesivas de f*:

- ***derivada tercera de f***: $f''' = (f'')'$
- ***derivada cuarta de f***: $f^{(4)} = (f''')'$

- ***derivada n-ésima de f***: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ (derivada de f "*n veces*").

3.5 Derivadas Laterales

- Por definición : $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Por teorema: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = L$

Luego: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (finitos)

- Los límites laterales del cociente incremental se indican y conocen como:

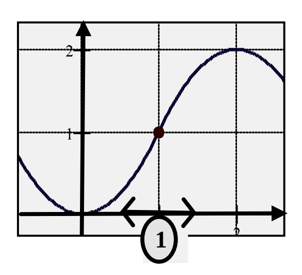
Derivada lateral por derecha: $f'(x_o^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Derivada lateral por izquierda: $f'(x_o^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Conclusión: **f derivable en x_o** $\Leftrightarrow$ $f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$

Ejemplo 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & ; \ x > 1 \end{cases}$$



- $x_o < 1$; $\forall x \in E(x_o;\delta) \rightarrow f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{f'(x_o) = 2x_o}$
- $x_o > 1$; $\forall x \in E(x_o;\delta) \rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 2$ y $f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow$ $\boldsymbol{f'(x_o) = -2x_o + 4}$
- $x_o = 1$; si $x \in E(1;\delta)$, $f(x) = ?$ .... $f'(1) = ?$ $\Rightarrow$ ***debemos acudir a la definición***.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ ?$$

f cambia de ley en **1** → calculamos derivadas laterales.

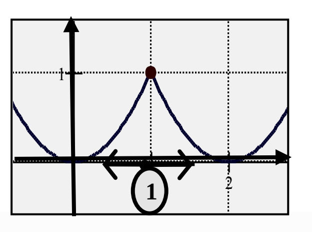
$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = \boldsymbol{2}$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (-(x-3)) = \boldsymbol{2}$$

$f'(1^-) = f'(1^+) = 2$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{f'(1) = 2}$

Ejemplo 2:

$$q(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & ; \ x > 1 \end{cases}$$



- $x_o < 1$; $\forall x \in E(x_o;\delta)$ $\rightarrow q(x) = x^2$; $q'(x) = 2x$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{q'(x_o) = 2x_o}$
- $x_o > 1$; $\forall x \in E(x_o;\delta)$ $\rightarrow q(x) = x^2 - 4x + 4$; $q'(x) = 2x - 4$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{q'(x_o) = 2x_o - 4}$
- $x = 1$; $x \in E(1;\delta)$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{q(x) = ??}$ $\Rightarrow$ $q'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{q(x) - q(1)}{x - 1} = \ ?$

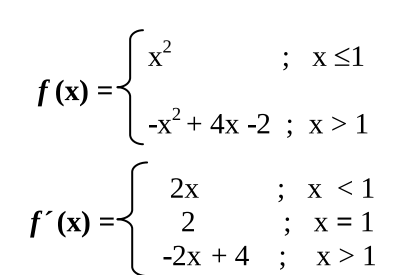
q cambia de ley en **1** → calculamos derivadas laterales y concluimos

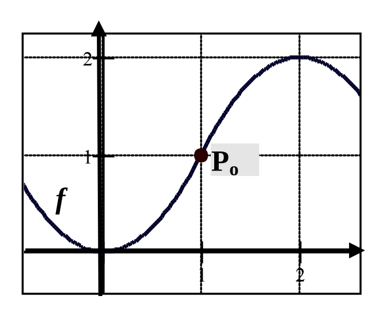
$$q'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{q(x) - q(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$$

$$q'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{q(x) - q(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x-3) = -2$$

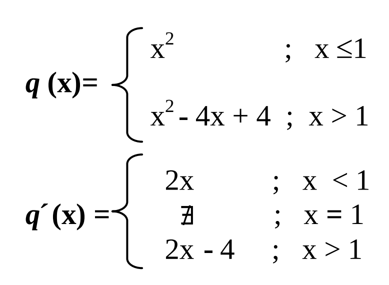
$q'(1^-) \neq q'(1^+)$ $\Rightarrow$ $q'(1) = \nexists$

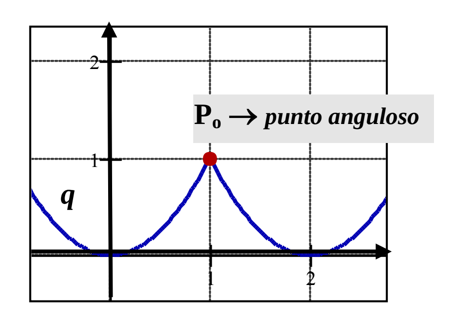
Observaciones:





f derivable en todo su dominio ⇒ ***graf f curva "suave"***.



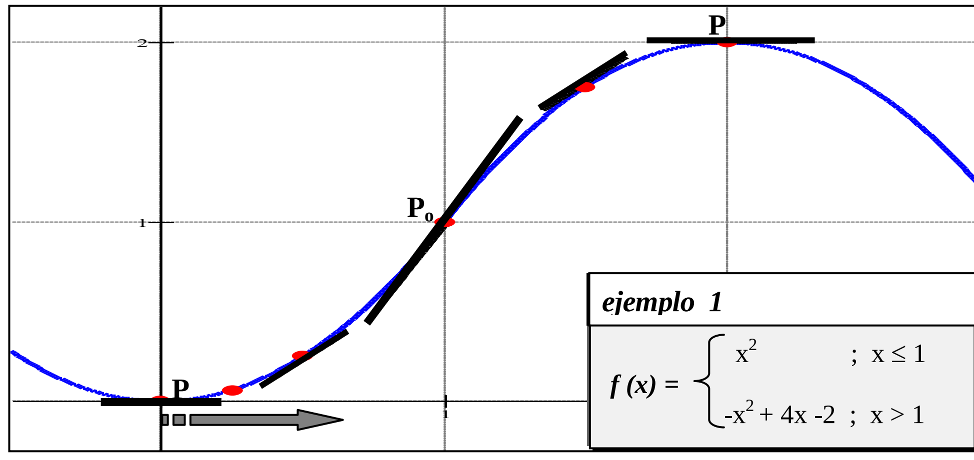


q no derivable en $x_o = 1$ ⇒ **P_o (1;1)** "***punto anguloso***".

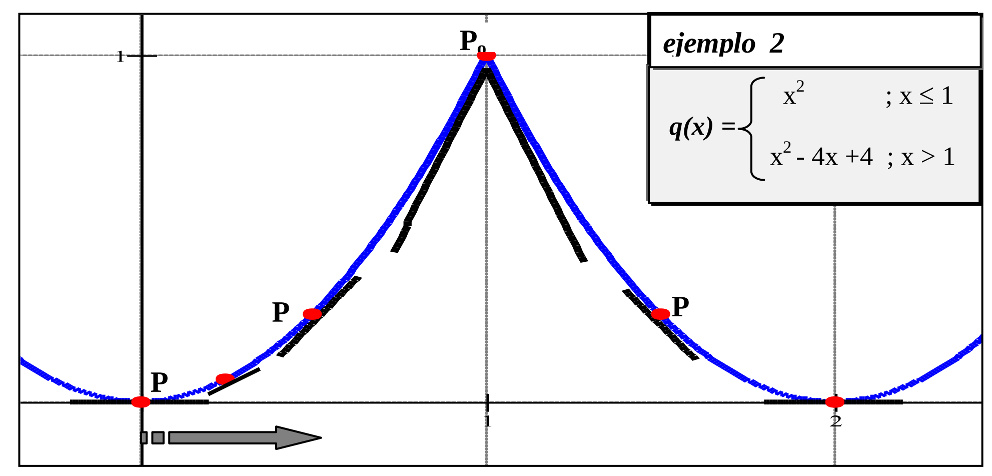
ⓘ Como en | **x** |, nuevamente observamos que ***puntos del dominio donde f no es derivable se corresponden con puntos angulosos en la graf f y viceversa.***
Para verificar o refutar esta afirmación debemos precisar la noción de ***punto anguloso***; es decir, ***establecer con claridad que es aquello que los caracteriza***.

A tal efecto, dada una curva **C** y un punto **P** en **C**, procedemos a investigar como se desplaza la ***recta tangente*** a **C** en **P** a medida que movemos **P** sobre la curva. Para ello, cada tanto y con un pequeño segmento, graficamos la ***recta tangente en*** **P**. Marcadas varias tangentes, las suficientes para detectar algún *´patrón´*, estamos en condiciones de analizar *´el comportamiento de las rectas tangentes´*.

➲**C,** ***curva suave*** (sin puntos angulosos). En este caso el desplazamiento de las tangentes sobre la curva también es *´suave´*; o sea, las rectas van cambiando de posición en forma lenta, ***con ´continuidad´, no se aprecian cambios ´abruptos´ en sus pendientes al pasar de un punto a otro muy próximo***.



➲ **C**, ***no suave*** (presenta un punto anguloso en **P_o**). En este caso el desplazamiento de las tangentes es *suave* hasta llegar a **P_o** donde se produce un ***cambio ´abrupto´ en las pendientes de las rectas***. Luego de **P_o** vuelven a cambiar en forma *suave*, con continuidad.

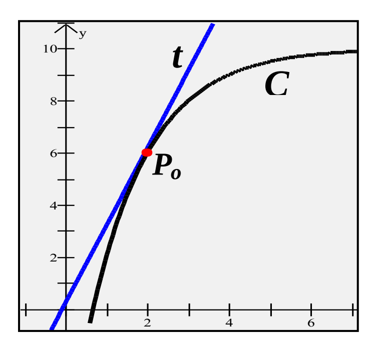


• ***Punto anguloso:*** ***punto donde una recta tangente que se desplaza sobre la curva cambia en forma abrupta su pendiente al pasar por él .***

• ***Problema:*** ***¿Y en P_o?, ¿hay tangente? .***
Pero, ¿qué es una recta tangente?, ¿ lo sabemos? .

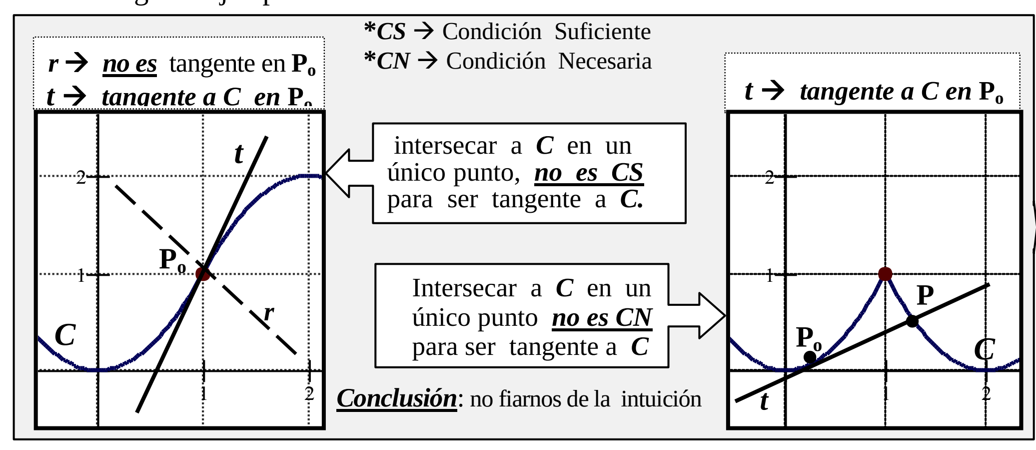
3.6 Recta Tangente

En el gráfico adjunto fácilmente reconocemos a ***t*** como la ***recta tangente*** a ***C***, en ***P_o***

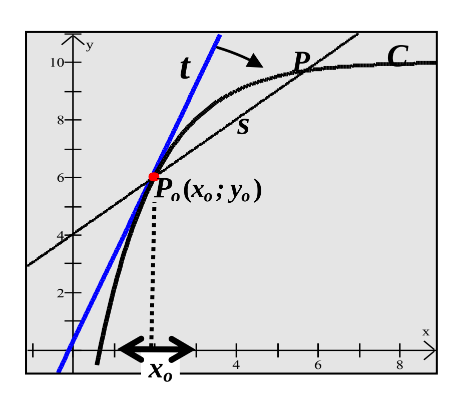


Las posiciones relativas de ***C*** y ***t*** concuerdan con la idea intuitiva que tenemos de recta tangente, de allí que fácilmente reconocemos ***t*** como la recta tangente. O sea, ***la intuición alcanza al efecto de reconocer rectas tangentes. Pero, ¿alcanza al efecto de establecer que es lo que las ´caracteriza´ ?.***
Desde lo intuitivo diríamos que,
*´**t** es la recta que interseca a **C** en un único punto´*
pero esta afirmación no es *´totalmente correcta´*. Que ***C*** y ***t*** se toquen en un único punto no es condición suficiente (ni necesaria) para ***distinguir a t*** de otra recta que pase por ***P_o***

Veamos algunos ejemplos:



Dada t , recta tangente a C en $P_o\,(x_o\,;y_o)$, para hallar aquello que caracteriza a t debemos analizar la cuestión en forma ***local*** ; o sea, trabajar en ***entornos de*** x_o . Concluimos así la:



Condición de tangencia.

t es tangente a C en P_o sí y sólo sí :

(1) ***existe un entorno de*** x_o , $E(x_o)$, donde t y C se intersecan en el único punto P_o .

(2) ***todo giro de t sobre*** P_o , aunque pequeño, hace que t corte a C en P, otro punto de C. O sea, que t pase de ***tangente*** a ***secante*** (s).

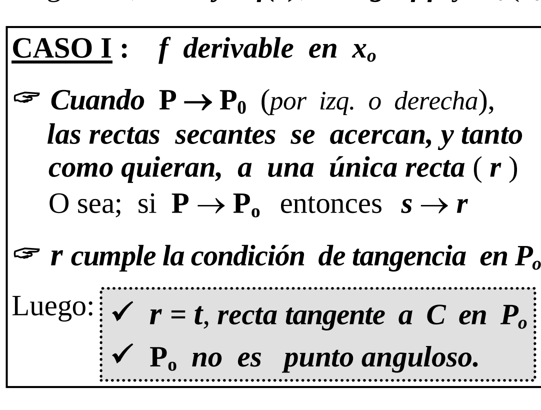
¿Ecuación de t ? : $y - y_o = m_t\,(x - x_o)$; [ecuación pto-pendiente]

Datos requeridos: $P_o\,(x_o\,;\,y_o) \in t$ (*conocido*); m_t = ***pendiente de t*** (***desconocida***)

Sólo conocemos un punto de la recta, este único dato no alcanza para hallar m_t.

🛈 La condición (2) de tangencia indica que si t es tangente a C en P_o entonces deben existir ***muy próximas a t,*** secantes a C que pasen por P_o ; más aún, ***tan próximas como se quiera***. Esto indica que t sería la ***posición límite de las secantes***; señala un camino para definir en forma rigurosa el concepto de ***recta tangente***. Para explorar esta conjetura ***investigamos el comportamiento de las secantes cuando*** $P \to P_0$; o sea, si "s" tiende a una ***posición límite***

En general, dada $y = f(x)$, $C = \text{graf } f$ y $P_o\,(x_o\,;\,f\,(x_o))$, existen tres situaciones posibles:

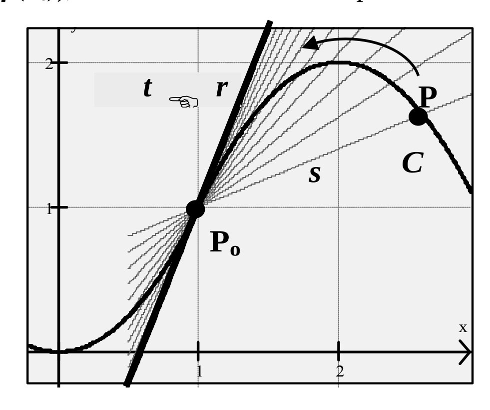


CASO I : ***f derivable en*** x_o

☞ ***Cuando*** $P \to P_0$ (*por izq. o derecha*), ***las rectas secantes se acercan, y tanto como quieran, a una única recta*** (r)
O sea; si $P \to P_o$ entonces $s \to r$

☞ ***r cumple la condición de tangencia en*** P_o

Luego:
✓ ***r = t, recta tangente a C en*** P_o
✓ P_o ***no es punto anguloso.***



CASO II- a: *f no derivable en* x_o

☞ $P \to P_o^-$ entonces $s \to r_1$
$P \to P_o^+$ entonces $s \to r_2$
} $r_1 \neq r_2$

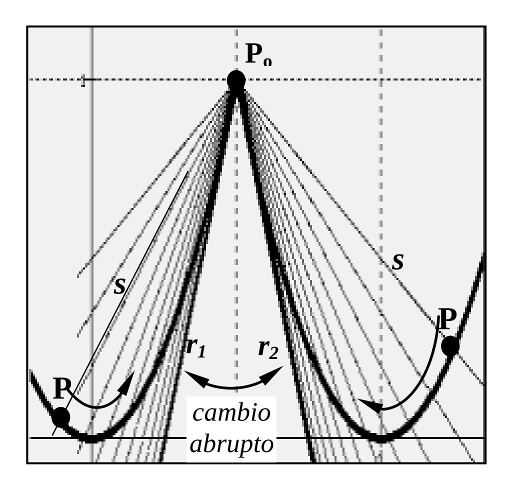
Las rectas secantes no tienden a una única posición límite.

☞ r_1, r_2 ; no cumplen la condición de tangencia. (se pueden girar sin cortar a **C** en otro pto).

Luego:

✓ ***no existe t, recta tangente a C en*** P_o

✓ P_0 ***punto anguloso*** *(cambio abrupto pend.)*



CASO II-b: *f no derivable en* x_o

☞ $P \to P_o^-$ entonces $s \to r_1$
$P \to P_o^+$ entonces $s \to r_2$
} $r_1 = r_2 = r$

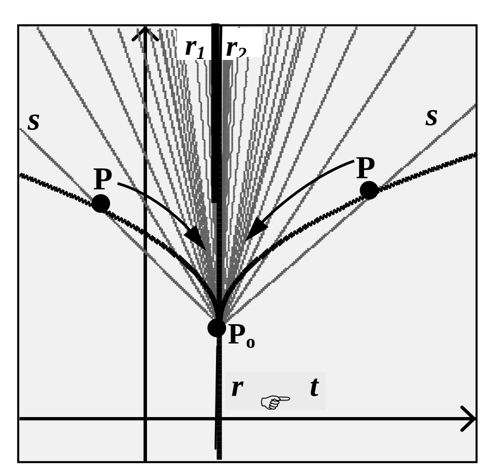
Cuando $P \to P_0$ (*por izq. o derecha*), ***las rectas secantes se acercan, y tanto como quieran, a una única recta*** (***r***).
O sea, si $P \to P_o$ entonces $s \to r$

☞ ***r cumple la condición de tangencia en*** P_o

Luego:

✓ ***r = t, recta tangente a C en*** P_o.

✓ P_0 ***punto anguloso ´extremo´***



Conclusión: si ***t*** existe, entonces ***t*** es ***la posición límite de las secantes.***

DEFINICIÓN: *´recta tangente´*

> ***t*** es la recta tangente a ***C*** en P_o ⇔ cuando $P \to P_o$, por ambos lados y sobre ***C***, las rectas secantes (***s***) se acercan tanto como quieran a la ***única recta t***.
> O sea ***t***, es la ***posición límite de las secantes cuando*** $P \to P_o$
>
> $$t = \lim_{P \to P_o} s$$ (*si el límite existe*)

Nota:

Como en el límite ordinario, definimos ***tangente lateral*** como la posición límite de las secantes cuando $P \to P_o$ *´por un solo lado´* (izquierda o derecha de P_o).

- t^- = tangente en P_o, *por izquierda* (r_1 *del ej.*); $\quad t^- = \lim_{P \to P_o^-} s$
- t^+ = tangente en P_o, *por derecha* (r_2 *del ej.*); $\quad t^+ = \lim_{P \to P_o^+} s$

Como en el límite ordinario, tenemos la siguiente propiedad para las tangentes:

➲ **Propiedad 1:** ***t*, *recta tangente a C en*** P_o**,** existe ⇔ $t^- \equiv t^+$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y DERIVADA

Hallar la recta tangente a una curva, ***su ecuación*** *es, históricamente, el problema que da origen al concepto de* ***derivada****. Este concepto aparece muy tarde en la historia de la Matemática; mucho tiempo después que el de integral (200 A.C; con Arquímedes).*
El concepto de derivada no se formula hasta el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat, tratando de determinar máximos y mínimos de funciones descubre que el problema de localizar valores extremos se podía reducir al de localizar " tangente horizontales".

Retomamos ahora el problema de hallar (si existe) la ecuación de ***t*,** recta tangente a ***C*** en $P_o\,(x_o; y_o) \in C$. En particular, el de hallar su pendiente m_t, la que hasta ahora no conocemos ni estamos en condiciones de calcular pues sólo tenemos un dato: $P_o\,(x_o; y_o)$.

Ecuación de t : $y - y_o = m_t\,(x - x_o)$ (***ecuación pto-pendiente, la más apropiada al caso***)

Datos requeridos: $P_o\,(x_o; y_o) \in t$ (*conocido:* $y_o = f(x_o)$)

m_t ***= pendiente de t*** (***desconocida***) → ¿ m_t ?.

Por definición de recta tangente tenemos que: $t = \lim\limits_{P \to P_o} s$.

Así, y desde lo intuitivo, diríamos que si existen ***s*** próximas a ***t*** y ***tan próximas como se quiera*** entonces sus pendientes, m_s, deben de estar próximas a m_t, la pendiente de ***t ;*** y más aún, ***tan próximas como se quiera***.
Esta apreciación da pie entonces a la siguiente definición de m_t .

Definición: ***pendiente de la recta tangente:***

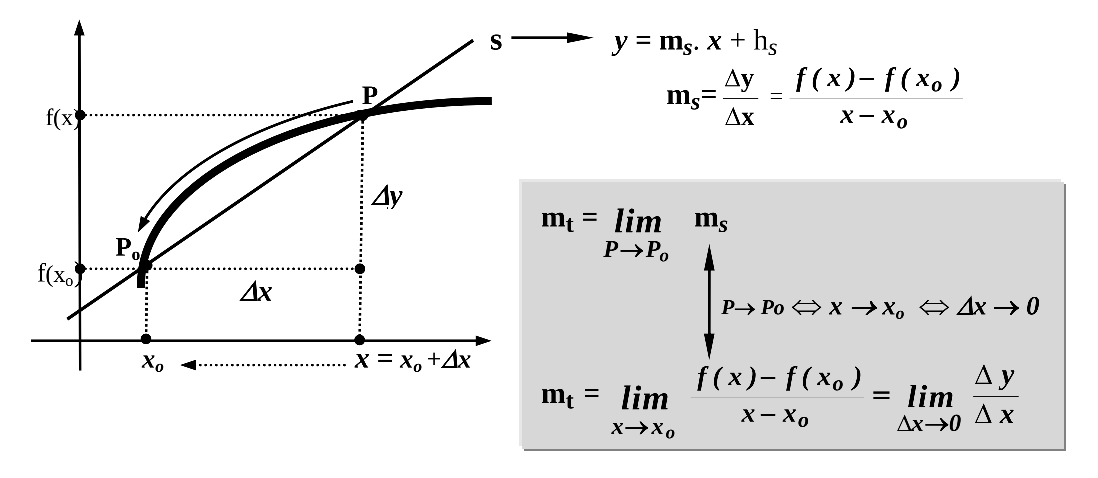
$$m_t = \lim_{P \to P_o} m_s \qquad \text{(si este límite existe)}$$

Por la misma apreciación, establecemos que:

- si t^- = *tangente ´por izq.´* entonces $m_{t^-} = \lim\limits_{P \to P_o^-} m_s$
- si t^+ = *tangente ´por der.´* entonces $m_{t^+} = \lim\limits_{P \to P_o^+} m_s$

➲ **Propiedad 2:** m_t existe ⇔ $m_{t^-} = m_{t^+}$

➢ ***Cálculo de* m_t *, pendiente de la recta tangente***



<u>***Conclusión***</u>: m_t , por definición, es el límite del ***cociente incremental***; o sea, el límite con el que definimos $f'(x_o)$, la ***derivada de f en*** x_o.

Luego: " f derivable en x_o $\Rightarrow$ $m_t = f'(x_o)$ "

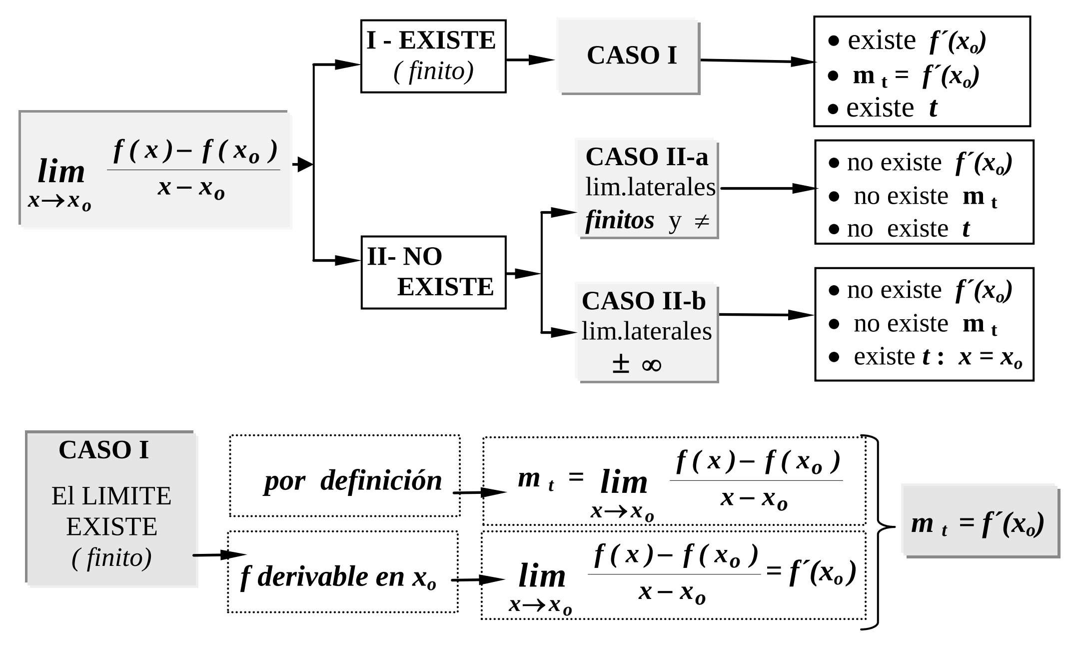
<u>***Observación***</u>: si calculamos los límites laterales, obtenemos las derivadas laterales y, en consecuencia, las pendientes de las tangentes laterales

$$m_{t-} = \lim_{P \to P_o^-} m_s = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \Rightarrow m_{t-} = f'(x_o^-)$$

$$m_{t+} = \lim_{P \to P_o^+} m_s = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \Rightarrow m_{t+} = f'(x_o^+)$$

<u>***Interrogante***</u>: ¿ y si ***f no*** es derivable en x_o **?.**

En lo que sigue resumimos las situaciones que se pueden presentar en la búsqueda de la ***tangente***, su ecuación; situaciones que, según vimos, están ligadas al límite de Δy/Δx.



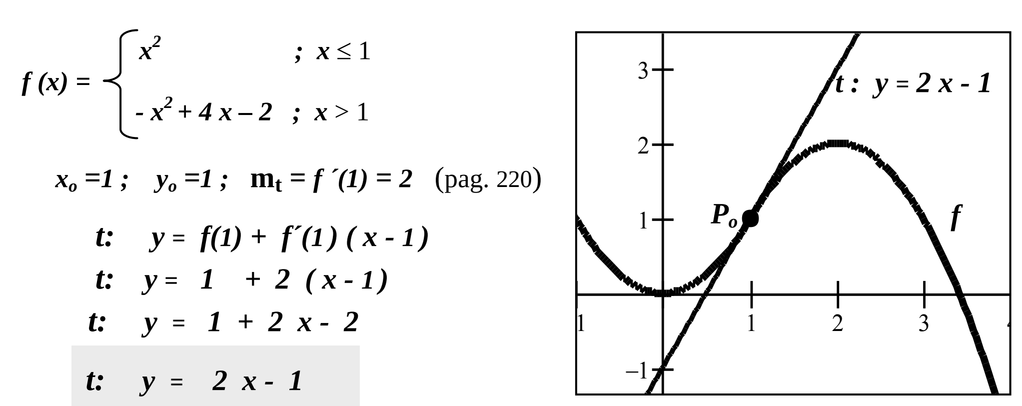
Ecuación de t, recta tangente a C en $P_o\,(x_o\,;\,y_o)$.

$$y - y_o = m_t\,.(x - x_o) \xrightarrow[\;y_o \,=\, f(x_o)\;]{\;m_t \,=\, f'(x_o)\;} y - f(x_o) = f'(x_o)\,.\,(x - x_o)$$

$$t: \quad y = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o)$$

➲ **Propiedad 3:** *f derivable en* $x_o \Rightarrow$ *existe t, recta tangente a C en* P_o, $m_t = f'(x_o)$ *y* P_o *no es pto anguloso*

Ejemplo 1 → hallar la recta tangente a $C = graf\, f$ en $P_o\,(1; y_o)$.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & ;\ x > 1 \end{cases}$$

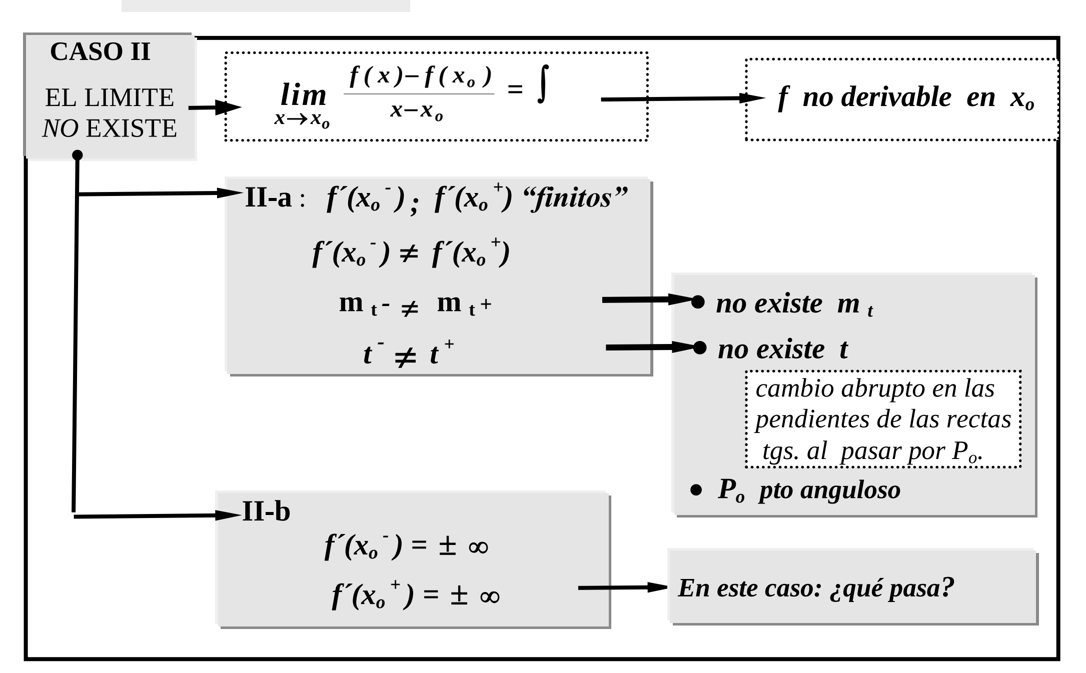
$x_o = 1\,;\quad y_o = 1\,;\quad m_t = f'(1) = 2$ (pag. 220)

$t: \quad y = f(1) + f'(1)\,(x - 1)$

$t: \quad y = 1 + 2\,(x - 1)$

$t: \quad y = 1 + 2x - 2$

$t: \quad y = 2x - 1$



Caso II-a : *ejemplo*. **Hallar** t , **tangente a** $C = graf\ q$ **en** $P_o(1;$

$$q(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \le 1 \\ x^2 - 4x + 2 & ; \ x > 1 \end{cases}$$

$x_o = 1 \rightarrow P_o(1; 1)$.

$m_t = q'(1) = ??$ (pag. 221)

$m_{t^-} = q'(1^-) = 2$

$m_{t^+} = q'(1^+) = -2$

$\Rightarrow q'(1) = \nexists \quad \Rightarrow m_t = \nexists$

$\Rightarrow$ *NO EXISTE "t",*
recta tg en P_o;
$P_o(1; 1)$ pto anguloso

$P_o(1; 1)$.

$x_o = 1$

t^- $\quad$ $t^+ : \ y = -2x + 3$

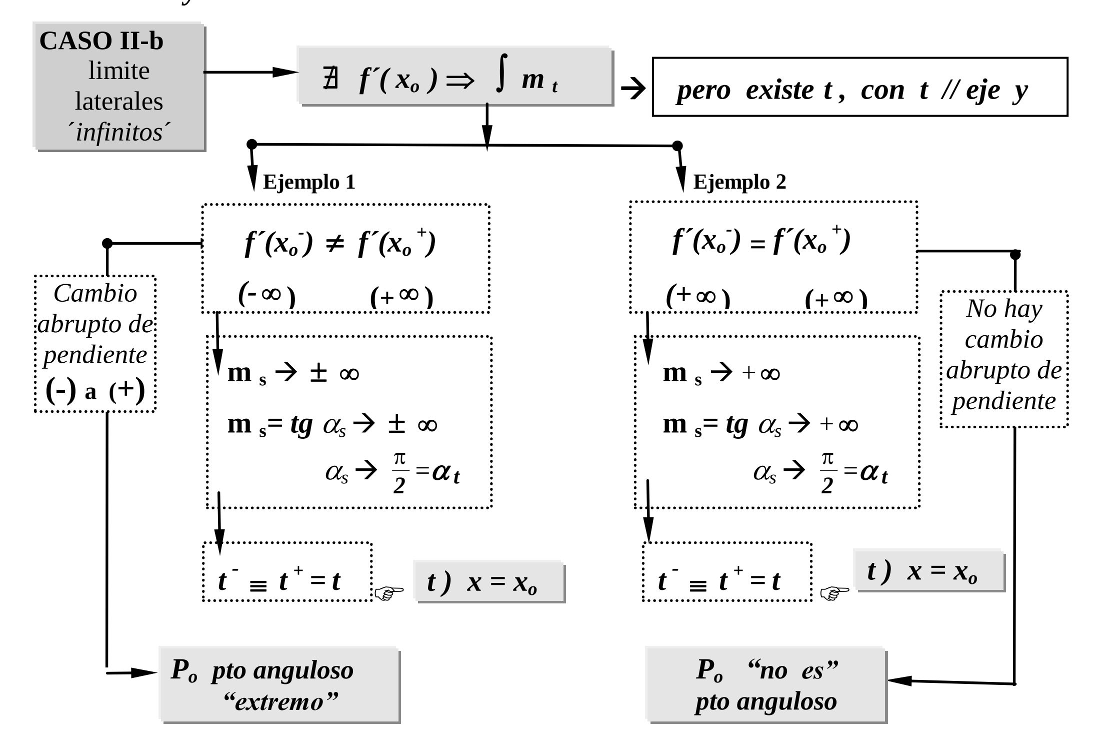
Cálculo de una recta tangente lateral

$t^- : \quad y = q(1) + q'(1^-)(x - 1)$

$t^- : \quad y = 1 + 2(x - 1)$

$t^- : \quad y = 1 + 2x - 2$

$t^- : \quad y = 2x - 1$



Ejemplo 1

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}+1 & ; \ x \le 1 \\ \sqrt{x-1}+1 & ; \ x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty$$

$h'(1) = \nexists$; **t** ***existe*** → ***t: x = 1***

Ejemplo 2

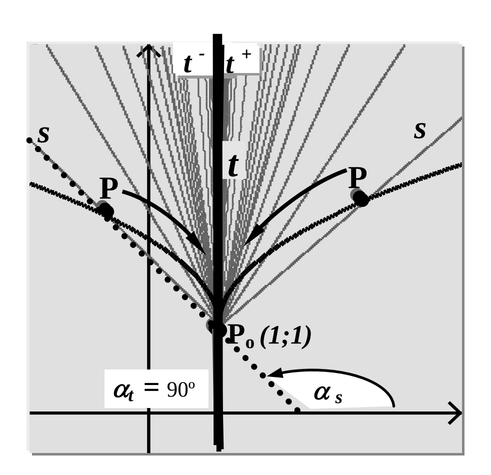
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

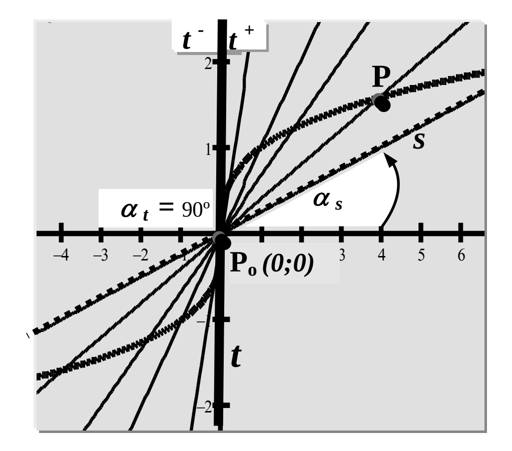
$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x} = +\infty$$

$f'(0) = \nexists$

t ***existe*** → ***t: x = 0***





Prop. 4: ***P_o punto anguloso*** (cambio abrupto de las tangentes al pasar por P_o)

<u>**Caso II-a**</u>: $\nexists$ **recta tangente en P_0** $\Rightarrow$ $\nexists$ **m_t** $\Rightarrow$ $\nexists$ $f'(x_o)$.

<u>**Caso II-b**</u>: $\exists$ **recta tangente en P_0 ;** $\alpha_s = 90º$ $\Rightarrow$ $\nexists$ **m_t** $\Rightarrow$ $\nexists$ $f'(x_o)$.

<u>Observaciones</u> **:** analizamos la ***propiedad 3*** y las afirmaciones derivadas de ella.

$$\underbrace{f \text{ derivable en } x_o}_{p} \Rightarrow \underbrace{\text{existe } t, \text{ recta tangente en } P_o}_{q}$$

**** directa*** **p ⇒ q** **(V*erdadera - Prop. 3*)**

* ***contra-recíproca***: **~q ⇒ ~p** ; " ***no existe t en P_o ⇒ f no es derivable en x_o*** "
(V*erdadera,* la directa es verdadera **)**

* ***recíproca*** ; **q ⇒ p** ; " ***existe t en P_o ⇒ f es derivable en x_o*** "
(*Falsa*, contraejemplo: $f(x) = \sqrt[3]{x}$)

<u>NOTAS</u> **:** ***f*** : D → **R ;** ***C = graf f***

(*) ***f*** continua en D ⇒ **C** curva "continua" ⇒ **C** sin "saltos" ni "agujeros".

(*) ***f*** derivable en D ⇒ **C** curva "suave" ⇒ **C** sin "ptos angulosos", "saltos" ni "agujeros".

Criterio gráfico para la detección de puntos de no derivabilidad:

(*) **P**(x_o; ***f*** (x_o)) punto anguloso de ***C = graf f*** $\Rightarrow$ ***f*** no es derivable en $\boldsymbol{x_o}$. (***Prop. 4***)

(*) ***f*** derivable en D $\Rightarrow$ existe ***t*** **,** recta tangente en **P**, $\forall$ **P 0** ***C*** (***Prop. 3***) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ***C = graf f*** no tiene puntos angulosos en D $\Rightarrow$ ***C*** curva ***suave*** .

NOTA:

Un *´punto anguloso´* no siempre es detectable a simple vista.
¿Cómo resolvemos esta cuestión en el caso que el carácter de **P**(x_o; ***f***(x_o)) sea dudoso?.

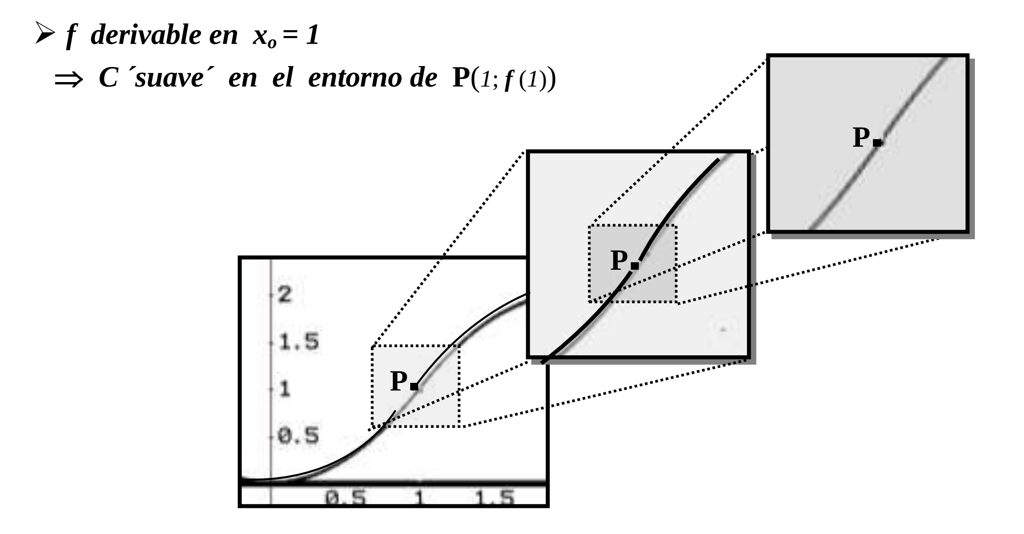
→ Si conocemos la ley de ***f*** , calculamos la derivada por definición y concluimos.

→ Si estamos trabajando con un dispositivo graficador seleccionamos un entorno de **P** y nos *´acercarnos´* más y más a **P** haciendo *´zoom´* con centro en **P**.

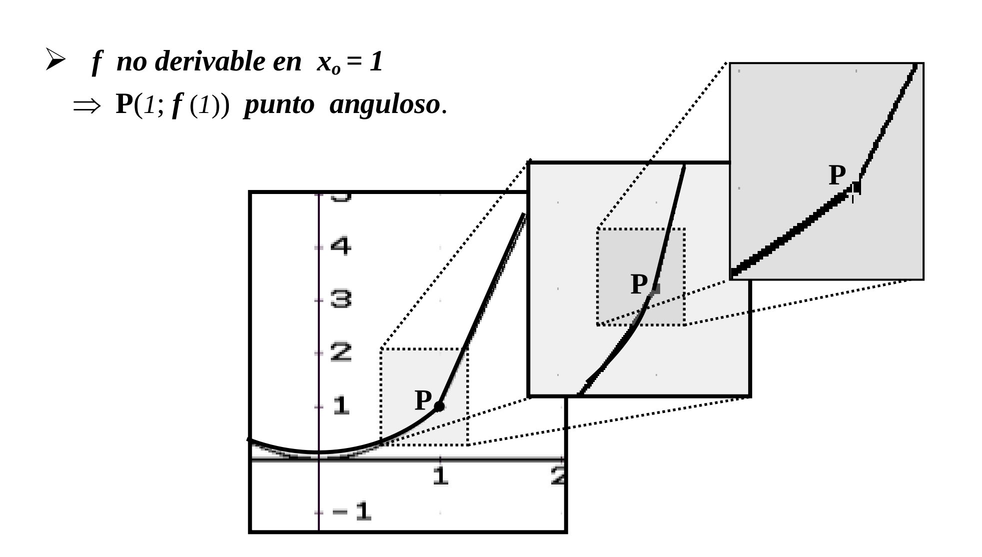
Entonces:

- Si **P** ***no es pto anguloso***, la curva en la pantalla se irá *´enderezando´* cada vez más; o sea, se irá asemejando cada vez más a una *´recta´*.
- Si **P** ***es pto anguloso***; el ángulo en **P** irá haciéndose cada vez más pronunciado y notorio, no quedarán dudas acerca del carácter de **P.**

➢ ***f derivable en*** $\boldsymbol{x_o = 1}$
$\Rightarrow$ ***C ´suave´ en el entorno de*** **P**(*1*; ***f*** (*1*))



➢ ***f no derivable en*** $\boldsymbol{x_o = 1}$
$\Rightarrow$ **P**(*1*; ***f*** (*1*)) ***punto anguloso***.



<u>Cálculo de derivadas según la forma en que este dada la función:</u>

1) ***forma gráfica*** ➔ se acude a la DERIVACIÓN GRÁFICA

2) ***tabla de valores*** ➔ se acude a los METODOS NUMÉRICOS (*en la práctica*)

3) ***forma explícita*** ($y = f(x)$) ➔ se acude a las reglas de derivación.

4) ***ecuaciones paramétricas***: (*en la práctica*)

$$C \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{si } y = \varphi(x) \text{ entonces:} \\ \varphi'(x) = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{con } t = f^{-1}(x) \end{array} \right]$$

<u>DERIVACIÓN GRÁFICA</u> :

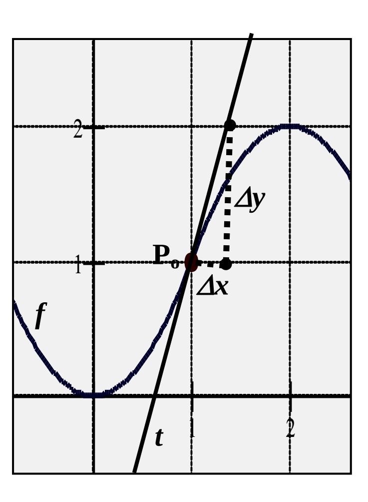
$$C = graf\ f \quad \rightarrow \quad f: \left(\begin{array}{l} D_f = \text{proy. sobre eje x} \\ Im\ f = \text{proy. sobre eje y} \\ Ley\ f: \quad y = f(x) \Leftrightarrow (x; y) \in C \end{array} \right)$$

C suave y continua → <u>***f*** continua y derivable en **D_f**</u> → $f'(x_0) =$ **?**

$f'(x_0) = m_t$ **;** luego obtenemos la derivada determinando m_t "***gráficamente***".

1) trazamos ***t*** ; recta tg a **C** en $P_o\ (x_o; y_o)$
2) en ***t*** , marcamos Δx y su correspondiente Δy
3) determinamos Δx y Δy , ***leyendo del gráfico***.
4) calculamos $m_t = \Delta y/\Delta x$ e informamos:

$f'(x_0) \cong \Delta y/\Delta x.$
↘ errores gráficos y de apreciación



<u>Ejemplo</u>: **P_o (1;1)**

$x_o = 1 \rightarrow \Delta x = 0.5 ; \quad \Delta y = y - y_o = 1$

$\rightarrow m_t = 1/ 0.5 = 2$

$\rightarrow f'(1) \cong 2$

3.7 La derivada como *razón de cambio*. Interpretación física de la derivada

El objetivo esencial de este capítulo fue hallar una forma significativa de ***cuantificar el cambio en y.*** Para ello, en un principio estudiamos la ***razón de cambio***, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- ***f lineal***, $f(x) = m\,x + h \;\Rightarrow\; \frac{\Delta y}{\Delta x} = m\,;\ \forall\, \Delta x \;\Rightarrow$ ***razón de cambio ´constante´.***

  Concluimos que, "***y varía a velocidad constante, e igual a m"*** ; en otras palabras que "***y cambia exactamente m unidades por cada cambio unitario en x*** " .

- ***f no lineal*** $\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq cte \Rightarrow$ ***y no varía a ´velocidad´ constante*** $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ el ***cambio en y*** , aún el relativo a ***x,*** depende del x_o y Δx considerados.

Procedimos entonces a buscar una herramienta que, para ***f*** no lineales, permitiera *estimar* en forma sistemática y simple el ***cambio relativo en y***, en un entorno de x_o **0 Df** . Concluimos que esta herramienta era la ***derivada*** de la función en x_o; o sea, $f\,'(x_o)$.

Definida y estudiada la derivada, resta aún verificar sí esta herramienta efectivamente brinda información significativa en cuanto al ***cambio relativo en y***. En lo que sigue nos ocupamos de resolver esta última cuestión.

- ***f lineal*** $\Rightarrow f(x) = m\,x + h \;\Rightarrow\; f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ ;\ \forall\, x\ ,\ \forall \Delta x.$

  Conclusión: en este caso $f'(x)$ indica el ***valor exacto*** del cambio en ***y*** en por cada cambio unitario en ***x :***

  "y cambia a razón de ´m´ unidades, por cada cambio unitario en x".

  O sea, indica la ***velocidad*** a la que se produce el cambio en cualquier intervalo o punto del Dom ***f.***

Ejemplo 1: Si $V = 2\,t + 1$, [***V***]= *ls*, [***t***]= *hs*, indica el volumen de agua en un tanque en cada instante ***t***, entonces $V\,'(t) = 2\ (= \Delta V/\Delta t)$ indica que el agua, en cualquier instante que se considere, está entrando al tanque a ***razón de 2 ls por hora*** . O, dicho de otra forma, entra a una ***velocidad*** (***cte***) de ***2 ls / h.***

Ejemplo 2: Si $m = 5\,t + 20$, [***m***]= *mg*, [***t***]= *seg*, indica la masa de soluto disuelta en un solvente al instante ***t***, entonces $m'(t) = 5\ (=\Delta m/\Delta t)$ indica que el soluto, en cualquier instante que se considere, se está disolviendo a ***razón de 5 mg por seg*** . Dicho de otra forma, a una ***velocidad*** (***cte***) de ***5 mg / seg***. (***v*** = *vel. de ´disolución´*)

Ejemplo 3: Si $x = 50\,t + 20$, [***x***]= *Km*, [***t***]= *hs.*, indica la posición al instante ***t*** de un móvil que se desplaza según un movimiento rectilíneo, entonces $x'(t) = 50\ (= \Delta m/\Delta t)$ indica que el móvil, en cualquier instante que se considere, se está moviendo a ***razón de 50 Km por hora*** . O sea, a una ***velocidad*** (***cte***) de ***50 Km / h*** .

Ejemplo 4: Si $T = -t + 39$, $[T] = {}^{\circ}C$, $[t] =$ *hs.*, indica la temperatura de un niño al instante t , entonces $T'(t) = -1$ ($= \Delta T/\Delta t$) indica que la temperatura está ***´bajando´*** a ***razón de 1ºC por hora*** . Dicho de otra forma, a una ***´rapidez´ constante*** de ***1ºC / h*** .

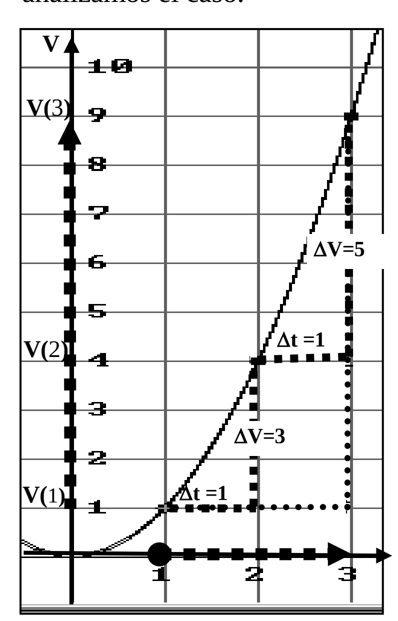
➢ ***f no lineal*** $\Rightarrow f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$ $\boxed{f'(x_o) \neq \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$

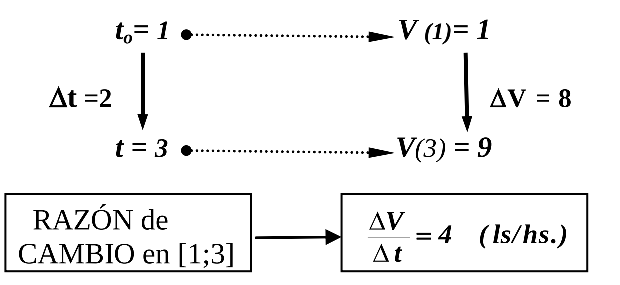
f no lineal $\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq$ ***cte,*** depende de x_o y Δx.

Nos preguntamos entonces; para x_o y Δx, ***fijos***, la ***razón de cambio***, *¿ qué nos informa es este caso ?.*

Ejemplo 5:

Si $V = t^2$ $[V] =$ *lts*, $[t] =$ *hs.*, indica el volumen de agua en un tanque en cada instante t, fácilmente vemos que $\Delta V/\Delta t \neq$ ***cte*** ; que la razón de cambio depende de t_o y Δt. Para t_o y Δt, fijos, la ***razón de cambio***, ¿qué nos dice acerca del proceso de llenado? Consideramos un t_o y un Δt, analizamos el caso.





RAZÓN de CAMBIO en [1;3] → $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4$ (ls/hs.)

En el [1;3], V , *¿aumenta a razón de **4 ls./h.** ?*

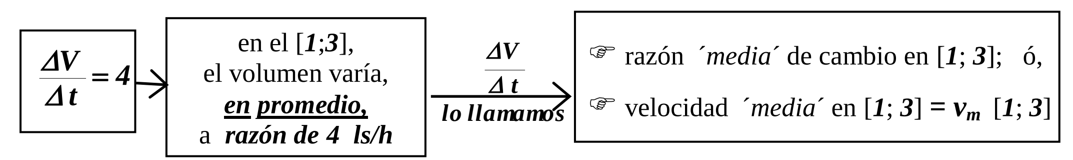
Analizamos lo que entra por hora al tanque en distintos *subintervalos* del [***1*** ; ***3***] y concluimos:

$[1;2] \xrightarrow{\Delta t = 1} \Delta V = 3 \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = 3\ (ls/h)$

$[2;3] \xrightarrow{\Delta t = 1} \Delta V = 5 \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = 5\ (ls/h)$

Conclusión: en el [***1*** ; ***3***] , ***V no aumenta*** a razón de ***4 ls/h*** .

A poco que observamos los valores hallados en los *subintervalos* analizados, vemos que ***4,*** la razón de cambio en [1;3], es el ***promedio*** de dichos valores: $\frac{3+5}{2} = 4$.



En general dada ***y = f(x)*** , x_o 0 ***D f ;*** definimos la ***razón media de cambio*** como el cociente incremental asociado a un **Δ*x*** dado.

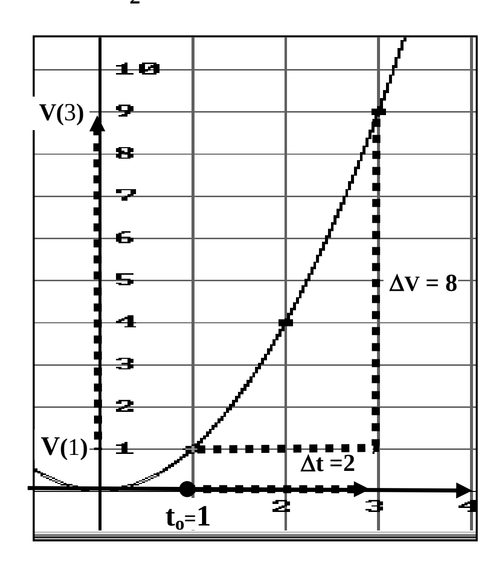
<u>Definición</u>: razón media de cambio ó velocidad media, en $[x_o;\ x_o+\Delta x]$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *lo llamamos* → ☞ ***razón ´media´ de cambio en*** $[x_o;\ x_o+\Delta x]$; ó,
☞ ***velocidad ´media´ en*** $[x_o;\ x_o+\Delta x] = v_m[x_o;\ x_o+\Delta x]$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ *signficaque* → en $[x_o;\ x_o+\Delta x]$,
y varía, <u>en promedio</u>, a razón de ´ k´ unidades por cada cambio unitario en x.

Para **Δx** cada vez más chicos (**Δx**≈0), es de suponer que el *´promedio´* se ajuste cada vez mejor a la variación de ***y*** en cada subintervalo del intervalo considerado. (o sea, que el *promedio* esté cada vez *más próximo* a los valores promediados).

En el ej. 5, en el [1;*3*] el agua entra al tanque a una ***razón promedio*** de ***4 ls/h***.; valor que difiere en ***1 unidad*** del correspondiente a los subintervalos [1; 2] y [2; 3]. Por otro lado, en el [1; *2*] el agua entra a una ***razón promedio*** de ***3 ls/h***.; valor que difiere en ***0.5 unidades*** de los correspondientes a los subintervalos [1;1.5] y [1.5;2] (respectivamente 2.5 y 3.5 ls/h.).
Vemos así que para **Δt** cada vez más chico, la *velocidad media* o *razón ´promedio´ de cambio* ($3=\frac{2.5+3.5}{2}$) está efectivamente cada vez más próxima de los valores promediados



Δt	*t* =1+Δt	ΔV=f(t)-f(1)	ΔV/Δt = v_m [*1*; *1*+Δt]
2	3	**8**	**4** = v_m [*1*; *3*]
1.5	2.5	**5.25**	**3.5** = v_m [*1*; *2.5*]
1	2	**3**	**3** = v_m [*1*; *2*]
0.5	1.5	**1.25**	**2.5** = v_m [*1*; *1.5*]
0.25	1.25	**0.56**	**2.24**= v_m [*1*; *1.25*]
0.1	1.1	**0.21**	**2.1** = v_m [*1*; *1.1*]
0.05	1.05		
			ΔV/ Δt → 2

Por otro lado, del cuadro observamos que las velocidades medias ***se acercan cada vez más a 2***; en otras palabras, que para **Δt ≅ 0** la v_m [*1*; *1*+Δt] sería *´casi´* **2**.

Concluimos finalmente que:

"en un intervalo [1; 1+**Δt**] de longitud *"infinitesimal"* (**Δt ≅ 0**), el agua estaría entrando al tanque *<u>aproximadamente</u>* a una *<u>razón promedio</u>* de ***2*** ls/h.; siendo este valor una *muy buena aproximación de lo que realmente pasa en el intervalo "infinitesimal"* .

En función de esta observación, a este valor ***límite de las velocidades medias*** lo llamamos ***<u>velocidad instantánea</u>*** *en* $t_o = 1$ y lo indicamos, $v(t_o)$.

En el ejemplo 5: $\boldsymbol{v\,(1) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m}\,[1;\ 1 + \Delta t]$

$$v\,(1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta t - \Delta t^2}{\Delta t} = 2$$

v (1) = 2 , indica que a la hora de iniciado el proceso, el agua está entrando al tanque, ***aproximadamente*** a razón de ***2 ls/h..***

Observación*:* el uso y costumbre ha llevado a que la palabra *´aproximadamente´* se la de por *´sobreentendida´*, se la omita por lo tanto al hablar de velocidad instantánea.

En general dada $y = f(x)$, $x_o \; 0 \; D f$; definimos la ***velocidad instantánea en*** x_o , que indicamos $V(x_o)$, como el límite para $\Delta x \to 0$ de las velocidades medias.

Definición*:* ***velocidad instantánea en*** x_o , $v(x_o)$ *(o razón media de cambio)*

$$V(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} V_m\,[x_o;\ x_o + \Delta x] \qquad \text{(si existe finito)}$$

Interpretación física:

$V(x_o) = k$, indica que en x_o ; ***y*** esta variando, ***aproximadamente****,* a razón de ***k*** unidades por cada cambio unitario en ***x*** .

Cálculo de la velocidad instantánea: $y = f(x)$, $x_o \; 0 \; Df$

$$V(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} V_m\,[x_o;\ x_o + \Delta x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o)$$

** Concluimos finalmente que ***la derivada*** es la herramienta que estábamos buscando ya que brinda información *significativa* del cambio en ***y*** en relación al cambio en ***x*** : permite hallar, ***aproximadamente y en un entorno de*** x_o , ***el cambio en y por cada cambio unitario en x .***

Ejemplo 6:

Si sabemos que la ecuación del movimiento de un cuerpo que cae del reposo es $\mathbf{y} = 16\,t^2$; [***t***]= seg , [**y**]= pies; *¿podemos entonces establecer a razón de cuantos pies/seg. estará cayendo este cuerpo a los **t** seg. de haber comenzado a caer ?.*

ⓘ En este caso, como el anterior, ***f*** *no es lineal*, la razón de cambio, *no es constante*. Luego, y en analogía al otro caso, para responder el interrogante planteado lo que podemos hacer es calcular la ***razón ´media´ de cambio*** en el intervalo [***t*** ; ***t*** + **Δt**], el límite de las mismas para **Δt** → 0.

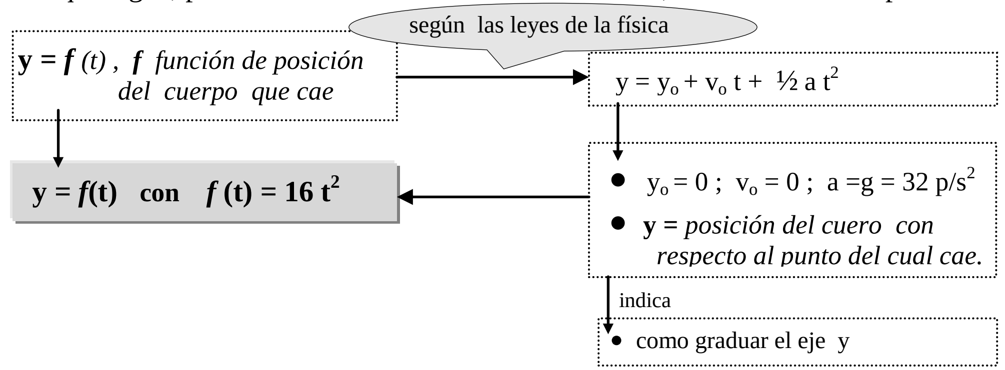
(Cabe aclarar que en el caso de la *función de posición* lo habitual es el uso de la expresión ***´velocidad media´*** antes que la de ***´razón media de cambio´***).

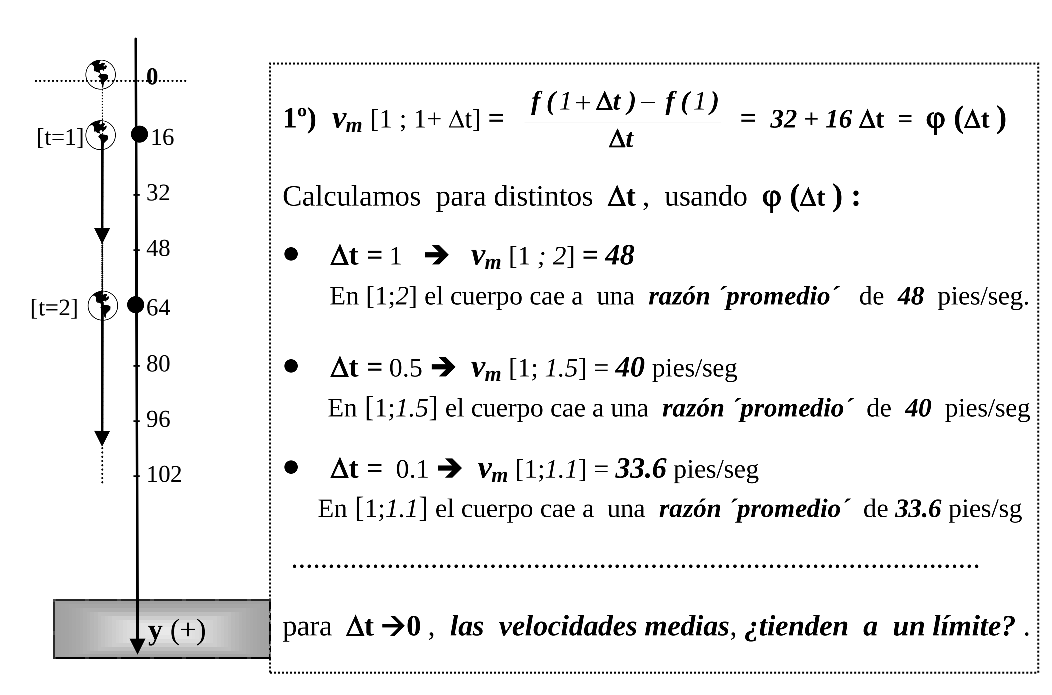
Así, y por ejemplo, para hallar cómo estaría cayendo el cuerpo luego de **1 seg**. (***t =1***) que comenzara a caer , podemos proceder a:

1º) calcular la ***´velocidad media´*** del cuerpo en el [***1***; ***1***+**Δt**]; o sea, a obtener la velocidad *´promedio´* con la que el cuerpo estaría cayendo en dicho intervalo. Hacer esto de la forma más conveniente al caso; o sea, buscando una ley que permita realizar el cálculo para distintos **Δt ,** en forma sistemática y organizada

2º) calcular $\lim_{\Delta t \to 0} v_m [1 ; 1+\Delta t]$ y concluir.

En lo que sigue, previo un reconocimiento de la función, concretamos este proceso.





1º) $v_m [1 ; 1+\Delta t] = \dfrac{f(1+\Delta t) - f(1)}{\Delta t} = 32 + 16\,\Delta t = \varphi(\Delta t)$

Calculamos para distintos Δt, usando $\varphi(\Delta t)$:

- $\Delta t = 1$ ➔ $v_m [1 ; 2] = 48$
  En [1;2] el cuerpo cae a una ***razón ´promedio´*** de ***48*** pies/seg.
- $\Delta t = 0.5$ ➔ $v_m [1; 1.5] = 40$ pies/seg
  En [1;1.5] el cuerpo cae a una ***razón ´promedio´*** de ***40*** pies/seg
- $\Delta t = 0.1$ ➔ $v_m [1;1.1] = 33.6$ pies/seg
  En [1;1.1] el cuerpo cae a una ***razón ´promedio´*** de ***33.6*** pies/sg

....

para $\Delta t \to 0$, ***las velocidades medias, ¿tienden a un límite?*** .

2º) $\lim_{\Delta t \to 0} v_m [1 ; 1+\Delta t] = \lim_{\Delta t \to 0} 32 + 16\,\Delta t = 32$

Podemos decir entonces que la *velocidad media* se acerca tanto como quiera a **32** pies/seg.; o sea, que en el caso de un intervalo [1;1+Δt] de longitud *"infinitesimal"* ($\Delta t \cong 0$), ***32*** pies/seg. es una muy buena aproximación de lo que ***"cae" el cuerpo por segundo.***

Concluimos así que: "***a 1 seg. de haber comenzado a caer, el cuerpo está cayendo ´aproximadamente´ a razón de 32 pies por segundo*** ".

Equivalentemente: "***que la velocidad ´instantánea´ en $t_o = 1$ es de 32 pies/seg*** **"** .

Nota: por uso y costumbre omitimos el *´aproximadamente´*, decimos que en $t_o = 1$ el cuerpo cae a razón de **32** pies/seg. También es común omitir el término *´instantánea´* , decir que a 1seg. de comenzar a caer la velocidad del cuerpo es de **32** pies/seg .

Observaciones

1) La resolución de los problemas 2 y 3 termina pasando por el cálculo de un *límite*; el del cociente incremental de la función para el incremento de la v. i → 0. Este límite es el mismo con el que definimos derivada de una función en un punto.

Así, para $y = f(x)$ y x_o un punto del Dom. f , tenemos que:

Razón ´instantánea´ de cambio (x_o) $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o)$

velocidad ´instantánea´ $(x_o) = v_i\,(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o)$

2) Si en el ejemplo 3 nos preguntaran a que velocidad está cayendo el cuerpo a los ***2 segs***., un simple cálculo, el de $f'(2)$, basta para contestar esta pregunta:

$$v_i\,(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(2) = 64$$

Es decir, si $f(t) = 16\,t^2$ es la función de posición de un cuerpo en caída libre, entonces $f'(2)$ informa sobre la velocidad instantánea del cuerpo a los ***2 segs***.; o sea., en este caso, informa que a los 2 segs.,

* la ***velocidad instantánea*** del cuerpo es de ***64*** *pies/seg.*
* el cuerpo cae *aproximadamente* ***64*** pies, en un seg.

3) Dada $y = f(x)$, independientemente de cual sea el carácter de las variables,

$f'(x_o)$ informa sobre la ***´variación instantánea de y´***; o sea,
*la razón a la que aproximadamente está variando **y**, en un entorno de x_o.;*
o sea;
*cuanto varía aproximadamente **y**, por cada cambio unitario en **x**, a partir de* x_o.

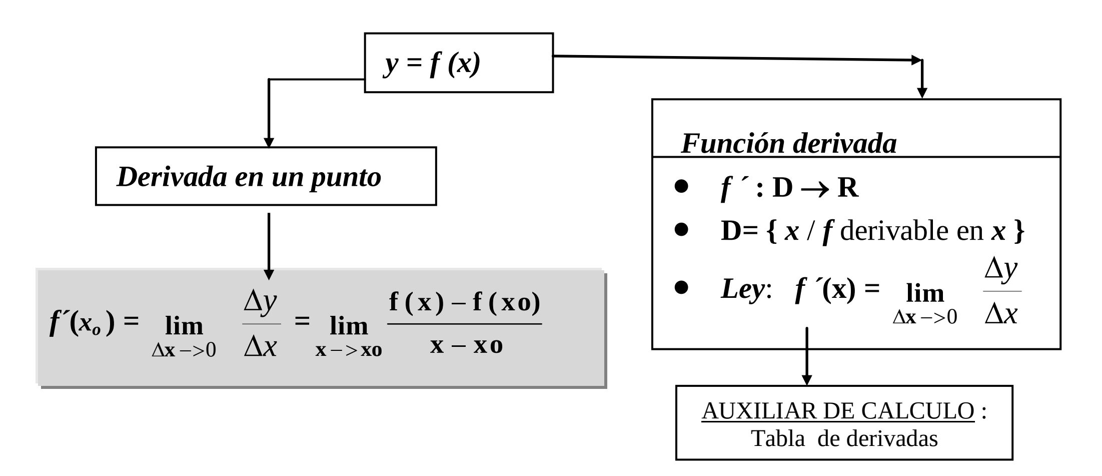
ⓘ Con este resultado queda con firmada la validez de los supuestos en los que nos apoyamos para desarrollar los temas de este capítulo.

4) Los siguientes términos son de uso habitual:

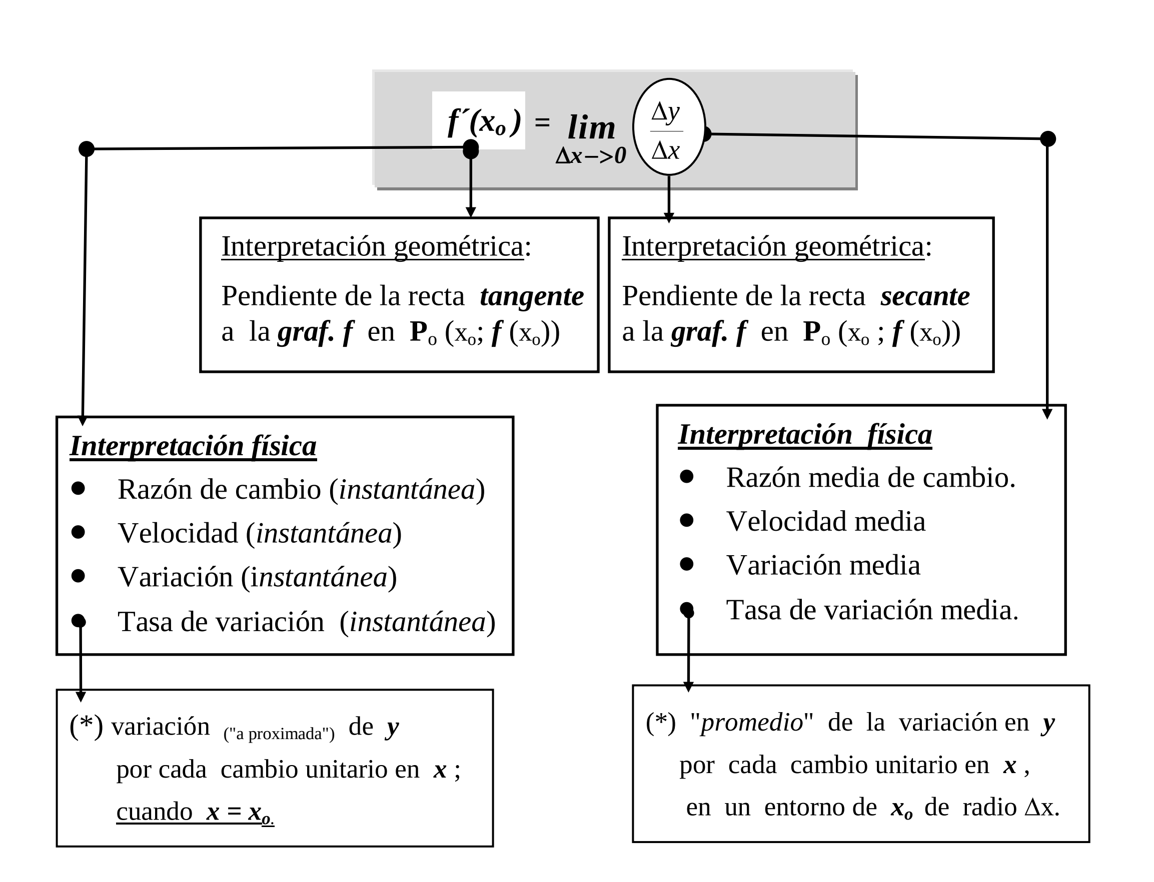
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_o}{x - x_o}$ ⟶ ⟶
  - ***velocidad media***
  - ***razón media de cambio***
  - ***tasa de variación media***
  - ***variación media***

- $f'(x_o) = \frac{dy}{dx}(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ⟶
  - ***velocidad (instantánea)***
  - ***razón de cambio (inst.)***
  - ***tasa de variación (inst.)***
  - ***variación instantánea***

RESUMEN:



y = f (x)
Derivada en un punto
$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to xo} \frac{f(x) - f(xo)}{x - xo}$
Función derivada
• $f': D \to R$
• D= { x / f derivable en x }
• Ley: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
AUXILIAR DE CALCULO :
Tabla de derivadas



$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Interpretación geométrica:
Pendiente de la recta tangente a la graf. f en P_o (x_o; f (x_o))
Interpretación geométrica:
Pendiente de la recta secante a la graf. f en P_o (x_o ; f (x_o))
Interpretación física
• Razón de cambio (instantánea)
• Velocidad (instantánea)
• Variación (instantánea)
• Tasa de variación (instantánea)
Interpretación física
• Razón media de cambio.
• Velocidad media
• Variación media
• Tasa de variación media.
(*) variación ("a proximada") de y por cada cambio unitario en x ; cuando $x = x_o$.
(*) "promedio" de la variación en y por cada cambio unitario en x , en un entorno de x_o de radio Δx.

3.8 Apéndice

Cálculo de derivadas por definición:

En lo que sigue calculamos la derivada ´*por definición*´ de algunas de las funciones elementales (usamos la definición que más convenga al cálculo, según el caso):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

- ***Derivada de la constante***: $f(x) = k \rightarrow f'(x) = \mathbf{0}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

- ***Derivada de la raíz cuadrada***: $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \overset{(\times,\div,\text{por el conjugado})}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- ***Derivada del ´seno´***: $f(x) = \text{sen } x \rightarrow f'(x) = \cos x$

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(x_o)}{x - x_o} \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{2\,\text{sen}(\frac{x-x_o}{2}).\cos(\frac{x+x_o}{2})}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left[\frac{\text{sen}(\frac{x-x_o}{2})}{\frac{x-x_o}{2}} \right] \cdot \lim_{x\to x_o} \left[\cos(\frac{x+x_o}{2}) \right] = 1 \,.\, \cos x_o = \cos x_o$$

$(*)$ usamos la siguiente identidad trigonométrica, con $a = x$ y $b = x_o$:

$$\text{sen } a - \text{sen } b = 2 \cdot \text{sen}(\frac{a-b}{2}) \cdot \cos(\frac{a+b}{2})$$

- ***Derivada del ´logaritmo natural´´***: $f(x) = \ln x \;\rightarrow\; f'(x) = 1/x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \overset{(prop.log.)}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \overset{prop.log.}{=} \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} =$$

$$= \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\right] \overset{(**)}{=} \ln\; e^{1/x} = \frac{1}{x}$$

El cálculo de la derivada del logaritmo requiere considerar los siguientes resultados:

» $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ (con ∞ indicamos $\pm\infty$)

» $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

$f(x) = \frac{k}{x} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{k/x} = e$;

Este último resultado permite resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)^{k/x}\right]^{1/k} = e^{1/k}$$

Resultado que aplicamos en $(**)$ haciendo $x = h$ (*variable*) y $k = x$ (*cte*)

$$\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} = e^{1/x}$$

TEOREMAS: *Reglas de Derivación*

TEOREMA 2 (derivada de la suma o resta)

Si f y g son derivables en x , entonces f $\pm$g es derivable en x , y vale:

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Demostración: (demostramos para la suma ´f+g´ ; para la resta es igual.)

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)_{(x+h)} - (f+g)_{(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+ g(x+h)) - (f(x)+ g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x) \quad \text{(q.e.d.)}$$

Por hip, f y g son derivables en x. Luego existe el límite de cada sumando, se puede aplicar el Teorema del límite la suma.

TEOREMA 3 (derivada del producto)

Si f y g son derivables en x , entonces f .g es derivable en x , y vale :

$$(f\,.\,g)'(x) = f'(x).\,g(x) + f(x).\,g'(x)\,.$$

Demostración: x_o punto genérico, donde f y g son derivables.

$$(f\,.g)'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f.g(x) - f.g(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{f_{(x)}.g(x) - f(x_o).g_{(x_o)}}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{f_{(x)}.g(x) - [f(x_o).g(x) - f(x_o).g(x)] - f(x_o).g_{(x_o)}}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{[f(x) - f(x_o)].\,g(x) + f(x_o).[g(x) - g(x_o)]}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.\,g(x) + f(x_o).\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \right] \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \quad f'(x_o)\,.\,g(x_o) \;+\; f(x_o).\;g'(x_o)\,. \qquad \text{(q.e.d.)}$$

(*) f derivable en x_o $\Rightarrow \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$

g derivable en x_o $\Rightarrow \lim_{x\to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} = g'(x_o)$

g derivable en x_o $\Rightarrow$ g continua en x_o $\Rightarrow \lim_{x\to x_o} g(x) = g(x_o)$

COROLARIO TEOREMA 3 : $(\boldsymbol{k}\,\mathbf{f})'(x) = \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{f}'(x)$

» $(\boldsymbol{k}\,\mathbf{f})'(x) \underset{T.3}{=} (\boldsymbol{k})' \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + \boldsymbol{k} \cdot f'(x) = \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})$

TEOREMA 4 (derivada del cociente)

Si f y g son derivables en x y $g(x) \neq 0$, entonces f/g es derivable en x , y vale:

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Demostración: la demostración la dividimos en dos partes:

a) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-[g(x+h) - g(x)]}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

b) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \underset{T.3}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$\underset{(a)}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

(q.e.d.)

TEOREMA 5 (derivada de la composición o *´regla de la cadena´*)

Si f es derivable en g(x); g es derivable en x , y $h = f \circ g$ es la función compuesta, entonces h es derivable en x, y vale:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ó $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la demostración usamos las siguientes notaciones:

» $z = f(y)$
» $y = g(x)$
$\Big\}$ $z = f(g(x)) = f \circ g\,(x) \Rightarrow z = h(x)$

» $f'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}$; $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; $h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$

Demostración:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \overset{(\Delta y\neq 0)}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{(*)}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot g'(x) \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot g'(x) \overset{(*)}{=} f'(y)\cdot g'(x) = \mathbf{f\,'(g(x))\,.\,g'(x)}$$

(q.e.d.)

(*) justificación de las igualdades:

- g derivable en x $\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x)$
- $g(x) = \boldsymbol{k}\ ,\ \forall x \Rightarrow h(x) = \boldsymbol{cte}\ ,\ \forall x \Rightarrow h'(x) = 0 = f'(g(x))\,.\,g'(x)$
- $g(x) \neq \boldsymbol{k} \Rightarrow \Delta y = g(x+\Delta x) - g(x) \neq 0$

  $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} [\, g(x+\Delta x) - g(x)\,] = 0$; [g derivable en x $\Rightarrow$ g cont. en x].

  Luego; $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$

TEOREMA 6 (derivada de ***g*** , inversa de ***f***)

Sea ***f*** biyectiva en su dominio, ***f*** derivable en ***y*** con $f'(y) \neq 0$;
entonces si ***g*** es la inversa de ***f*** definida por: $g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$;
g es derivable en ***x*** , y la derivada es:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Demostración:

Si ***g*** es la inversa de ***f*** , tenemos que $f \circ g = id$, con $id(x) = x$.
Luego, derivando miembro a miembro, tenemos que:

- $f \circ g\,(x) = id\,(x)$
- $(f \circ g)'\,(x) = (x)'$
- $f'(g(x))\,.\,g'(x) = 1$
- $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

(q.e.d.)

TABLA DE DERIVADAS

1) $\mathbf{f}(x) = k \text{ (cte)} \xrightarrow{\textit{calculando por definición}} \mathbf{f'}(x) = 0$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = R$

2) $\mathbf{f}(x) = x \xrightarrow{\textit{calculando por definición}} \mathbf{f'}(x) = 1$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = R$

3) $\mathbf{f}(x) = x^{\alpha}\ ;\ \alpha \in R \xrightarrow{\textit{regla de la potencia}} \mathbf{f'}(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

4) $\mathbf{f}(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\textit{regla de la potencia}} \mathbf{f'}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = \mathbf{R}^{+}$

6) $\mathbf{f}(x) = \ln x \xrightarrow{\textit{calculando por definición}} \mathbf{f'}(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = \mathbf{R}^{+}$

7) $\mathbf{f}(x) = \log x \xrightarrow{\textit{corolario teorema } 3} \mathbf{f'}(x) = \dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{1}{x}$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = \mathbf{R}^{+}$

8) $\mathbf{f}(x) = e^{x} \xrightarrow{\textit{teorema } 6} \mathbf{f'}(x) = e^{x}$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = R$

9) $\mathbf{f}(x) = a^{x}\ (a > 0) \xrightarrow[\text{corolario teorema } 3]{a^{x} = e^{x.\ln a}} \mathbf{f'}(x) = a^{x} . \ln a$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = R$

10) $\mathbf{f}(x) = \text{sen } x \xrightarrow{\textit{calculando por definición}} \mathbf{f'}(x) = \cos x$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = R$

11) $\mathbf{f}(x) = \cos x \xrightarrow[\text{teorema } 5]{\cos x = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})} \mathbf{f'}(x) = -\text{ sen } x$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = R$

12) $f(x) = \text{tg } x \xrightarrow{\textit{teorema } 4} \mathbf{f'}(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = D_f$

13) $f(x) = \text{arc sen } x \xrightarrow{\text{teorema } 6} \mathbf{f'}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = (-1;1)$

14) $f(x) = \text{arc cos } x \xrightarrow{\text{teorema } 6} \mathbf{f'}(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = (-1;1)$

15) $f(x) = \text{arc tg } x \xrightarrow{\text{teorema } 6} \mathbf{f'}(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $\quad \mathbf{D_{f'}} = R$

3.9 Ejercicios

1. Realizar las actividades que se proponen a continuación al efecto de estudiar el *comportamiento tendencial* para **$\Delta x \to 0$** del cociente de incrementos **$\Delta y/\Delta x$.**
En las actividades propuestas: $f(x) = x^3$; $x_0 = 1$; $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$

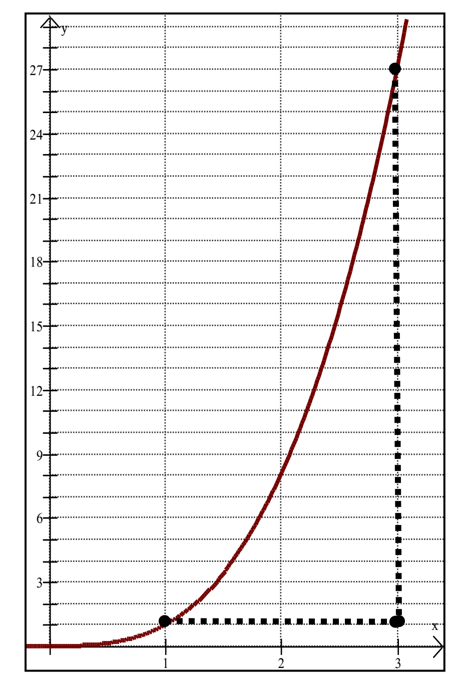
a) Indicar V ó F , justificar la repuesta:

i) "$\Delta y = \varphi(\Delta x)$ con $\varphi(\Delta x) = 3\,\Delta x + 3\,\Delta x^2 + \Delta x^3$ ";

ii) "Δy es un infinitésimos para $\Delta x \to 0$ ";

b) graficar el **Δy** correspondiente a **Δx** = 1.5, 1, 0.5. Estimar el valor de **$\Delta y / \Delta x$**. Completar la tabla y formular una *conjetura* acerca del comportamiento *tendencial* del *cociente incremental*. Validar o refutar dicha conjetura.

c) Indicar V o F ; justificar la respuesta: ***"f´(1) = 3 "***



Δx	$x = x_0 + \Delta x$	$[x_0;\ x]$	**$\Delta y = f(x) - f(x_0)$**	**$\Delta y / \Delta x$**
Δx	**$x = 1 + \Delta x$**	$[1;\ x]$	**$\Delta y = f(x) - f(1)$**	**$\Delta y / \Delta x$**
2	3	[1; 3]	**$f(3) - f(1) = 26$**	**13**
1.5				
1	2	[1; 2]	**$f(2) - f(1) =$**	**7**
0.5		[1; 1.5]		**4.75**
0.25				
0.1				
0.05	1.05		**0.157**	
0.01				

$\Delta y / \Delta x \to$ ....

2. Calcular *por definición* la derivada de las siguientes funciones en los puntos dados. Acudir para ello al cociente incremental más conveniente al caso:

a) $f(x) = 7\,x^2$; $x_0 = 2$; $x_0 = a$

b) $f(x) = x^2 + 3$; $x_0 = 1$; $x_0 = a$

c) $f(x) = (x-3)^2$; $x_0 = 2$; $x_0 = a$

d) $f(x) = mx+h$; $x_0 = 2$; $x_0 = \pi$

e) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$; $x_0 = a$

f) $f(x) = 1/x^2$; $x_0 = 2$; $x_0 = a$

g) $f(x) = (x+1)/(x-1)$; $x_0 = 0$

3. En lo que sigue, el límite presentado corresponde al cociente incremental de una función ***f*** en un punto x_0. Se pide identificar quienes son ***f*** y x_0 en cada caso.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{(\cos\ x)+1}{x-\pi}$

c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^x-9}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

f) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(2+\Delta x)^3-8}{\Delta x}$

g) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}$

h) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\cos\ \Delta x)-1}{\Delta x}$

4. "*La derivada de una función par es impar*". Demostrar que el enunciado es verdadero completando para ello la argumentación que sigue a continuación:

$$\mathbf{F'(-a)} = \lim_{x\to \ldots\ldots}\frac{F(x)-F(-a)}{x-\ldots\ldots} \underset{t=-x}{=} \lim_{t\to \ldots\ldots}\frac{F(-t)-F(-a)}{-t+a} =$$

$$\underset{F\ par}{=} \lim_{t\to a}\frac{F(\ldots\ldots)-F(\ldots\ldots)}{-t+a} = \lim_{t\to a}\frac{F(t)-F(a)}{-(\ldots-a)} = -\,[\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ] = -\,\mathbf{F'(a)}$$

5. Calcular la función derivada de las funciones que se indican a continuación:

a) $f(x)=x^4+3x^2+\text{sen}x$

b) $f(x)=3x.\text{sen}\,x+\ln 10$

c) $f(x)=\dfrac{2.x^2+x+7}{\text{sen}\,x}$

d) $f(x)=\dfrac{m.x^2+n.x+k}{k.\text{sen}\,x}$

e) $f(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{x^2}{5}$

f) $f(x)=4\sqrt{x}+\sqrt{x^3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

g) $f(x)=\text{arctg}\,x-\text{tg}\,x$

h) $f(x)=e^x+e^3+x^3+3^x$

i) $f(x)=\cos x.\,e^x+5.x^2.\ln x$

j) $f(x)=\text{sen}\,x.\sqrt{x}.\ln x$

k) $f(x)=\dfrac{2.x}{\sqrt{x}}+2^x$

l) $f(x)=e^x.(\ln x+\cos t)$

m) $f(t)=e^t.(\ln t+\cos x)$

n) $f(x)=\dfrac{2.x^3+5}{\text{sen}\,x}+\dfrac{\text{sen}\,x}{x^3}$

o) $f(x)=\dfrac{(2.x^3+5).\cos x}{5}$

p) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x+\text{sen}\,x}$

q) $f(x)=\dfrac{x.\text{sen}\,x}{1+x^2}$

r) $f(x)=\dfrac{e^3+x^6.\ln x}{3-x+\cos x}$

s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{t} + t.\text{sen}\, t}{3.t^2 + 4} + \ln x$

u) $f(\boldsymbol{V}) = \dfrac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{a}}}$

t) $f(t) = \dfrac{\sqrt{t} + t.\text{sen}\, t}{3.t^2 + 4} + \ln x$

6. Calcular las derivadas de:

a) $f(x) = \text{sen}^4 x$

b) $f(x) = \ln(\text{sen} x)$

c) $f(x) = \cos^2 x + \cos(2x)$

d) $f(x) = \ln(4x) + \text{sen}(\sqrt{x})$

e) $f(x) = e^{2x} + e^{-x} + e^{x^2}$

f) $f(x) = \text{sen}^2 x + (\text{sen}\, x)^3 + \text{sen}\, x^3$

g) $f(x) = \text{arctg}(3x) + \log x$

h) $f(x) = \ln(\frac{x}{3}) + \ln(\frac{3}{x}) + \dfrac{\ln 3}{\ln(3x)}$

i) $f(x) = (\text{sen}(3x))^{1/2} + 3.\text{sen}^2(3x)$

j) $f(x) = \sqrt{\ln x} + \ln \sqrt{x}$

k) $f(x) = \ln(x + x^4) + \sqrt{\text{sen}(x^3)}$

l) $f(x) = \ln(\text{sen}(x + \sqrt{x^3}))$

m) $f(x) = \ln\left(\dfrac{4x - 16x^2}{2 - 5x}\right)$

n) $f(x) = \left[\text{sen}(\frac{x}{2}) + \ln(2x)\right]^2$

o) $f(x) = \left[\cos(\text{tg}(2x))\right]^{-4/5}$

p) $f(x) = e^{\ln 3x} + \ln(e^{3x}) + e^{3 \ln x}$

7. **a)** Justificar que $\log x = 0.4342 \cdot \ln x$ y $(\log x)' = 0.4342 / x$.

b) Justificar que $\forall\, a > 0$, $a^x = e^{x.\ln a}$ y $(a^x)' = a^x . \ln a$

c) Verificar, <u>*aplicando regla de la cadena*</u> , propiedades y/o teoremas, que si **g** es la inversa de ***f*** y ***f´*** no se anula en su dominio, entonces:

$(\boldsymbol{f} \circ \mathbf{g})'(x) = \mathbf{1} \quad \forall\, x$ donde $\boldsymbol{f} \circ \mathbf{g}$ exista y sea derivable.

d) Verificar, <u>*aplicando regla de la cadena*</u> , propiedades y/o teoremas

que $(\boldsymbol{arctg} \circ \mathbf{tg})'(x) = \mathbf{1} \quad \forall x \in D_{(\boldsymbol{f} \circ \mathbf{g})'}$.

8. Calcular (si existe) $f'(a)$ para cada una de las funciones a continuación:

a) $f(x) = 3x + 2$; $a = 7$

b) $f(x) = \text{arctg}\, x^5$; $a = 1$

c) $f(x) = e^{5x} + e^5$; $a = 0$, $a = 1$, $a = \ln \lambda^2$

d) $f(x) = \text{sen}^3 x + \cos (x - \frac{\pi}{2})^3 + 3 \text{ sen } x$; $a = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$, $a = 1$

e) $f(x) = 2. \ln \sqrt{x}$; $a = 1$, $a = 10^{-2}$

f) $f(x) = 2. \sqrt{\ln x}$; $a = e^4$, $a = e^{-4}$, $a = 1$

f) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$; $a = -8$, $a = 8$, $a = 0$, $a = 10$, $a = 11$

f) $f(x) = \ln(100 - x^2)$; $a = -8$, $a = 8$, $a = 0$, $a = 10$, $a = 11$

☞Indicar V ó F, justificar: i) $\leftrightarrow$ $a \in Df \Rightarrow a \in Df'$ ≈ .

ii) $\leftrightarrow$ $f'(a) =$ ***nro real*** $\Rightarrow a \in Df$ ≈ .

iii) $\leftrightarrow$ $Df' \subseteq Df$ ≈ .

9. Dada f se pide realizar la actividad indicada en cada caso:

a) $f(x) = \text{sen}^2(x) + 1$; calcular $f''(0)$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; calcular $f''(2)$

c) $f(x) = \sec x + x^3 - 2x + \ln 5$; calcular $f''(x)$

d) $f(x) = \ln x . \text{sen} x$; calcular $f''(x)$

e) $f(x) = 2.x \ e^{4x}$; hallar "a" / $f'''(a) = 0$

f) $f(x) = x^3 + x + 7$; calcular $f'(x); f''(x); f'''(x); f^{(4)}(x); f^{(20)}(x)$

g) $f(x) = x^7$; calcular $f'(1); f''(1); \ldots\ldots\ldots. f^{(6)}(1); f^{(7)}(1); f^{(8)}(1)$

g) $f(x) = e^{2x}$; calcular $f'(x); f''(x); f'''(x); f^{(4)}(x)$

10. Analizar la validez de las siguientes fórmulas para la *derivada enésima* de las funciones que se indican a continuación. (**n !** = 1.2.3......n ; *factorial de n*)

Sugerencia: en cada caso, obtener las derivadas sucesivas correspondientes a n = 1, 2, 3, ... ; registrar las mismas en forma apropiadamente organizada. Buscar un "*patrón*", inducir de ello la fórmula correspondiente a "n" genérico.

a) $f(x) = e^{k x}$ → $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$

b) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ → $f^{(n)}(x) = n!.a_n$

c) $f(x) = \text{sen } x$ → $f^{(n)}(x) = \text{sen}(x + n\frac{\pi}{2})$

Sugerencia: escribir las derivadas sucesivas como ***corrimientos*** de ***sen x***

11. a) Indicar **V ó F**. Justificar la respuesta.

"Si $y(x) = e^{-3x}$ entonces y satisface la ecuación: $y'' + y' - 6y = 0$ "

b) Dada $y(x) = \mathbf{A}.\,\textit{sen}(2x)$,
determinar **A** de modo que $y'' + 3y = 3.\textit{sen}(2x)$. Verificar

c) Dada $y(x) = e^{rx}$, determinar si existe $r \in R$ para el cual la exponencial satisface la ecuación:

i) $y'' + y' - 6y = 0$ [verificar]

ii) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ [verificar]

iii) $y'' + \pi y' + \pi^2 y = 0$ [verificar]

iv) $y'' + \pi y' = 0$ [verificar]

v) $y'' + \pi^2 y = 0$ [verificar]

12. ***Derivada de funciones del tipo $f(x) = a(x)^{b(x)}$.***

Para obtener la derivada de este tipo de funciones es necesario escribir f de modo que queden "a la vista" las funciones que "la componen". Para ello:

1º) acudimos a la exponencial, a su inversa (logaritmo), a propiedades de las funciones.

$$\mathbf{a}^{\mathbf{b}} = \mathbf{e}^{\ln(\mathbf{a}^{\mathbf{b}})} = \mathbf{e}^{\mathbf{b}.\ln \mathbf{a}} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{b}(\mathbf{x}).\ln \mathbf{a}(\mathbf{x})}$$

2º) Derivamos $f(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{b}(\mathbf{x}).\ln \mathbf{a}(\mathbf{x})}$, aplicando regla de la cadena.

Aplicando en proceso indicado hallar las derivadas de:

a) $f(x) = x^x$

b) $f(x) = (\text{sen } x)^x$

c) $f(x) = (\cos x)^{\text{sen} x} + 4x$

d) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

e) $f(x) = (\ln x)^{\ln x} .\ \text{sen } x$

f) $f(x) = x^{x^x}$

13. Conociendo para **f** y **g** los datos que se dan en la tabla adjunta, se pide calcular (si fuera posible) las derivadas que se indican a continuación:

x	3	6	10
f (x)	9	3	1
f´(x)	2	7	10
g (x)	6	0	0
g´(x)	10	2	6

a) **(f+g)**’ (3) ; **(f.g)**’ (3) ; **(f/g)**’ (3) ; **(g/f)**’ (3)

b) **(1/f**)’ (6) ; **(1/g)**’ (6) ; **(f** ^{2})’ (6) ; **(f/(f-g))**’ (6)

c) **h**’(3) si **h**(x) = e^x . **f**(x)

d) **h**’(3) si **h**(x) = f(x)/x

e) **(f$_o$g)**’ (3) ; **(g$_o$f)**’ (3) ; **(f$_o$f)**’ (3) ; **(g$_o$g)**’(3)

f) **(f$_o$g)**’ (6) ; **(g$_o$f)**’ (6) ; **(f$_o$f)**’ (6) ; **(g$_o$g)**‘(6)

14. Hallar la *función derivada* de las funciones indicadas a continuación.

* Analizar relación entre dominio de f y dominio de f´**.**

* Graficar f y f´**.** Inspeccionar los gráficos y en el caso que f *no sea derivable* En x_o analizar el comportamiento de la ***función*** “***en*** x_o”, indicar si presenta algún comportamiento característico (o más de uno).

a) f(x) = ln x b) f(x) = ln | x | c) f(x) = $\sqrt{x}$

d) f(x) = $x^{2/3}$ e) f(x) = |x|.x f) f(x) = |x| .(x-1)

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & , x \le 0 \\ x^2 - 4x & , x > 0 \end{cases}$ h) $f(x) = \begin{cases} \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} & , \mathbf{x} \ge 1 \\ -1 , & \mathbf{x} < 1 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} & , \mathbf{x} \ge 1 \\ 1 , & \mathbf{x} < 1 \end{cases}$ j) $f(x) = \begin{cases} 2\mathbf{x} + 4 & , \mathbf{x} \ge 0 \\ 2\mathbf{x} - 4 & , \mathbf{x} < 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \mathbf{x} \le 0 \\ \cos \mathbf{x} & , \mathbf{x} > 0 \end{cases}$ l) $f(x) = \begin{cases} -x & , x \le 0 \\ \text{sen } x & , x > 0 \end{cases}$

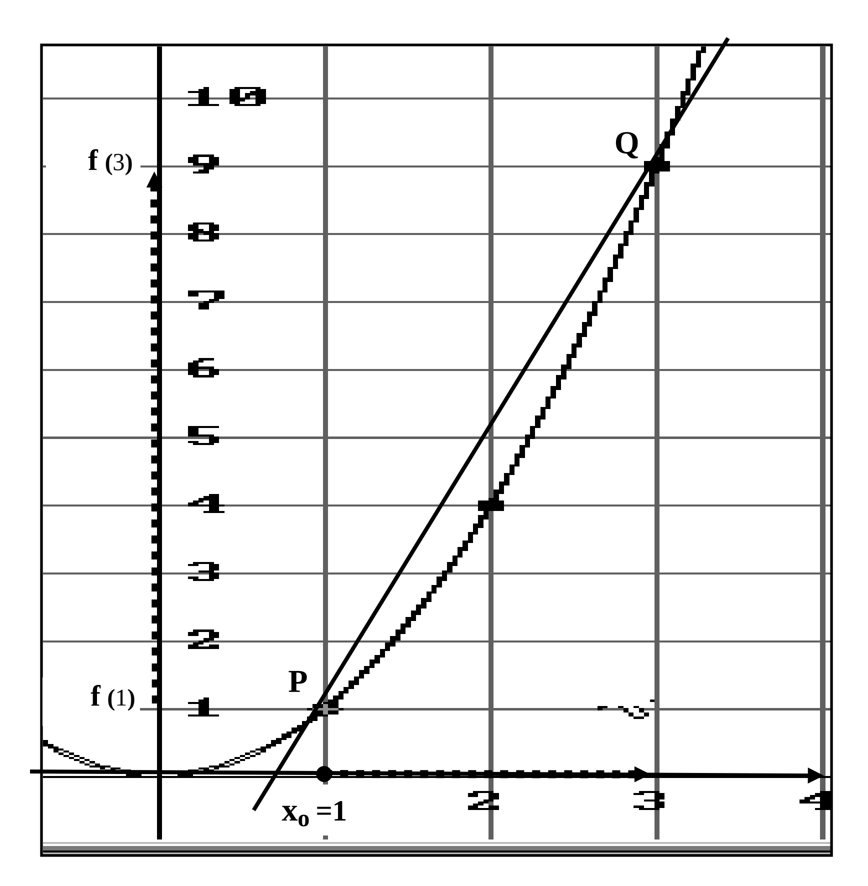
* ***<u>La derivada como pendiente de la recta tangente</u>***

15. Dada $f(x) = x^2$, **C =** ***graf f*** y ***s*** la recta secante a **C** que pasa por el punto fijo **P**(1; f(1)) y el punto variable **Q**(1+**Δx**; f(1+**Δx**)), se pide estudiar el *comportamiento tendencial* de las rectas secantes cuando **Δx** → 0.

a) Graficar las rectas secantes correspondientes a **Δx** = 2 ; 1.5 ; 1 ; 0.5. Hallar las ***pendientes*** de dichas secantes.

b) Graficar la recta tangente a **C** en **P.** Estimar gráficamente su pendiente.

c) * Las *secantes*, ¿se acercan a la recta tangente graficada?
* Las *pendientes de las secantes*, ¿se acercan a la pendiente de la tangente?



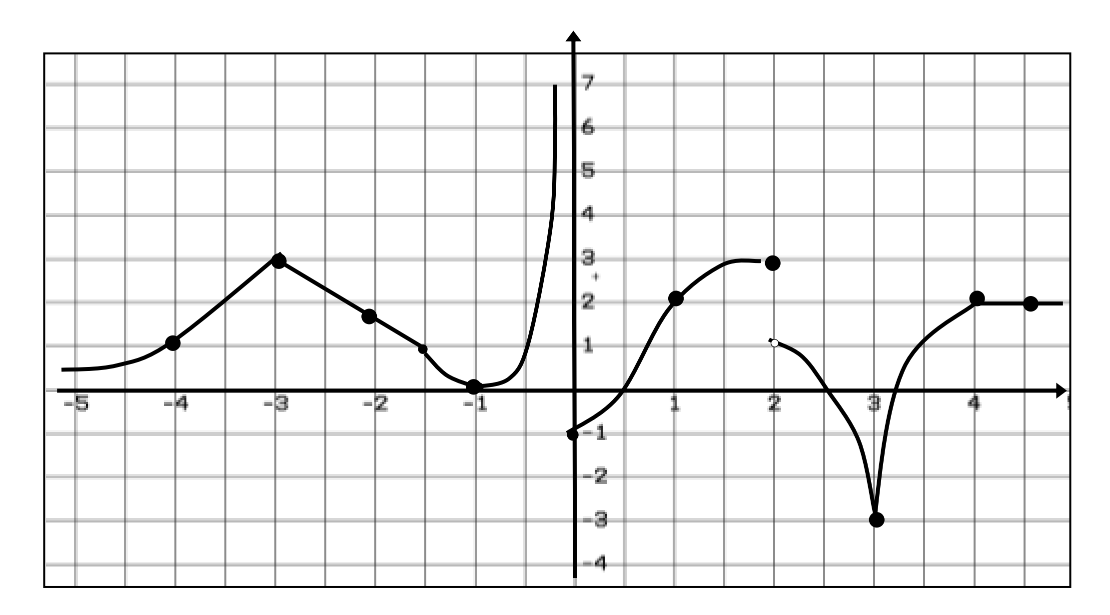
16. Dada f por el gráfico que se indica a continuación del texto; se pide:

a) Identificar los *x´s* para los cuales f no es derivable. Justificar la respuesta.

b) *graficar* (si existe) la recta tangente al ***graf f*** en el punto **P** de abscisa x_o con x_o = - 4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 4.5

c) Si $\mathbf{m_t}$ = pendiente de ***t***, recta tg al ***graf f*** en **P,** establecer para cada x_o en (b) y ***leyendo del gráfico***, si $\mathbf{m_t}$ es positiva, negativa, cero o no existe.

d) Analizar y discutir la validez de las siguientes afirmaciones:
i) si $\mathbf{m_t} > 0$, existe un entorno de x_o donde f es estrictamente creciente.
ii) si $\mathbf{m_t} < 0$, existe un entorno de x_o donde f es estrictamente decreciente.
iii) si $\mathbf{m_t} = 0$, existe un entorno de x_o donde $f(x) = f(x_o)$; $\forall x$ del entorno.



17. Dada **$f(x) = x^3 - 27$**, se pide:

a) hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por **f**, en los puntos de abscisa: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3$.
b) Graficar la función y la recta tangente en cada caso.
c) Analizar y discutir para esta **f** las afirmaciones del item (d) del ej. 16.

18. Dada **$f(x) = a x^2 + b x + c$** $(a \neq 0)$, demostrar que cualquiera sean a , b y c; la abscisa del vértice de la parábola **(x_v)**, es el único punto donde la derivada de **f** vale cero. Hallar la ecuación de la recta tg. a la parábola, en su vértice.

19. Para **$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$** ; **$g(x) = x^3 - 4x$** se pide:

a) analizar continuidad, derivabilidad, ceros y límites para $x \rightarrow \pm\infty$.
b) determinar los intervalos ó ***x´s*** para los cuales la recta tg tiene pendiente: i) *cero*; ii) *positiva* ; iii) *negativa*.
Establecer cual es el comportamiento de la función en dichos intervalos.
c) hacer un bosquejo del gráfico de cada función.

20. Hallar las ecuaciones de las recta tangente y normal a la gráfica de la curva definida por f , en los *puntos cuyas abscisas* se indican. De ser posible realizar un esbozo de la curva y graficar, en el punto indicado la <u>*recta tangente*</u> obtenida.

a) $f(x) = 4x^3 - x$; $x_0 = 1$
b) $f(x) = (x+2) / (3x-2)$; $x_0 = 0$
c) $f(x) = e^{2x}$; $x_0 = 0$
d) $f(x) = 2^{2x}$; $x_0 = 0$ } Graficarlas en un mismo sistema
e) $f(x) = \ln x$; $x_0 = 1$
f) $f(x) = \log x$; $x_0 = 1$ } Graficarlas en un mismo sistema
g) $f(x) = \cos(x/3)$; $x_0 = \pi$ y $x_1 = 3\pi$
h) $f(x) = (x^2 - 1) / (4x-3)$; $x_0 = -1$

21. Dada $\mathbf{f}(x) = \sqrt{|x|}$, mostrar que existe recta tg en **P** (0; f(0)) aunque no existe **f´** (0).

22. Dada $\mathbf{f}(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, hallar "a" de modo que la pendiente de la recta tg a la gráfica de **f** en **P**(a; f(a)), sea:

a) $m_t = 0$ **b)** $m_t = -1$ **c)** $m_t = 5$ **d)** $m_t = -2$ **e)** $m_t = -\frac{9}{8}$

23. Dada **f** (x) = $\boldsymbol{x}$ + **sen** $\boldsymbol{x}$, Dom f = [0; 4π] se pide:

a) hallar todos los "a" para los cuales la recta tg. a la **graf. f** en el punto **A**(a; f(a)) sea paralela al eje x. Dar la ecuación de las rectas tg_s.

b) Hallar todos los "b" para los cuales la recta tg. a la **graf**. **f** en el punto **B**(b; f(b)) tenga pendiente "dos".

c) Hallar todos los "$\boldsymbol{x}$" para los cuales la recta tg. a la **graf**. **f** en el punto **P**($\boldsymbol{x}$; f($\boldsymbol{x}$)) tenga pendiente positiva; ¿qué está haciendo **f** al pasar por **P** ?

d) Marcar en cada punto y con un pequeño trazo las rectas halladas en (a) y (b) Teniendo en cuenta (c) y la continuidad de **f**, hacer un bosquejo del **graf. f**.

24. Dos funciones se dicen que son "tangentes en **P**(x;y)" si sus gráficas se intersecan en **P** y sus rectas tgs. son coincidentes en ese punto. Hallar a, b y c tales que **f** (x)= $\mathbf{x^2 + a\,x + b}$ y $\mathbf{g(x) = x^3 - c}$ **,** sean tangentes en **P**(1;2).

* ***La derivada como razón de cambio***

En la resolución de los ejercicios que se proponen a continuación se tendrán en cuenta las siguiente denominaciones alternativas del cociente incremental y de la derivada de y = f(x) . (En todos los casos en [x_o ; x] ó [x ; x_o], según $sg\,\Delta x$)

- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_o}{x - x_o} \longrightarrow \longrightarrow$ *velocidad media*; *razón media de cambio*; *tasa de variación media*; *variación media*
- $f'(x_o) = \frac{dy}{dx}(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow$ *velocidad (instantánea)*; *razón de cambio (inst.)*; *tasa de variación (inst.)*; *variación instantánea*
- $|\,f'(x_o)\,|$ = rapidez de variación de y respecto de x , en el punto x_o .

25. Si **L = 50 + 0.001 T** da la longitud en cm. de una barra de metal en función de T , su temperatura en grados centrígrados, se pide

a. Hallar la "razón media de cambio" de L respecto de T en un entorno de $T_o = 10$ y para $\Delta T = 10 ; 5 ; 1$.
b. Hallar la razón de cambio (*instantánea*) de L respecto de T en $T_o = 10$. ¿Qué observa?, ¿porqué?.

26. La masa "m" de cierto cultivo de bacterias crece en el tiempo según la ley: $m = ½ t^2 + 10$. ([m] = grs. ; [t] = hs.).

a) ¿ Cuanto "aumenta" la masa durante el intervalo de tiempo que va de las 2 hs. de iniciada la experiencia a las 3 hs.?.
b) Verificar que la *variación media* de masa en el intervalo [2; 3] es de 2,5 grs./h Según este resultado, ¿diría Ud. que en ½ hora y a partir de las 2, el aumento de masa es de 1,25 grs? Justifique su respuesta.
c) ¿Cuál es su razón de crecimiento (*inst.*) a las ***2 hs***. ?. Interpretar físicamente el resultado.

27. La masa M de un isótopo radiactivo de un elemento químico está dada por $M = M_o e^{-k t}$, (k>0) (t = tiempo).

a) Si su $t_{1/2} = 100$ (años), calcular el valor de k.
b) Hallar la velocidad de descomposición del elemento en función del tiempo.
c) Hallar la rapidez de descomposición de este elemento para t = 50. ¿Qué nos informa este valor? . ¿Depende de M_o?; ¿de qué forma?.

28. Suponga que una población de bacterias se inicia con 500 y se triplica cada hora,

a) ¿Cuál es la población después de 3 hs.? ; ¿después de 8 hs.?.
b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la población a las 3 hs.? ; ¿ a las 8 hs.?.

29. Resolver las siguientes cuestiones:

a) Encuentre la *razón media de cambio* del área de un círculo con respecto a su radio "r", cuando este cambia de : i) 2 a 3 ; ii) 2 a 2.5 ; iii) 2 a 2.1
b) Encuentre la razón instantánea de cambio cuando r = 2.
c) Demuestre que la razón instantánea de cambio del área del círculo con respecto a su radio es igual al perímetro de la circunferencia borde del círculo.

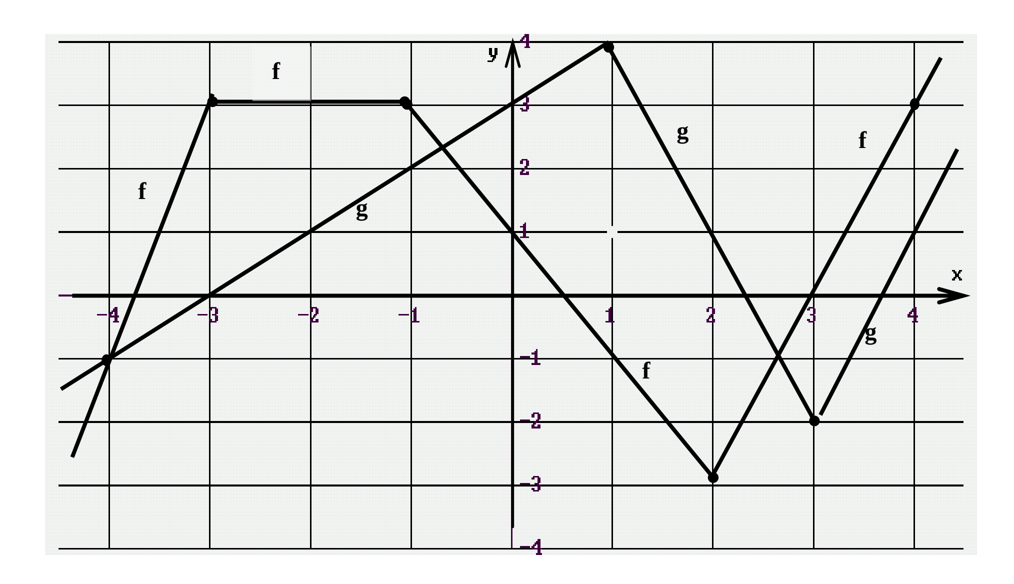
30. La Ley de Boyle establece que, a temperatura constante, PV= k (cte positiva).

a) Hallar la razón de cambio (inst.) del volumen con respecto a la presión.
b) Una muestra de gas se comprime a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? . Informar su conclusión, analizar la coherencia de la misma según contexto.

* ***Derivada de funciones numéricas y gráficas***

En esta instancia trabajamos con funciones cuyas leyes no están en forma algebraica sino como funciones numéricas o gráficas.

31. Dadas **f** y **g** por su gráfico, se pide hallar la derivada que se indica en cada caso. Si no existe explicar porqué.



a) u' (0) si u = f .g

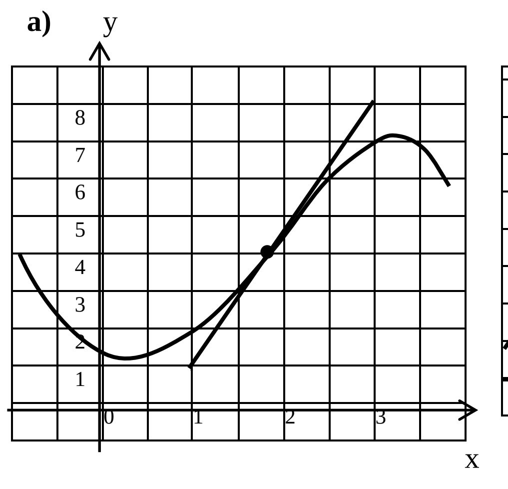
b) v'(-2) si v = f /g

c) w' (-4) si w = f $_o$ g

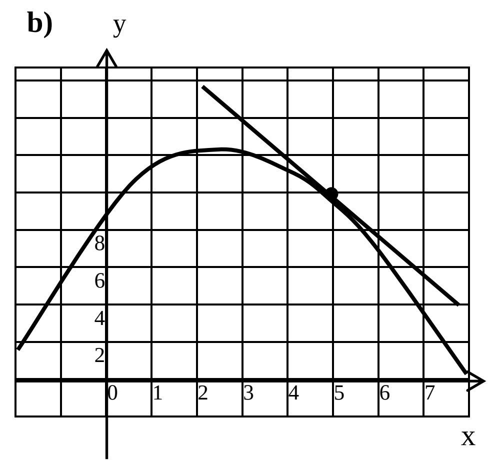
d) z' (-4) si z = g $_o$ f

32. En los siguientes gráficos se ha dibujado una recta tangente a la curva. Estimar su pendiente. Ser cuidadoso con la diferencia de escalas de los dos ejes.

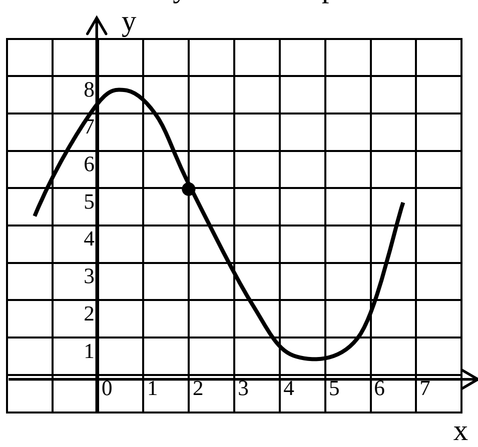
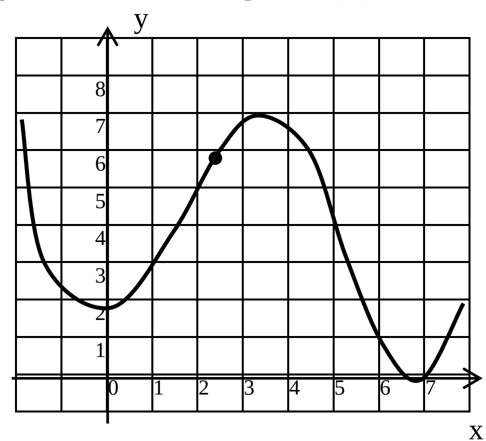
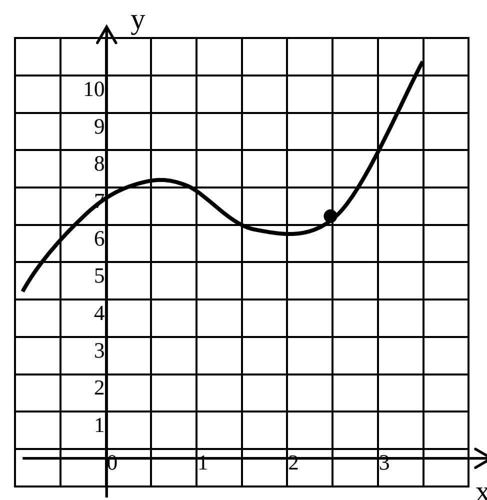
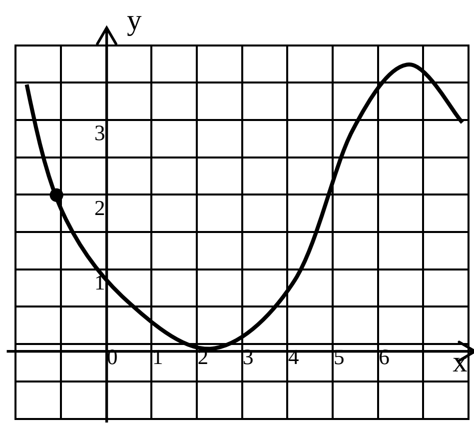
a)



b)



33. En las siguientes gráficas dibujar la recta tangente a la curva que pase por el punto indicado y estimar su pendiente. Luego estimar un valor para $f'(x_0)$.

34. **a)** Para f derivable en x_0, indicar V ó F, justificar la respuesta:

i) $$\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}=f'(x_o)+\varepsilon(\Delta x) \quad ; \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$$

ii) Si existe el $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entonces para $\Delta x\cong 0$

se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cong \mathbf{f'(x_o)}$ **(*1*)**

b) Hallar $\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta x)$ para : (i) $f(x) = x^2$; (ii) $f(x) = x^3$

35. *Estimación del valor de* $f'(x_0)$ *para una función numérica*

x	f (x)
2	9,57
3	7,19
4	5,97
5	5,83
6	6,67
7	8,11
8	7,51
9	5,41

a) Usando **(*1*)** del ejercicio 34 estimar el valor de **f´(8)** para la **f** que se adjunta. Para ello:

(i) Aproximar **f´(8)** tomando $\Delta x = -1$ (→ con velocidad media en [7;8])

(ii) Aproximar **f´(8)** tomando $\Delta x = 1$ (→ con velocidad media en [8;9])

(ii) Finalmente tomar el "promedio" entre las dos velocidades medias calculadas. (Experimentalmente se comprueba que este promedio proporciona una ´*buena*´ aproximación de **f´(8)**).

b) Idem; estimar **f´(6)**. En ambos casos discutir el signo.

36. *Cálculo de derivadas para el caso de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas*

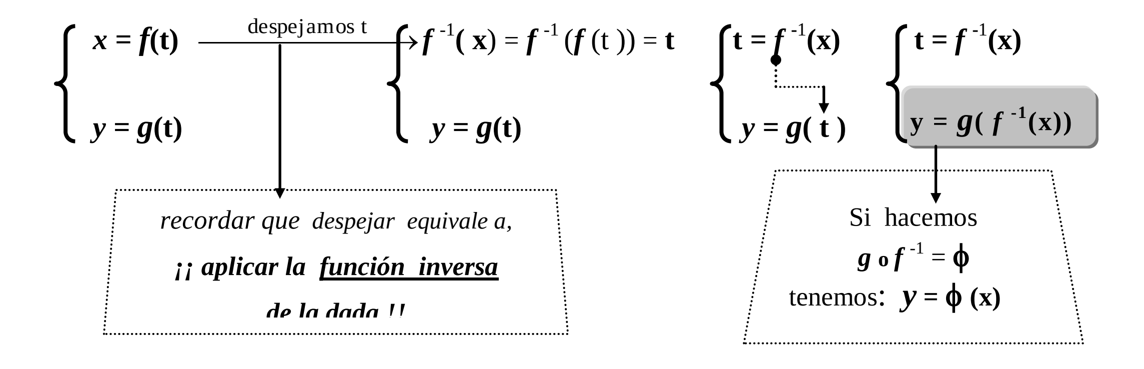
$$\mathbf{C:}\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t)\ ; \quad t \in [a\,;b] \end{cases}$$

Demostrar que si **C** es gráfico de una función; o sea admite una ecuación cartesiana de la forma $y = \phi(x)$ entonces $\phi'(x) = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ con $t = f^{-1}(x)$

Sugerencias:

1º) *Pasar de paramétricas a cartesiana con la eliminación del parámetro t.*

Este proceso consiste en "*despejar t*" en *una* de las ecuaciones paramétricas, reemplazar luego con este valor, el ó los ***t*** que aparezcan en la otra.
Si despejamos en la ecuación correspondiente a ***x*** , obtenemos ´***y*** en función de ***x***´.



2º) $\phi(x) = g \circ f^{-1}(x)$; o sea, ϕ resulta de la composición de **g** con f^{-1}. Teniendo en cuenta esto, ***calcular*** ϕ' por aplicación de la "regla de la cadena" y el "teorema de la derivada de la función inversa"; demostrar que

$$\phi'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{con} \quad t = f^{-1}(x)\ .$$

3.10 Ejercicios de aplicación

Problema 1:

Las gráficas cartesianas dadas a continuación representan durante 2, 6 y 8 hs. respectivamente, la ***función de posición*** de una partícula **P** que se mueve sobre una recta horizontal, durante 8 hs. Para cada intervalo de tiempo dado, se pide:

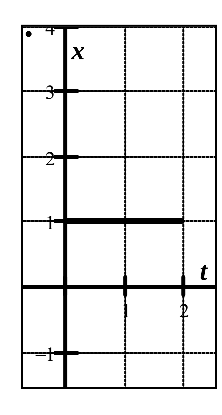
a) Graficar la trayectoria de **P** sobre el eje del movimiento.

b) Hallar la ***ley*** de la función de posición de **P**, $x = x(t)$; [**t**]= hs., [x]= mts..

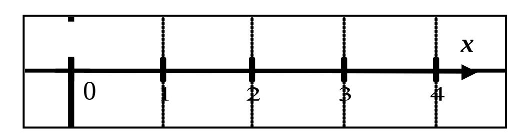
c) Obtener la ley de la función velocidad, $v = v(t)$.

d) Describir el movimiento de la partícula en el lenguaje coloquial.

*** I1 = [0;2]**



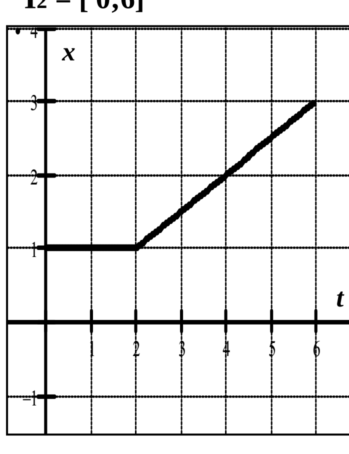
*** Trayectoria 1**



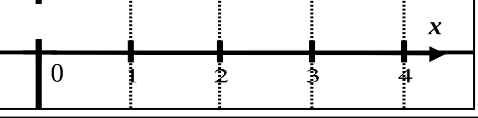
x = ...; ∀t∈[0;2] ; ***v*** = ...; ∀t∈[0;2]

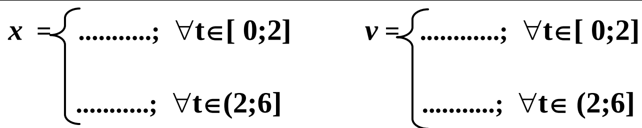
Durante las 2 horas primeras, **P** está ...., a ....mt. del O y a la (izq.?; der.?) del mismo.

*** I2 = [0;6]**



*** Trayectoria 2**





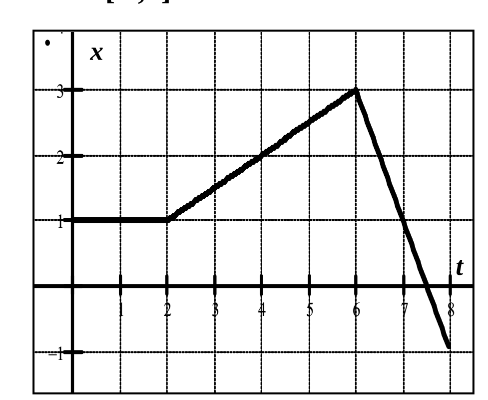
x = { ....; ∀t∈[0;2] ; ....; ∀t∈(2;6] ***v*** = { ....; ∀t∈[0;2] ; ....; ∀t∈ (2;6]

P está .... durante 2 hs.; luego **,** durante las cuatro horas siguientes, *avanza* en el sentido del semieje ***x*** .... a razón de .... por ....

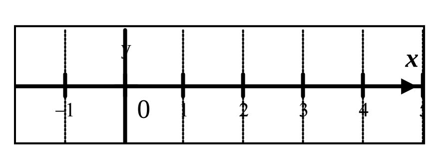
A las 6 hs., la ***posición*** de **P** es ***x* = ...** ; está a .... mts. del punto de partida (***x* = *1)***

y a la .... del mismo.

I_3 = [0;8]



Trayectoria 3



$x = \begin{cases} \text{..........} ; & 0 \le t \le 2 \\ \text{..........} ; & 2 < t \le 6 \\ \text{..............} ; & 6 < t \le 8 \end{cases}$ $\quad v = \begin{cases} \text{......} ; & 0 \le t \le 2 \\ \text{......} ; & 2 < t \le 6 \\ \text{......} ; & 6 < t \le 8 \end{cases}$
P está (*parado*) durante 2 hs. ; luego**,** durante las cuatro horas siguientes, **P** *avanza* en el sentido del semieje ***x*** (+); a razón de (½) mt por (*hora*). A las 6 hs., la ***posición*** de **P** es ***x* = (*3*)** y está a (***2***) mts. del punto de partida (***x = 1),*** a la (derecha) del mismo.
A partir de las 6 hs.; **P** *avanza* en el sentido *contrario* al del semieje ***x*** .... ; a razón de ....mts por .... A las 8 hs., la ***posición*** de **P** es ***x* = ...** y está a .... mts. del punto de partida (***x = 1)*** ; a la .... del mismo.

Problema 2:

Sea **x = k t** (k < 0 ; t ≥ 0) la ***función de posición*** de cierta partícula. Se pide:

a) Si la partícula se mueve sobre un eje horizontal graduado en la forma habitual, graficar la ***trayectoria de la partícula*** sobre el eje de movimiento, en el intervalo de tiempo [0; 6].

b) Calcular la $\mathbf{v_m}$ en el intervalo de tiempo 2 a 2 + Δt.

c) Calcular la velocidad (*inst.*) "**v**" en t = 2. Interpretar físicamente el resultado.

d) Indicar V ó F, justificar: | si **x = k t** entonces $\mathbf{v = v_m = k}$ |

e) Graficar **v** versus **t** . Dar la ley de ***A = A(t)***, si con "***A***" indicamos el área entre la gráfica de **v** y el ***eje t*** en el intervalo [0; t].

f) Indicar **V** o **F**:
"el área de la región entre el gráfico de **v** y el ***eje t*** en el intervalo [0; t] *coincide*, en valor, con la ***posición*** de la partícula al instante t ".

Problema 3:

Dos automovilistas **A1** y **A2** se encuentran sobre una misma ruta. **A1** esta en la ciudad **C** (sobre esa ruta) mientras que **A2** está a 50 Km. de **C**. Ambos parten al mismo instante y en el mismo sentido, pero el que esta en **C** lo hace a una velocidad constante de 100 km/h mientras que el otro lo hace a 75 km/h. Se pide:

a) contruir, al efecto de ***representar*** el moviendo de ambos automovilistas, un ***sistema de referencia*** asimilando la ruta a una ***recta horizontal*** ; hacer esto tomando **C** como origen del sistema y el sentido positivo del eje *hacia la derecha*.

b) para cada una de las situaciones a continuación, bosquejar la *trayectoria* de ambos automovilistas sobre el sistema de referencia (para cada caso, construir un sistema como el indicado en (a)). Decidir luego, por simple inspección y si no cambian las velocidades**,** si **A1** y **A2** pueden llegar a cruzarse en algún instante:

b1) **A 2** está a la derecha de **A1;** y ambos parten hacia la derecha**.**
b2) **A 2** está a la izquierda de **A1;** y ambos parten hacia la derecha**.**
b1) **A 2** está a la derecha de **A1;** y ambos parten hacia la izquierda**.**
b2) **A 2** está a la izquierda de **A1;** y ambos parten hacia la izquierda **.**

c) dar la ley de la *función de posición* correspondiente a cada móvil y para cada una de situaciones descriptas en el item (b),

d) hallar (en cada caso y si existe) el instante en que se cruzan; a que distancia de **C**.

e) para cada una de situaciones en el item (b), y en un mismo sistema cartesiano ortogonal, realizar el ***grafico cartesiano*** de la función de posición correspondiente a **A1** y **A2** . Comprobar si los resultados algebraicos coinciden con los gráficos.

Problema 4:

Si $\mathbf{x = 3\ t^2}$ es la ley de movimiento de cierta partícula durante **1 ½ hora,** si a partir de allí comienza a moverse con velocidad constante e igual a la que tiene en ese instante.

a) ¿cuántos km se desplaza (a partir de allí) en 1 h?
b) ¿cuántos km se desplaza en total, en las 2 ½ hs?

Problema 5:

Una pelota se lanza hacia arriba desde el suelo. Si la dirección positiva del eje del movimiento se toma hacia arriba, la ***función de posición*** para la pelota es:
$\mathbf{y = -16\ t^2 + 64\ t}$ **;** $t \geq 0$; [**y**] = pies; [**t**] = seg . Se pide:

a) la trayectoria de la pelota (tomar un eje “vertical” como eje del movimiento)
b) la gráfica cartesiana de **y** = **y**(t) y de la velocidad **v**(t) = ***y´*** (t)
c) la velocidad instantánea al término de 1 seg. (la pelota: ¿sube o baja?)
d) la velocidad instantánea a los 3 seg. (la pelota: ¿sube o baja?)
e) el tiempo que hace que la pelota fue lanzada si, como dato, nos dicen que la “rapidez” de la misma en ese instante es de 32 pies/seg . (¿puede dar esta respuesta?; ¿porqué?. Si le dieran otro dato, ¿podría hacerlo?; ¿cuál?.)
f) velocidad inicial y velocidad final (al tocar el suelo)
g) Verificar que el instante en que la pelota alcanza la altura máxima es aquel donde la velocidad se hace “cero”. ¿Es esto casual o tiene una explicación “física”? . Explicar la respuesta.

Comparando los gráficos de la función de posición y de la velocidad, completar las siguientes afirmaciones:

(I) la pelota “sube”; o sea, avanza en *“el sentido”* del semieje ...., en el intervalo de tiempo donde **v .... 0** (¿mayor, menor o igual a cero?)

(II) la pelota “baja”; o sea, avanza en *“el sentido contrario”* al semieje ...., en el intervalo de tiempo donde **v .... 0.**

Problema 6:

Atendiendo a las leyes de la Física, existen dos ecuaciones posibles para representar la ***función de posición*** que modeliza el fenómeno de un cuerpo que cae del reposo,

(I) $y = \mathbf{16\ t^2}$ **;** **(II)** $y = \mathbf{-\ 16\ t^2}$; [**y**] = pies; [**t**] = seg.

¿Porqué sucede esto?. Porque para modelizar cualquier fenómeno es necesario establecer un ***sistema de referencia***; luego, según el sistema que se elija las ecuaciones resultantes, aún cuando describan el mismo fenómeno, pueden ser distintas.

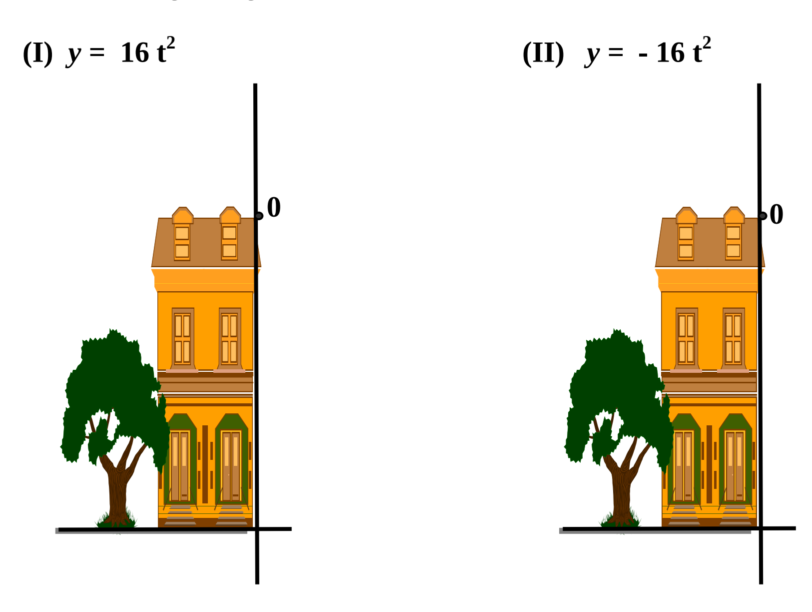
Si se deja caer una pelota de un edificio de 256 pies de altura, se pide:

a) Para los gráficos que se adjuntan, construir respectivamente el sistema de referencia para el cual se obtiene la función **(I)** y la función **(II)** . Dar en cada caso el dominio natural de la función; analizar si en ambos casos

y* = *distancia de la pelota al techo del edificio al instante ***t***.

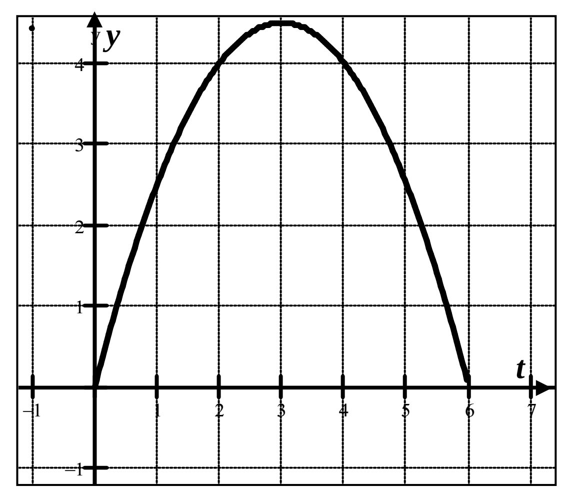
b) Para hallar el instante en que la pelota toca el suelo, ¿puede usar sólo una de las ecuaciones o puede usar cualquiera de las dos?. Justificar la respuesta.

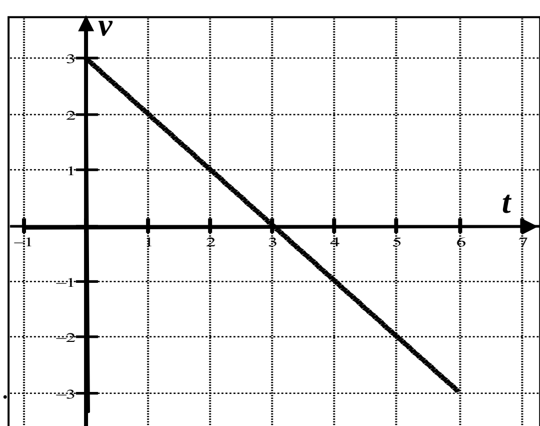
c) hallar $\boldsymbol{v}_I$ y $\boldsymbol{v}_{II}$, ***velocidad*** de la pelota para el caso (I) y (II) respectivamente. Calcular $\boldsymbol{v}_I(2)$ y $\boldsymbol{v}_{II}(2)$ y explicar porqué ambos valores informan lo mismo aún cuando tengan signos contrarios.



Problema 7:

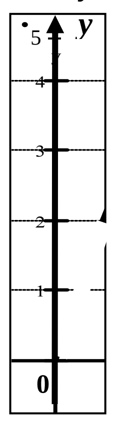
Para una partícula **P** que se mueve sobre un eje vertical las gráficas adjuntas representan, respectivamente, la ***función de posición*** ***y = y(t)*** y la ***velocidad*** ***v = v(t)*** de la misma. ***[t]= seg***.; ***[y] = m*** ; ***[v] =*** ***m /seg.***





Al respecto se pide:

a) Ley y dominio de ***v*** e ***y***.
b) Verificar que ***v = y´(t) .***
c) Dibujar la ***trayectoria*** de **P.**

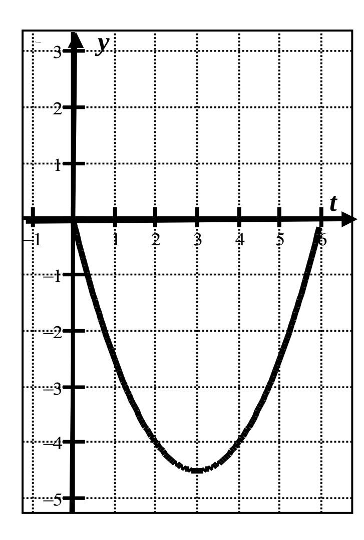


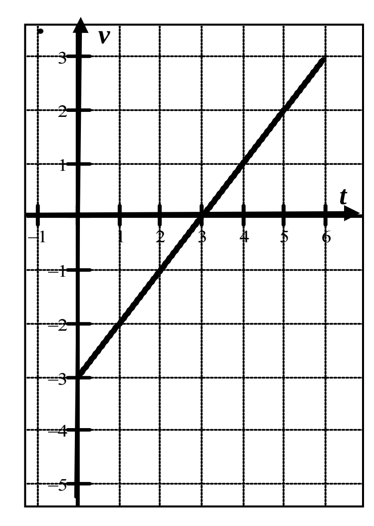
d) Indicar V ó F; justificar respuesta.

d_1) si ***v > 0*** entonces **P** avanza en el sentido del semieje positivo.
d_2) si ***v < 0*** entonces **P** avanza en el sentido ***contrario*** al del semieje positivo.
d_3) en el instante en que ***v = 0 ;*** **P** cambia el sentido del movimiento

Repetir el ejercicio anterior para el caso que los gráficos de ***y = y(t)*** y ***v = v(t)*** sean los que se dan a continuación.

Previo a contestar los V ó F, graficar la *trayectoria* de la partícula (igual que antes en un eje vertical).

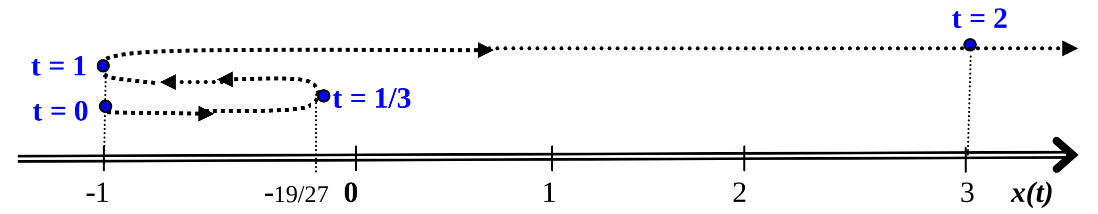




Problema 8 :

Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta horizontal de acuerdo a la siguiente ley de movimiento: $x = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$; $t \geq 0$.

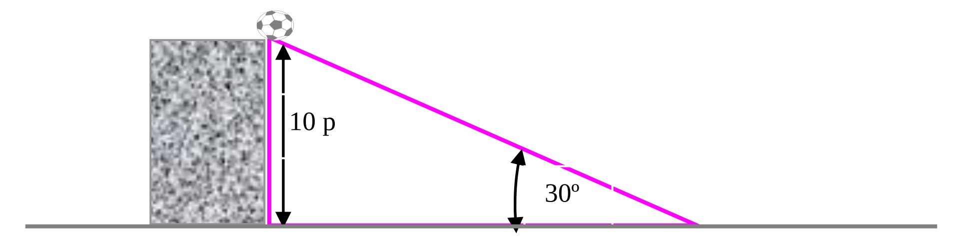
Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores en cuanto a la relación entre el ***signo de la velocidad*** y el ***sentido del movimiento***, se pide determinar los instantes en que la partícula se está moviendo hacia la derecha o hacia la izquierda, y cuándo cambia de dirección. Analizar luego si el grafico que se adjunta es una buena representación de la trayectoria de la partícula.



Problema 9:

Una pelota se empuja hacia abajo sobre un plano inclinado 30º respecto de la horizontal. Si *la posición de la pelota sobre el plano inclinado* en función del tiempo viene dada por $\mathbf{x = 24\,t + 10\,t^2}$, con "**x**" en pies y "**t**" en segundos, se pide:

a) Construir un sistema de referencia (el más apropiado al caso) y dibujar sobre el mismo la trayectoria de la pelota si la misma se empuja hacia abajo cuando está a 10 pies del piso.
b) Hallar la velocidad (*inst.*) de la pelota durante su recorrido sobre el plano.
c) Hallar t_f (instante "final") ; o sea, cuando la pelota llega al piso y cambia la ley de la función posición.



Problema 10:

Se demostró que el producto $\boldsymbol{\eta.(\theta + 273)^3}$ es ***constante*** para líquidos con viscosidad "**η**" a una temperatura "**θ**" . Si la constante es "**k**", hallar la razón de cambio instantánea de la viscosidad en función de la temperatura.

Problema 11:

Una fórmula empírica que da la relación entre la presión de vapor "**p**" y la temperatura "**θ**" es:

$$\log p = a + b\,\alpha^{\theta} - c\,\beta^{\theta} \qquad ; \; \alpha, \beta \in R^+$$

Hallar la variación instantánea de "**p**" en función de "**θ**".

¿Cuál es tal variación si $\theta = 0$? ¿Qué podría decir de "**p**" para $\theta = 0$; si $\dfrac{\alpha^b}{\beta^c}$ fuera mayor que 1?

Problema 12: Para $x > 1$; qué aumenta más rápido: ¿ x o $\log x$?

Problema 13:

Hallar la velocidad de un móvil en el momento de partida (t=0); si el mismo se mueve según la ley: $x = a\, e^{-\lambda t} \cos(2\pi t)$

Si todas las constantes que intervienen son positivas: ¿qué signo tiene la velocidad al momento de partir?; ¿qué nos dice este signo en cuanto al movimiento del móvil ?.

Problema 14:

La siguiente función da la cantidad **"x"** de una cierta sustancia formada a partir de dos reacciones unimoleculares consecutivas, según el tiempo **"t"** transcurrido desde el inicio de las reacciones:

$$x = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} e^{-k_1 t} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} e^{-k_2 t}$$

Con k_1 y k_2 constantes propias de la reacción, ambas positivas.

Hallar la velocidad a la que cambia "**x**" en función del tiempo, **x**(0) y $\lim_{t \to +\infty} x$

Hallar $x'(0)$ y **signo** $v = x'(t)$ (velocidad de variación de la sustancia en cada instante t), hacer esto para el caso que $k_1 > k_2$. Con el dato obtenido, ¿qué se puede concluir respecto de **x** ?. ¿ se puede hacer un bosquejo del ***graf.*** **x** ?

Problema 15:

Si un tanque contiene 5000 ls de agua, la cual drena desde el fondo del tanque en 40 minutos, entonces **V** (volumen que <u>queda</u> en el tanque después de **t** minutos) es:

$$V = 5000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad \text{(ley de Torricelli)}$$

a) Hallar la razón de drenado después de 5, 10, 20 y 40 minutos.
b) Hallar la rapidez de drenado después de 5, 10, 20 y 40 minutos.
c) ¿Cuándo fluye más rápido? . ¿Y con mayor lentitud? ¿Es esto razonable?.

Problema 16:

La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura **T** (en Kelvins); la presión **P** (en atm.), con un volumen **V** (en litros) es,

$$P\,V = n\,R\,T \qquad (n = \text{nº de moles del gas, } R = 0{,}0821)$$

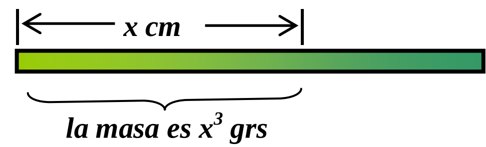
Las variables de estado P; V; T varían con el tiempo; o sea, **P= P (t) ; V= V(t)** y **T= T (t) .** Si en cierto instante t_o conocemos que:

→ **P** = 80 atm. y aumenta a razón de 0.1 atm/min.
→ **V** = 10 litros y disminuye a razón de 0,15 l/min.

Se pide hallar la razón de cambio de **T** respecto al tiempo en ese instante, si ***n = 10***.

Problema 17:

Un cable de 8 cm de longitud no es “homogéneo”; es tal que la masa entre su extremo izquierdo y un punto a **“x”** cm a la derecha del mismo es de $\mathbf{x^3}$ **grs.**



a) ¿Cuál es la densidad media del segmento de 2 cm ubicado en el medio del cable?
b) ¿Cuál es la densidad en el punto que está a 3 cm del extremo izquierdo del cable?

Problema 18:

El peso en gr. de un tumor maligno en el momento **“t”** es $\mathbf{W(t) = 0{,}2\,t^2 - 0{,}09\,t}$, con **t** medido en semanas. Hallar el índice de crecimiento del tumor para t = 10.

Problema 19:

Una ciudad es golpeada por una epidemia de gripe asiática. Las estimaciones oficiales son que el número de personas enfermas de gripe ”**t**” días después del comienzo de la epidemia está dado por: $\mathbf{P(t) = 120\,t^2 - 2\,t^3}$ siendo $0 \leq t \leq 40$.
¿Cuál es el índice de difusión de la enfermedad en t = 10, t = 0, t = 40 y t = 50? ¿Cuándo se termina la epidemia?. Interpretar los resultados.

Problema 20: Las aristas de un cubo variable aumentan a razón de 3 cm/segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cubo cuando la arista tiene 10 cm de longitud?.

3.11 Trabajo Práctico: Método de Newton

Objetivo : determinación de los ceros de una función.

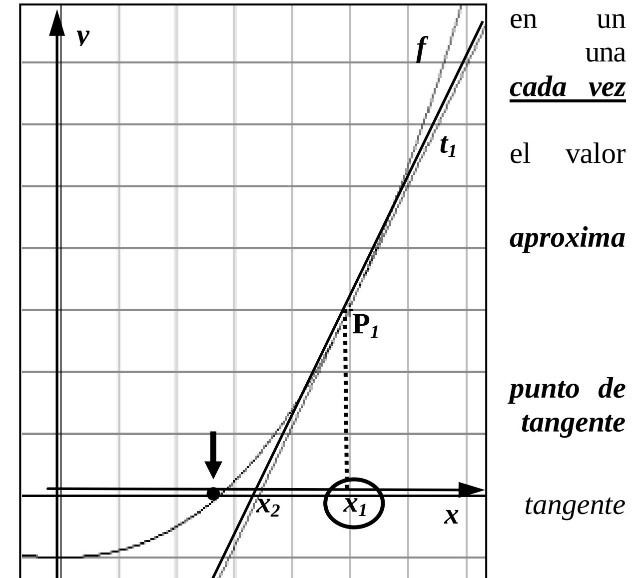
Dada $y = f(x)$ el ***Método de Newton*** permite obtener ***raíces*** o ***ceros de f***.
La utilidad de este método radica en que permite *estimar raíces* en el caso que no se puedan obtener con los *métodos tradicionales del álgebra*. Por ejemplo si queremos resolver la ecuación $x + e^{x} = 0$, luego de algunos intentos veremos que esto es imposible de hacer si nos limitamos a realizar *sólo manipulaciones algebraicas*.

El ***Método de Newton*** consiste en esencia en un proceso recursivo a partir del cual se genera una ***sucesión de puntos*** que se van ***acercando, cada vez más, al cero buscado***.
Así, normalmente, este método no proporciona el valor exacto del cero, sino uno aproximado

La generación de la ***sucesión de puntos que aproxima al cero***, está basada en un concepto fundamental del cálculo diferencial, el de ***aproximación lineal*** ; es decir, en que,

"toda curva suave, en las proximidades del punto de contacto, puede ser asimilada a su recta tangente".

Acorde a este principio *el cero de la recta tangente* debe estar *próximo* al de la función, pudiéndose así tomar *uno por otro*.



* ***Método de Newton***: ¿ x^*? / $f(x^*) = 0$

1) *Elegir* una aproximación inicial, *etiquetarla* x_1.
En este paso apoyarse en el graf **f** o teoremas aplicables al caso (ej: Bolzano).

2) Obtener t_1 recta tg en $P_1(x_1; f(x_1))$: $t_1(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$

3) *Hallar* $x = t_1 \cap$ *eje x* ; *etiquetarlo* x_2

$$\to \; f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 0 \;\to\; x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \;\to\; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

4) Obtener t_2 recta tg en $P_2(x_2; f(x_2))$: $t_2(x) = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$

5) *Hallar* $x = t_2 \cap$ *eje x* ; *etiquetarlo* x_3

$$\to \; f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2) = 0 \;\to\; x = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \;\to\; x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

…..…continuar en forma similar, generar la sucesión $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$..

****¿Hasta donde se sigue generando puntos ??. ¿¿ cuando termina el proceso??***

En el caso que el método "converja", es decir, que la sucesión de puntos *tienda a un valor límite*, se presentan dos situaciones:

a) que en cierto momento los puntos comiencen a repetirse:
$x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = a$; en cuyo caso, $x^* = a$.

b) que no se repitan pero la distancia entre dos puntos consecutivos tienda a cero al aumentar n, $|x_n - x_{n+1}| \to 0$. En este caso, para n "*grande*", cualquier x_n de la sucesión está próximo a x^*; luego, tomamos $x^* = x_n$ (con n "*grande*").

Plan de trabajo (para la búsqueda de x^* / $f(x^*) = 0$, con el Método de Newton)**:**

1) ***Detectar*** un intervalo donde pueda estar x^*; elegir una aproximación inicial, x_1.

2) ***Obtener*** la sucesión $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ a partir de la ***fórmula de recurrencia*** que los genera. Trabajar en Excel.

⌦ *Fórmula de recurrencia para los* x_n :

A partir de calcular los *ceros* de las dos primeras rectas tangentes generadas al aplicar el método, se observa la existencia de cierta "regularidad" en la forma de cálculo de los mismos. Así, generalizando lo observado, se concluye la siguiente fórmula para el cálculo de los puntos de la sucesión: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; $n \in \mathbf{N}$

⌦ *Programación de la fórmula en Excel* (Ejemplo: $f(x) = x^2 - 2$; $f'(x) = 2x$)

1) Introducir en la celda **A1** , el x_1 elegido para el caso. (ej: $x_1 = 2$)
2) Escribir en la celda **A2** la fórmula para calcular x_2 .

```
A2   ▼   fx  =A1-((POTENCIA( A1,2)-2)/(2*A1))
```

3) Generar las siguientes aproximaciones $x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n$ "arrastrando" **A2** .

3) ***Informar*** un valor aproximado de x^* cero de f.
Cualquiera de los x_n obtenidos con la fórmula de recurrencia da una aproximación del cero buscado. Normalmente esta aproximación será tanto mejor cuanto más grande sea n. Así, y por ej., tanto x_{15} como x_{20} dan una aproximación de x^*; pero x_{20} da una mejor aproximación que x_{15}.

ACTIVIDADES:

***Actividad 1*:**

Usando el Método de Newton y Excel, hallar una aproximación de $x^* = \sqrt{2}$.
Para ello tener en cuenta que x^* es un cero de $f(x) = x^2 - 2$.
Discutir el resultado hallado sabiendo que con otro utilitario se obtuvo
$\sqrt{2} \cong 1.4142135623730950488016887$

***Actividad 2*:**

Hallar x^* o una aproximación de x^* , único cero de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

***Actividad 3*:**

Usando el Método de Newton con $x_1 = 20$, hallar un cero de $f(x) = x^2 - 169$.

4 — Aplicaciones de la Derivada

En el CAPÍTULO 3 vimos el concepto de *derivada*; en particular definición, reglas de cálculo e interpretación física y geométrica de la misma. En este capítulo nos ocupamos de *sus aplicaciones*; o sea, de ver donde, cuando y/o porqué resulta apropiado acudir a la derivada al efecto de resolver un problema.

Al respecto veremos dos problemas clásicos a los que da respuesta la derivada:

Parte I.- ***"valores extremos" de una función*** **(→ "*estudio de funciones*").**

Parte II.- ***"aproximación" de una función por otra más simple; en particular: lineales o polinómicas (polinomios de Taylor)***

Parte I - <u>Aplicaciones de la derivada al "estudio de funciones"</u>

La interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente al ***graf f*** proporciona información acerca de la propia ***f*** (comportamiento en D*f*, existencia de extremos, etc) permite hallar "*técnicas de graficación*" que faciliten el trazado de su gráfica. Así, el objetivo en esta instancia es ampliar las técnicas vistas en cap_s 1 y 2 para poder *estudiar y graficar* cualquier tipo de función que se presente.

- Dada ***f*** con fórmula ***y = f(x)***, hasta ahora ***podemos determinar***:
  a) *dominio natural de* ***f*** = D*f*
  b) *continuidad de* ***f*** en D*f* . (→ saltos y/o agujeros en el ***graf f***).
  c) *derivabilidad de* ***f*** en D*f* . (→ ptos angulosos en el ***graf f***).
  d) *ceros de* ***f*** (***f***(*x*)=***0***), o intervalos que contengan ceros de ***f*** (Bolzano).
  e) *simetrías* (par o impar) o *período* (si fuera periódica).
  f) *asíntotas*: vertical ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$) y/o horizontal ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$) .
  g) *acotación* ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ *y/o* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty \Rightarrow$ no acotada).

- y en general, todavía ***no podemos***:
  1) determinar donde crece o decrece ***f*** ; o sea, ***intervalos de monotonía***.
  2) detectar extremos (***máximos y mínimos****), su valor.
  3) determinar donde ***f*** es *cóncava* (*convexa*); o sea, ***curvatura del graf. f*** .
  4) ***graficar f*** **(→ *dar cotas de f ; Im f*)**

Los problemas señalados en 1, 2, 3 se resuelven por medio de la ***derivada***, concepto ahora conocido. Estamos entonces en condiciones de resolver las cuestiones indicadas en estos puntos y así, junto a las indicadas en los puntos a, b,....., g , resolver finalmente el ***punto* 4**; o sea, ***graficar f*** .

* ***<u>Máximos y mínimos</u>***: ***´absolutos´*** y ***´relativos´***.
Hemos definido y trabajado ya el concepto de *´extremo absoluto´* pero este concepto no basta a los efectos de llevar a cabo el estudio de una función.
A tal fin necesitamos distinguir dos tipos de extremos: *´absolutos´* y *´relativos´*.

Definiciones:

Extremos absolutos

f : **D → R**

➢ **M_a**: <u>máximo absoluto de **f** en **D**</u>. [mayor valor que toma **f** en **D**].

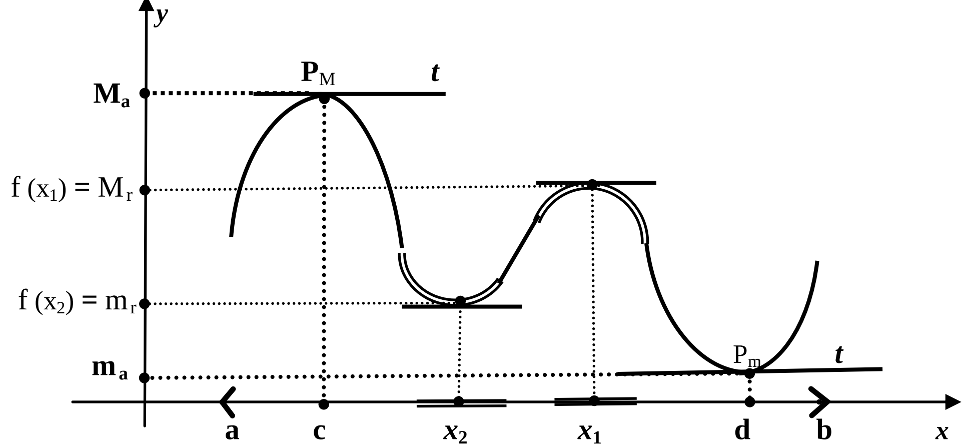
M_a es max. ab. de **f** en **D** ⇔ **(1)** $f(x) \le M_a$, $\forall x \in D$
(2) $\exists\ c \in D \ /\ M_a = f(c)$

➢ **m_a**: <u>mínimo absoluto de **f** en **D**</u>. [menor valor que toma **f** en **D**].

m_a es min. ab. de **f** en **D** ⇔ **(1)** $f(x) \ge m_a$, $\forall x \in D$
(2) $\exists\ d \in D \ /\ m_a = f(d)$

Observaciones:

- **P_M** pto de máximo ab. → ***graf f*** todo ***´por debajo´*** de ***t*** , recta tangente en **P_M** ;
- **P_m** pto de mínimo ab. → ***graf f*** todo ***´por arriba´*** de ***t*** , recta tangente en **P_m** .



En el gráfico **M_a** y **m_a** se corresponden, respectivamente, con la *cumbre más alta* y el *valle más profundo*. Puede suceder, como aquí, que exista una *cumbre más baja*; o sea, un x_1 donde la ***graf f*** esté por debajo de ***t*** , <u>***en un entorno de x_1***</u> **.** También puede existir, un *valle menos profundo*. En este caso hablamos de *´extremos relativos´*.

Extremos relativos

f : **D → R**

➢ **M_r** : máximo relativo de **f** . [mayor valor de **f** en un ***subconjunto*** de **D**]

M_r es max. relativo de **f** ⇔ **(1)** $f(x) \le M_r$, $\forall x \in E(x_1) \cap D$
(2) $M_r = f(x_1)$

➢ **m_r** : mínimo relativo de **f** . [menor valor de **f** en un ***subconjunto*** de **D**]

m_r es min. relativo de **f** ⇔ **(1)** $f(x) \ge m_r$, $\forall x \in E(x_2) \cap D$
(2) $m_r = f(x_2)$

Observaciones:

* Los extremos absolutos son relativos. Así en lo que sigue, y en un principio, el objetivo será buscar *extremos relativos*. Luego veremos como hallar los absolutos.

* Es fácil apreciar que en los puntos del gráfico donde se producen ***extremos*** (abs. o relativos), ***la recta tangente es paralela al eje x*** ; o sea, con ***pendiente cero***.

TEOREMA 1

Dada **f** definida en [a; b] tal que:
a) tiene un extremo relativo en $\mathbf{x_o} \in$ (a; b)
b) existe $\mathbf{f'(x_o)}$;
} entonces, $\mathbf{f'(x_o) = 0}$

Demostración: (por el ABSURDO. O sea, partimos de suponer $f'(x_o) \neq 0$)

Si $\mathbf{f'(x_o)} \neq 0$ entonces es positivo o negativo. Analizamos cada caso.

1º) Suponemos $\mathbf{f'(x_o) > 0}$:

por (b), **f** es derivable en x_o $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) > 0$; luego,

por *Teo. conservación del signo*, existe un entorno de x_o donde el signo del cociente incremental es positivo: $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} > 0$; $\forall\, x \in E^*(x_o)$.

Entonces:

↳ $\mathbf{x < x_o} \Rightarrow x - x_o < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_o) < 0 \Rightarrow \mathbf{f(x) < f(x_o)}$

↳ $\mathbf{x > x_o} \Rightarrow x - x_o > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_o) > 0 \Rightarrow \mathbf{f(x) > f(x_o)}$

$\Rightarrow$ en x_o no hay extremo. (**graf f** por debajo y por arriba de $y = f(x_o)$).

Esto contradice (a), luego es ABSURDO; concluimos así que $\mathbf{f'(x_o) \not> 0.}$

2º) Suponemos $\mathbf{f'(x_o) < 0}$. Idem (1º) llegamos a una ABSURDO; luego $\mathbf{f'(x_o) \not< 0.}$

Conclusión:

$\mathbf{f'(x_o)}$ no es positivo, no es negativo y existe, entonces $\mathbf{f'(x_o) = 0}$ **(q.e.d)**

Observación 1: probada la proposición *directa* investigamos la *recíproca*:

➤ ***directa***: $p \Rightarrow q$; $\underbrace{\text{f derivable en } x_o \wedge \text{en } x_o \text{ hay ext}}_{p} \Rightarrow \underbrace{f'(x_o) = 0}_{q}$ **(V)**

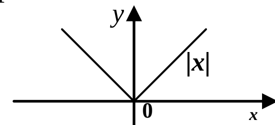
➤ ***recíproca***: $\mathbf{q \Rightarrow p}$: " $f'(x_o) = 0 \Rightarrow$ en x_o hay extremo ". **(F)**

Contraejemplo: $\mathbf{f(x) = x^3}$; $\mathbf{f'(0)=0}$ y en $x_o = 0$ no hay extremo de **f.**

Observación 2: en los puntos donde hay extremo y existe derivada, por el Teo 1, $\mathbf{f'(x_o) = 0}$. Como $f'(x_o) = m_t \Rightarrow m_t = 0$. Luego, en los puntos de extremos la recta tangente es paralela al eje *x* y la ecuación de **t** es : $\mathbf{y = f(x_o)}$

Observación 3: los extremos pueden estar en puntos donde no existe la derivada.

Por ejemplo: $f(x) = |x|$; $f'(0)$ no existe y f tiene un mínimo (abs.) en $x_0 = 0$.

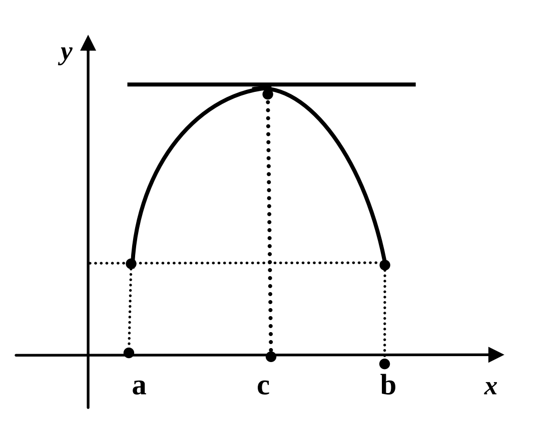


4.1 Teoremas del Valor Medio del Cálculo Diferencial

Las funciones continuas y derivables en un intervalo cerrado y acotado presentan una serie de propiedades que sirven de sustento a varios teoremas del Cálculo Diferencial (e Integral). Al respecto uno de los resultados más importantes del Cálculo Diferencial es el "*teorema del valor medio*" (TVMCD o de "*Lagrange*"). El título de este párrafo hace referencia a *los* teoremas dado que la demostración del TVMCD se basa en un caso particular del mismo, el que se conoce

como "*teorema de Rolle*". A su vez, el TVMCD se generaliza en el teorema conocido como "*teorema de Cauchy* ". De allí entonces que se hable de "*los*" teoremas del valor medio pues en definitiva, y al respecto, hay tres: ***Rolle, Lagrange y Cauchy*.**

Rolle (*1652-1719*) demostró una propiedad de las curvas continuas que era considerada ´*evidente*´ por los matemáticos de la época, tanto que la usaban en sus trabajos sin ninguna duda acerca de su validez. Esta propiedad es la que luego usa Lagrange para demostrar el TVMCD.
¿Qué era tan evidente para los matemáticos de la época?: que si una curva era *continua* y *suave* en [a;b], y $f(a) = f(b)$, debía existir al menos un punto donde la recta tangente fuera *paralela al eje x*. ($m_t = 0$).



<u>TEOREMA de ROLLE</u> (teorema 2)

Hip) a) f continua en [a;b]
b) f derivable en (a;b)
c) $f(a) = f(b)$;

Tesis) existe $c \in (a;b)$ tal que $f'(c) = 0$

Demostración: consideramos dos casos:

- ***<u>Caso 1</u>***: $f(x) = k$; $\forall x \in [a;b]$ → f = función cte; luego,
  $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a;b)$; luego, cualquier x'_s puede tomarse como **c**.

- ***<u>Caso 2</u>***: $f \neq$ función cte

$$f \text{ continua en } [a;b] \overset{\text{T. Wiertrass}}{\overbrace{\Rightarrow}} \text{ existen } \mathbf{M_a} \text{ y } \mathbf{m_a} \text{ de } f \text{ en } \mathbf{[a; b]} \Rightarrow$$

- existe x_1 en **[a; b]** tal que: $\mathbf{M_a} = f(\mathbf{x_1})$
- existe x_2 en **[a; b]** tal que: $\mathbf{m_a} = f(x_2)$

Analizamos si al menos uno de estos puntos cae *dentro del intervalo* (a; b).

Por el ABSURDO, si *por ej.* , $x_1 = \mathbf{a}$ y $x_2 = \mathbf{b}$ entonces,

$$\mathbf{M_a} = f(x_1) = f(\mathbf{a}) \overset{\text{hip.(c)}}{\overbrace{=}} f(\mathbf{b}) = f(x_2) = \mathbf{m_a} \Rightarrow \mathbf{M_a} = \mathbf{m_a} = k \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) = k$; $\forall x \in [a;b]$. ***<u>ABSURDO</u>*** (por hipótesis ***Caso 2***, $f(x) \neq k$)

<u>Conclusión:</u> x_1 (ó x_2) , al menos uno, pertenece al ***abierto*** (a;b).

Supongamos que $x_1 \in (a; b)$**;** tenemos entonces que,

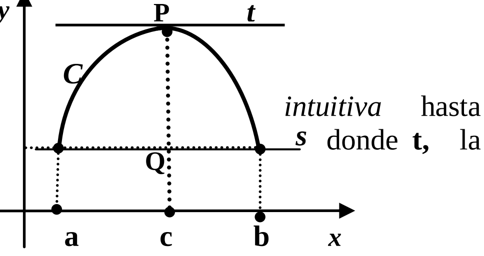
(a) [$f(x_1) = \mathbf{M_a}$]→ f tiene un extremo en $x_1 \in (a; b)$
(b) [f derivable en (a;b)]→ existe $f'(x_1)$

$$\overset{\text{Teo. 1}}{\overbrace{\Rightarrow}} f'(x_1) = 0$$

Luego, hemos hallado c ($c = x_1$) tal que $f\,'(c) = 0$ **(q.e.d)**

Interpretación geométrica del Teorema de Rolle.

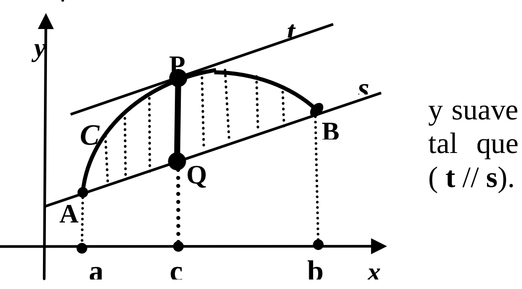
t : ***recta tg. en P*** (c; $f(c)$) → $m_t = f\,'(c) = 0$.



O sea, y como dijimos, Rolle demuestra una propiedad *intuitiva* hasta aquí: que para toda curva continua y suave existe c donde **t,** la recta tangente a **C** en **P**(c; $f(c)$), es ***paralela al eje x*** .

Observaciones:

Lagrange expresa esta propiedad de otra forma; logra así *´ampliar´* lo observado por Rolle.



¿Que dice Lagrange?: que para toda curva continua y suave **C**; dada s, una ***secante*** a la curva, siempre existe c tal que **t**, recta tangente a **C** en **P**(c; $f(c)$), es ***paralela a s***. (**t** // **s**).
(Así, Rolle pasa a ser un caso particular de Lagrange aquél donde s es paralela al ***eje x***).

En cualquier caso, "c" parece estar donde la ***distancia*** entre **P**(x; $f(x)$) y **Q**(x; $s(x)$) (sobre **C** y s respectivamente), es ***máxima***. Esto ***sugiere un camino*** para demostrar lo observado por Lagrange: construir una función "d" que evalúe la distancia entre **P** y **Q** al variar x en [a; b], buscar el máximo de "d", ver si allí está el punto buscado.

Por definición de distancia entre puntos: $d = \mathbf{d}(\mathbf{P}; \mathbf{Q}) = |\, f(x) - s(x)\, |$:

* el signo de d no afecta la resolución; luego, para simplificar la misma tomamos:

$$d(x) = f(x) - s(x).$$

* hallamos la ecuación de s , recta que pasa por **A**(a; f(a)) y **B**(b; f(b))

$$s(x) = f(a) + m_s\,(x - a) \quad \text{con} \quad m_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

* reemplazamos, y obtenemos finalmente la ***función auxiliar d***:

$$d(x) = f(x) - s(x) \;\Rightarrow\; \boxed{d(x) = f(x) - f(a) - m_s\,(x - a).}$$

TEOREMA del VALOR MEDIO ó de LAGRANGE (teorema 3)

Hip.) a) f continua en [a; b]
b) f derivable en (a; b)

Tesis) existe $c \in$ (a; b) tal que, $f\,'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

➯ En términos geométricos: $\exists\, c \in (a; b) \,/\, m_t = m_s$ con **t:** recta tg en **P(**c; $f(c)$**)**

Demostración: (teniendo en cuenta lo analizado en la página anterior)

Para demostrar este teorema nos apoyamos en la ***función auxiliar*** $d(x) = f(x) - s(x)$ y replanteamos *la tesis* en términos de dicha función:

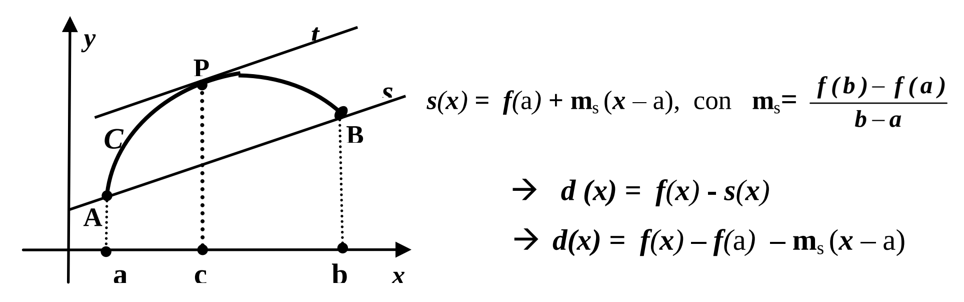
" existe $c \in$ (a;b) tal que d tiene un ***extremo en c*** ".

Por Teorema 1, esto último se puede probar mostrando que,

" existe $c \in$ (a;b) tal que $d\,'(c) = 0$ ".

La ecuación $d\,'(c) = 0$ no se puede resolver algebraicamente; así, para resolver esta cuestión debemos acudir a resultados teóricos; en este caso, ***al teorema de Rolle.***

Aplicar un teorema requiere evaluar que se cumplan las hipótesis del mismo. Luego, procedemos a analizar si $d(x) = f(x) - s(x)$, ***cumple las hipótesis de Rolle :***



$s(x) = f(a) + m_s (x - a)$, con $m_s = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

→ $d(x) = f(x) - s(x)$

→ $d(x) = f(x) - f(a) - m_s (x - a)$

a) $d(x) = f(x) - s(x) \Rightarrow d$ es *resta de continuas* en [a;b] $\Rightarrow d$ continua en [a;b]

b) $d(x) = f(x) - s(x) \Rightarrow d$ es *resta de derivables* en (a;b) $\Rightarrow d$ derivable en (a;b) **c)** ¿ $d(a) = d(b)$?:

$$\left.\begin{array}{l} d(x) = f(x) - f(a) - m_s (x - a) \\ d(a) = f(a) - f(a) - m_s (a - a) = 0 \\ d(b) = f(b) - f(a) - m_s (b - a) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0 \end{array}\right\} d(a) = d(b)$$

Conclusión: d cumple las hip$_{s.}$ de Rolle → "***existe*** $c \in$(a;b) ***tal que*** $d'(c) = 0$ " **(I)**

$d(x) = f(x) - f(a) - m_s (x - a)$

$d'(x) = f'(x) - m_s$

$$\left.\begin{array}{l} d'(c) = f'(c) - m_s \\ \text{(I) } d'(c) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(c) - m_s = 0 \Rightarrow f'(c) = m_s$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \textbf{(q.e.d)}$$

NOTA: probamos también que existe $c \in$ (a;b) tal que $m_t = m_s \Rightarrow$ tal que **t // s .**

Ejemplo 1 : dada $f(x) = x^2$; Df = [-1; 2] hallar $c \in$(-1; 2) tal que **t** // ***s*** **.**

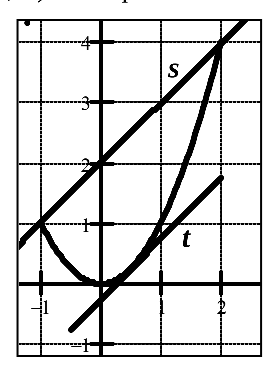
$f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$

¿c? / $c \in$(-1; 2) y $m_t = m_s$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c = \frac{f(2) - f(-1)}{2 + 1}$$

$$2c = \frac{4 - 1}{3} \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = ½$$

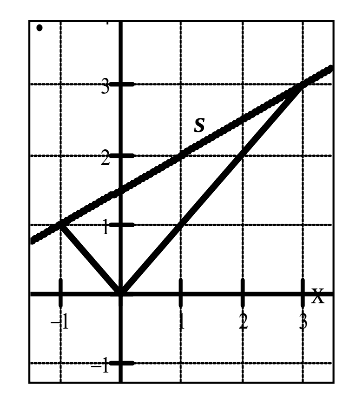


Ejemplo 2 : dada $f(x) = |x|$; Df = [-1; 2] hallar $c \in$(-1; 2) tal que **t** // ***s*** **.**

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & ; \ (-1; 0) \\ 1 & : \ (0; 2) \end{cases}$$

¿c? / $c \in$(-1; 2) y $m_t = m_s$

- $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 + 1} = \dfrac{2 - 1}{3} = \dfrac{1}{3}$
- $f'(x) \neq \dfrac{1}{3}$; $\forall$ x $\in$ (-1; 2)



Conclusión: no existe $c \in$(-1; 2) / $m_t = m_s$

¿Contradice esto el TVMCD? : no, pues en este caso f no es derivable en cero; o sea, f no cumple una de las hipótesis, por lo que puede ***o no*** cumplir la tesis.

Ejemplo 3: (Interpretación física del TVMCD). El TVMCD aplicado a $x = f(t)$, función de posición de una partícula que se desplaza con movimiento rectilíneo, dice que existe al menos un instante donde velocidad instantánea y velocidad media, *coinciden*.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad [\, x = f(t) \rightarrow v = x' = f'(t) \,]$$

$$v(c) = v_m\,[a\,;\,b]$$

Hallar c del TVMCD para $x = \sqrt{t}$, $t \in [0;\,100]$; [x] = cm ; [t] = seg

$$v = f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ (velocidad instantánea)} \quad ; \quad v_m\,[0\,;\,100] = \frac{f(100)-f(0)}{100-0} = 0{,}1$$

$$v(c) = v_m\,[0\,;\,100] \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = 0{,}1 \Rightarrow c = 25 \text{ (seg.)} \qquad [\text{v. inst. = v.media = 0,1 cm/seg}]$$

<u>TEOREMA de CAUCHY</u> (teorema 4)

Hip) a) f y g continuas en [a;b]
b) f y g derivables en (a;b) ; $f'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in$ (a; b)

Tesis) existe $c \in$ (a;b) tal que, $\dfrac{g'(c)}{f'(c)} = \dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$

Demostración:

Interpretando f y g como las funciones correspondientes a las ecuaciones paramétricas de una curva **C**, el teorema de Cauchy dice, en esencia, lo mismo que el de Lagrange: que existe un punto de **C** donde la recta tangente es paralela a la secante.
O sea, Cauchy es la versión de Lagrange para **C** dada por ***ecuaciones paramétricas***.

$$\mathbf{C}: \begin{cases} x = f(t)\,; & t \in [a;b] \\ y = g(t)\,; & t \in [a;b] \end{cases}$$

$$t = a \begin{cases} x_a = f(a) \\ y_a = g(a) \end{cases} A\,(x_a\,;\,y_a)$$

$$t = b \begin{cases} x_b = f(b) \\ y_b = g(b) \end{cases} B\,(x_b\,;\,y_b)$$

Vimos en la práctica que <u>bajo ciertas condiciones</u> la ley de la función que define **C,** se puede expresar con fórmula $y = \varphi(x)$ con $\varphi = g \circ f^{-1}$; $Dom\,\varphi = Im\,f = [\,x_a;\, x_b]$

Que bajo <u>esas condiciones</u> ($f'(t) \neq 0$) φ resulta derivable y su derivada vale**:**

$$\varphi'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}\,; \quad t = f^{-1}(x).$$

Luego, si aplicando Lagrange a φ hallamos que existe $w \in [\,x_a;\, x_b]$ tal que,

$$\varphi'(w) = \frac{\varphi(x_b) - \varphi(x_a)}{x_b - x_a} = \frac{g \circ f^{-1}(x_b) - g \circ f^{-1}(x_a)}{x_b - x_a} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} \quad (1)$$ Por otro lado

si $c = f^{-1}(w)$ entonces $\varphi'(w) = \dfrac{g'(c)}{f'(c)}$ (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{g'(c)}{f'(c)} = \dfrac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$ **(q.e.d.)**

Observación: el teorema de Cauchy se usa, entre otras cosas, para demostrar la ***Regla de L´Hopital*** para el cálculo de límites indeterminados, teorema que vemos a continuación

4.2 Formas Indeterminadas y Regla de L´Hopital

En capítulos anteriores hemos visto como en el cálculo de límites aparecen "*formas indeterminadas*" ($\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$ y otras), las cuales, hasta ahora hemos resuelto mediante manipulaciones algebraicas. Sin embargo no todas las formas indeterminadas se pueden resolver acudiendo al álgebra. Esto resulta particularmente cierto en el caso que se hallan implicadas *funciones trascendentes*, o ambas: *algebraicas y trascendentes* .

Por ejemplo , el límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ produce la indeterminación $\dfrac{0}{0}$.

Para resolverlo acudiendo a manipulaciones algebraicas podemos distribuir ***x,*** obtener:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x}$$, lo que produce la indeterminación $\infty - \infty$.

O sea, nos encontramos ante un caso que "*la indeterminación*" no se puede "*romper*" con sólo manipulaciones algebraicas.

Para resolver este tipo de límites, introducimos un teorema conocido como ***"regla de L´Hopital "*** el cual establece que bajo ciertas condiciones el límite del cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se halla determinado por el límite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Este teorema recibe el nombre en honor del matemático francés G. F. De L´Hopital (1661-1704), el cual lo publicó en 1696.

Si bien el teorema es esencialmente uno, se demuestra de distintas formas según sea el tipo de indeterminación de que se ocupa. A continuación enunciamos y damos ejemplos de los distintos casos pero omitimos las demostraciones por estar fuera de los objetivos de este libro.

TEOREMA 5 : ***Regla de L´Hopital - Caso*** $\frac{0}{0}$

(***Caso*** $\frac{\infty}{\infty}$ cambiando apropiadamente el dominio de f y g)

Hip) a) f y g derivables en (a; b), excepto a lo sumo en $c \in$ [a; b].

b) $g'(x) \neq 0$; $\forall x \in$ (a; b) donde g sea derivable.

c) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ produce la forma indeterminadas $\frac{0}{0}$

d) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \ (L \in R)$

Tesis) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Observaciones:

1) El teorema es válido si todos los límites son *por derecha* (o *por izquierda*) . Esto implica que c puede ser **a** ó **b .**

2) La Regla de L´Hopital también es cierta si x crece (o decrece) sin límites; o sea, si $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$. Por supuesto en este caso se pide f y g derivables en (k ; + ∞) ó (- ∞; - k) con k constante positiva.

3) La Regla es válida si se sustituye L por (+ ∞) ó (- ∞)

4) La Regla de L´Hopital (con todas las variantes indicadas en 1-2-y 3) también se aplica a la ***forma indeterminada*** $\frac{\infty}{\infty}$ en cualquiera de sus posibles formas:

$\frac{+\infty}{+\infty}$; $\frac{+\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{+\infty}$; $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Ejemplos forma indeterminada $\frac{0}{0}$ **ó** $\frac{\infty}{\infty}$ **:**

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{2.e^{2x}}{1} = 2$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

3) Aplicación reiterada de la Regla de L´Hopital*:*

A veces no basta derivar una vez para eliminar la indeterminación. En este caso vale derivar tantas veces como sea necesario para "romper" la indeterminación.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Ejemplos de otras formas de indeterminación: $0.\infty$; ∞^0 ; 0^0 ; 1^∞ ; $\infty - \infty$

Cuando la sustitución directa nos lleve a una de estas formas indeterminadas, el objetivo será reescribir el límite de manera de transformarlo en un **0 / 0** ó **∞ / ∞**

1) Forma indeterminada $0.\infty$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}.\sqrt{x} \underset{0.\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \underset{L'H}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}\,e^x} = 0$$

NOTA: si reescribir el límite de una forma, por ejemplo **0 / 0 ,** no parece dar frutos, conviene probar con la otra forma (en este caso **∞ / ∞) .** Queda como ejercicio reescribir el límite anterior en la forma **0 / 0,** ver que pasa en tal caso

2) Formas indeterminadas ∞^0 ; 0^0 ; 1^∞

Estos casos se pueden presentar cuando tenemos el límite de una función de la forma $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Como en el caso de la derivación de este tipo de funciones reescribimos ***h*** acudiendo a las propiedades de una función y su inversa : en este caso, del logaritmo y la exponencial.

$h(x) = e^{\ln h(x)}$ → *prop:* la composición de una función y su inversa da la identidad

$h(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$ → reemplazamos ***h*** por su igual y aplicamos propiedades de log.

Luego, reemplazamos ***h*** por su igual en el límite y resolvemos.

$$\lim_{x\to p} h(x) = \lim_{x\to p} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to p} g(x).\ln f(x)}$$

Luego, y en última instancia, lo que debemos resolver es el $\lim_{x\to p} g(x).\ln f(x)$ **(I)** ; o sea, el límite de un producto de funciones. Se presentan distintas situaciones :

A) Caso ∞^0: **[** $f(x) \to +\infty$; $g(x) \to 0$ **]** → En **(I)** queda el **Caso 0 . (+ ∞)**

B) Caso 0^0 : **[** $f(x) \to 0^+$; $g(x) \to 0$ **]** → En **(I)** queda el **Caso 0 . (- ∞)**

C) Caso 1^∞ : **[** $f(x) \to 1$; $g(x) \to \infty$ **]** → En **(I)** queda el **Caso ∞ . 0**

Conclusión en cualquiera de las tres formas de indeterminación indicada, aplicando las propiedades señaladas llegamos al **Caso 0.∞** ; que ya sabemos resolver.

Ej 1) $$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x.\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x.\ln x} \overset{(*)}{=} e^0 = 1$$

$$(*)\ \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \underset{L'H}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Ej 2) $$\lim_{x\to+\infty} (1-\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x.\ln(1-(1/x))} = e^{\lim_{x\to+\infty} x.\ln(1-(1/x))} \overset{(*)}{=} e$$

$$(*)\ \lim_{x\to+\infty} x.\ln(1-(1/x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-(1/x))}{1/x} \underset{L´H}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}} = 1$$

3) <u>Forma indeterminada</u> ∞ - ∞

Cuando la sustitución directa nos lleva a una indeterminación de la forma ∞ - ∞ probamos a reescribir la función para obtener una forma a la cual le podamos aplicar la regla de L´Hopital, ya sea directamente o después de transformarla de nuevo a tal efecto.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) \underbrace{=}_{\infty-.\infty} \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x-1)-\ln x}{\ln x.(x-1)}\right) \underset{L´H}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-(1/x)}{(1/x).(x-1)+\ln x}\right) \underset{algeb.}{\overset{trabajo}{=}} \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{(x-1)+x\ \ln x}\right) \underset{L´H}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1+x(1/x)+\ln x}\right) \underset{algeb.}{\overset{trabajo}{=}} \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{2+\ln x}\right) = \frac{1}{2}$$

4) <u>Un límite infinito</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \underset{L´H}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

..... y verificamos así que e^x es un ***infinito de orden superior*** a x para x → + ∞

<u>Observación</u> : hay formas similares o parecidas a las formas indeterminadas que ***no son indeterminadas.*** Para diferenciarlas es muy importante tener bien en claro hacia donde tiende la variable, particularmente cuando la variable crece o decrece (***x*** → + ∞ ó ***x*** → - ∞).

Algunos ejemplos: (+ ∞ + ∞ → + ∞); (- ∞ - ∞ → - ∞); ($\mathbf{0}^{+\infty}$ → **0**); ($\mathbf{0}^{-\infty}$ → + ∞)

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\left[\frac{0}{\infty}\right]}{=} 0$ (no es un caso indeterminado, <u>no se aplica L´Hopital</u>)

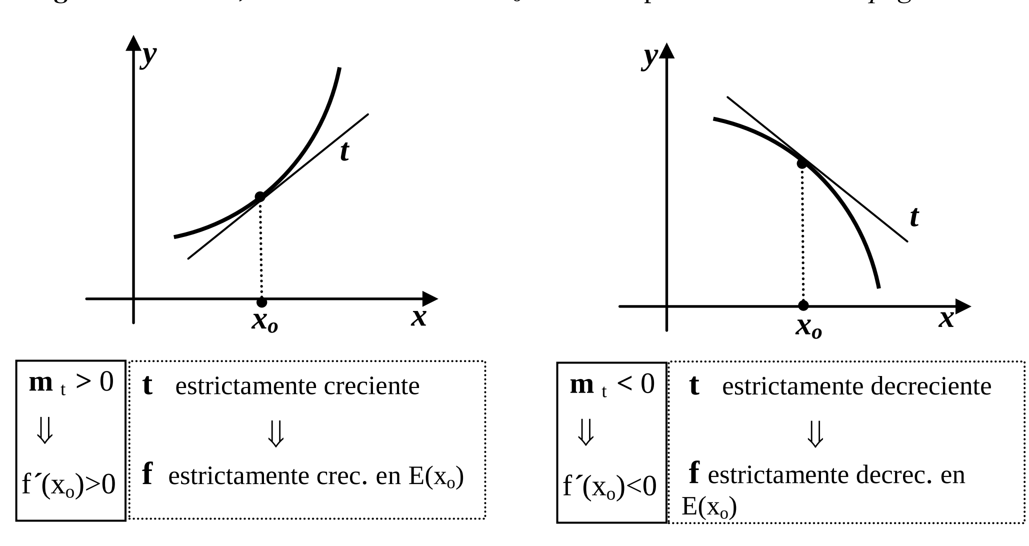
b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (no es un caso indeterminado, <u>no se aplica L´Hopital</u>)

Verificar que si en este caso aplicara L´Hopital obtendría un resultado distinto.

4.3 Aplicaciones de la derivada para el estudio de funciones

Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento de Función.

En la búsqueda de criterios para la determinación de intervalos de monotonía de una función vamos a acudir a ciertos resultados de la geometría, en particular al de *recta tangente a una curva*. Al respecto vimos que para ***y=f(x),*** **C** = graf f , si ***f*** es derivable en x_o entonces existe **t**, recta tg a **C** en **P**(x_o; y_o) y $\mathbf{m}_{\mathbf{t}} = f'(x_o)$. Presentamos también un principio básico del cálculo diferencial: ***"toda curva suave, en las proximidades del punto de contacto, puede ser asimilada a su recta tangente ".*** O sea, existe un entorno de x_o donde **C** prácticamente *"se pega"* a **t.**



Los gráfico anteriores muestran como el signo de $f'(x_o)$ estaría informando acerca del comportamiento de la función (*crece o decrece*), en el entorno x_o. Si bien este hecho es "*evidente*", para estar seguro que la intuición no nos está jugando una mala pasada, debemos "*demostrar*" esto que descubrimos con el auxilio de la geometría, prescindiendo de gráficos, usando sólo *resultados teóricos previos ya probados*.

A este respecto el TVMCD (Lagrange) permite demostrar con todo rigor lo empíricamente observado: que existe una estrecha relación entre el crec./decrec. de una función en un intervalo y el signo de su derivada en dicho intervalo.

TEOREMA 6

Hip) f continua en [a;b] y derivable en (a;b),

Tesis) a) $f'(x) > 0$; $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ f estrictamente creciente en [a; b].

b) $f'(x) < 0$; $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ f estrictamente decreciente en [a; b] ,

c) $f'(x) = 0$; $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ $f(x) = k$; $\forall x \in [a; b]$

Demostración :

Sean x_1 y x_2 tal que $a \le x_1 < x_2 \le b$ $\Rightarrow$ $[x_1 ; x_2] \subseteq [a; b]$

Luego f es continua en $[x_1 ; x_2]$ y derivable en $(x_1 ; x_2)$; o sea , *cumple las hipótesis de Lagrange en* $[x_1 ; x_2]$ $\Rightarrow$ existe $c \in (x_1 ; x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1)$$

a) $f'(x) > 0 ;\ \forall x \in (a; b) \quad \Rightarrow \quad f'(c) > 0$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

Tenemos entonces que: $\forall x_1 ; x_2 \in [a;b] ; \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

o sea que, f es estrictamente creciente en [a;b] . **(q.e.d.)**

b) $f'(x) < 0 ;\ \forall x \in (a; b) \quad \Rightarrow \quad f'(c) < 0$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$$

Tenemos entonces que: $\forall x_1 ; x_2 \in [a;b] ; \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$

o sea que, f es estrictamente decreciente en [a;b] . **(q.e.d.)**

c) $f'(x) = 0 ;\ \forall x \in (a; b) \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 0$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1)$$

Tenemos entonces que: $\forall x_1 ; x_2 \in [a;b] ; \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$

$\forall x \in (a;b]; \quad a < x \quad \Rightarrow \quad f(a) = f(x)$

o sea que, $f(x) = k \ ;\ \forall x \in [a; b]$ **(q.e.d.)**

<u>Observación</u>:

Probada la *verdad* de **p ⇒ q** , investigamos la verdad de su recíproca:

➢ ***<u>directa</u>*:** p ⇒ q **;** **(a)** "$f'(x) > 0;\ \forall x \in (a; b) \Rightarrow f$ estrict. crec. en [a; b]"**.** **(V)**

➢ ***<u>recíproca</u>***: **¿q ⇒ p?** "f estrict. crec. en [a;b] ⇒ $f'(x) > 0;\ \forall x \in (a; b)$ ". **(F)**

<u>Contraejemplo</u>: $\mathbf{f(x) = x^3}$ **;** **f** estrict. crec. en [-2; 2] y $\mathbf{f'(0) = 0}$ **.**

➢ ***<u>directa</u>***: p ⇒ q **;** **(c)** "$f'(x) = 0 ;\ \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x) = k ;\ \forall x \in [a; b]$" **(V)**

➢ ***<u>recíproca</u>***: **¿ q ⇒ p?** (ejercicio)

<u>Ejem plo 1</u>: Hallar intervalos de monotonía de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

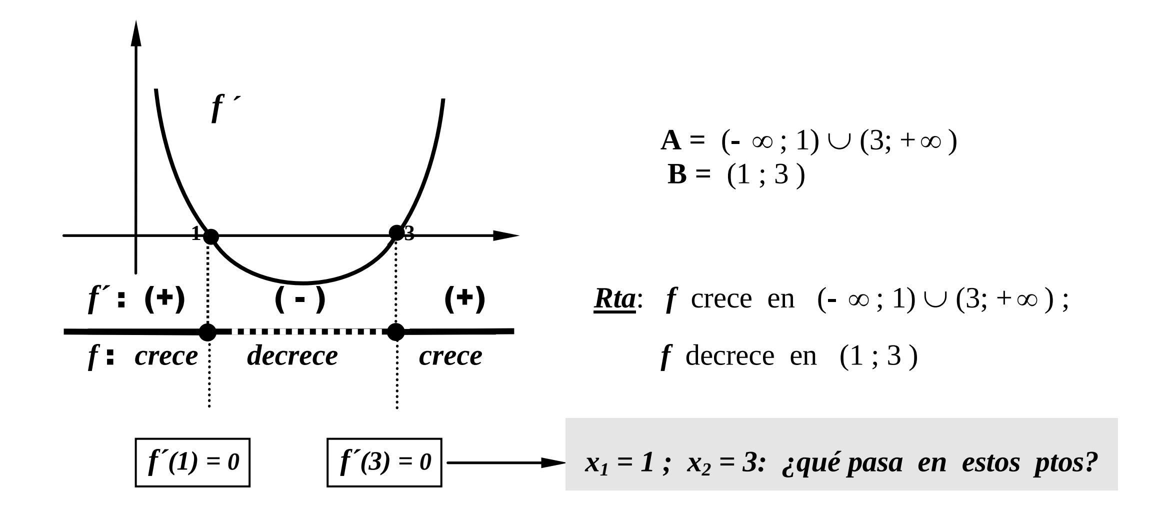
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$;	$\mathbf{D}f = \mathbf{R}$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$;	$\mathbf{D}f' = \mathbf{R}$

TEO 6 → para hallar intervalos de monotonía debemos estudiar el signo de ***f ´ :***

o sea , hallar: $\mathbf{A} = \{ x \in \mathrm{R} \ / \ f'(x) > 0 \}$ (f ↑)

$\mathbf{B} = \{ x \in \mathrm{R} \ / \ f'(x) < 0 \}$ (f ↓)

Las inecuaciones planteadas pueden resolverse por distintos métodos, en este caso, dado que ***f´*** es conocida (*cuadrática*) acudimos al ***<u>método gráfico</u>***:



Observación 1 : Por Teo 1 y derivados del mismo, sabemos que:
[En lo que sigue; ***CN***: *condición necesaria*; ***CS***: *condición suficiente*]

- f *derivable* en x_o y $f´(x_o) = 0$ es ***CN*** para que exista un extremo en x_o .
- f *derivable* en x_o y $f´(x_o) = 0$ no es ***CS*** para que exista un extremo en x_o .
- f *no derivable* en x_o ; puede (o no) existir extremo en x_o .

En definitiva,

¿en donde buscamos un punto de extremo?: entre todos los puntos en donde es posible que este exista ; o sea, entre todos los **c** tal que $f´(\mathbf{c}) = 0$ ó $f´(\mathbf{c})$ no existe.

¿recordando qué?: que no necesariamente en tales puntos hay extremos de f .

Así, en el ***ej. 1***, si hay extremos estos necesariamente están en $x_1 = 1$ y/ó $x_2 = 3$; no pueden encontrarse en otro punto del dominio aunque sí puede suceder que en uno de ellos (o los dos) no haya extremo. Luego, debemos buscar métodos para resolver esta cuestión, investigar que otra cosa puede pasar en un punto **c** donde $f´(\mathbf{c}) = 0$ ó $f´(\mathbf{c})$ no exista. A estos puntos tan "críticos" los llamamos: ***puntos críticos*** .

Definición : ***Punto crítico***

Llamamos punto crítico a todo punto ***c*** del dominio de ***f*** tal que:
$f´(\mathbf{c}) = 0$ ó $f´(\mathbf{c})$ no existe .

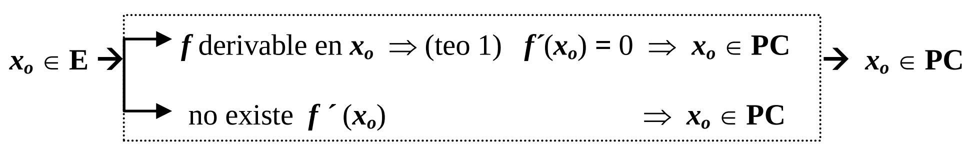
PC = $\{ c \in Df \ / \ c$ ***punto crítico de f*** $\}$

PC = $\{ c \in Df \ / \ f´(\mathbf{c}) = 0$; no existe $f´(\mathbf{c})$; f discontinua en $c \}$

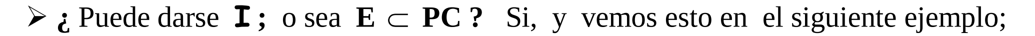
Observación 2: (relación entre puntos de extremo y puntos críticos).

Sea $\mathbf{E} = \{ x_o \in Df \ /$ ***en*** x_o ***hay un extremo de f*** $\}$.

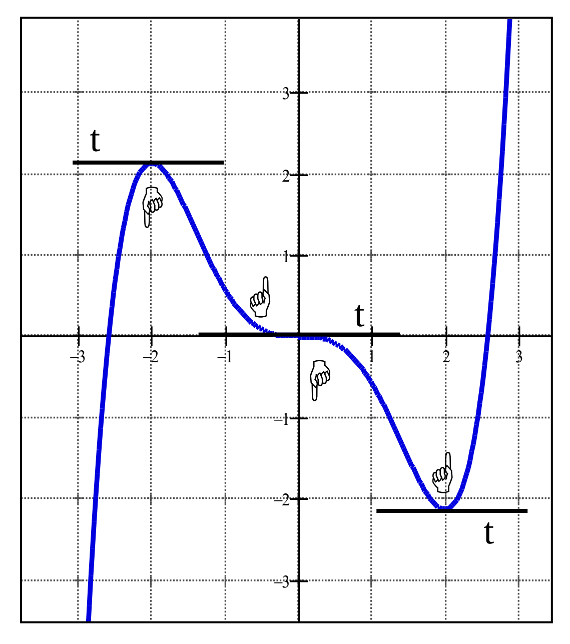
- **E ⊆ PC .**



Tenemos así dos situaciones posibles: **I** PC • c E **II** PC = E



➢ ¿ Puede darse **I ;** o sea **E ⊂ PC ?** Si, y vemos esto en el siguiente ejemplo;



"leyendo del gráfico" vemos que:
f es derivable en todos sus puntos,
$f'(-2) = 0$; $f'(0) = 0$; $f'(2) = 0$

➩ **PC = { *-2 ; 0 ; 2* } .**

También del gráfico leemos que en *-2* hay un M_r y en *2* un m_r ;

➩ **E = { *-2 ; 2* } .**

En un entorno de ***c* = *0* ,** observamos que:

☝: *-1*< *x*< **0** → ***graf f*** "*por arriba*" de **t** ☟: **0**< *x* <*1* → ***graf f*** "*por debajo*" de **t**

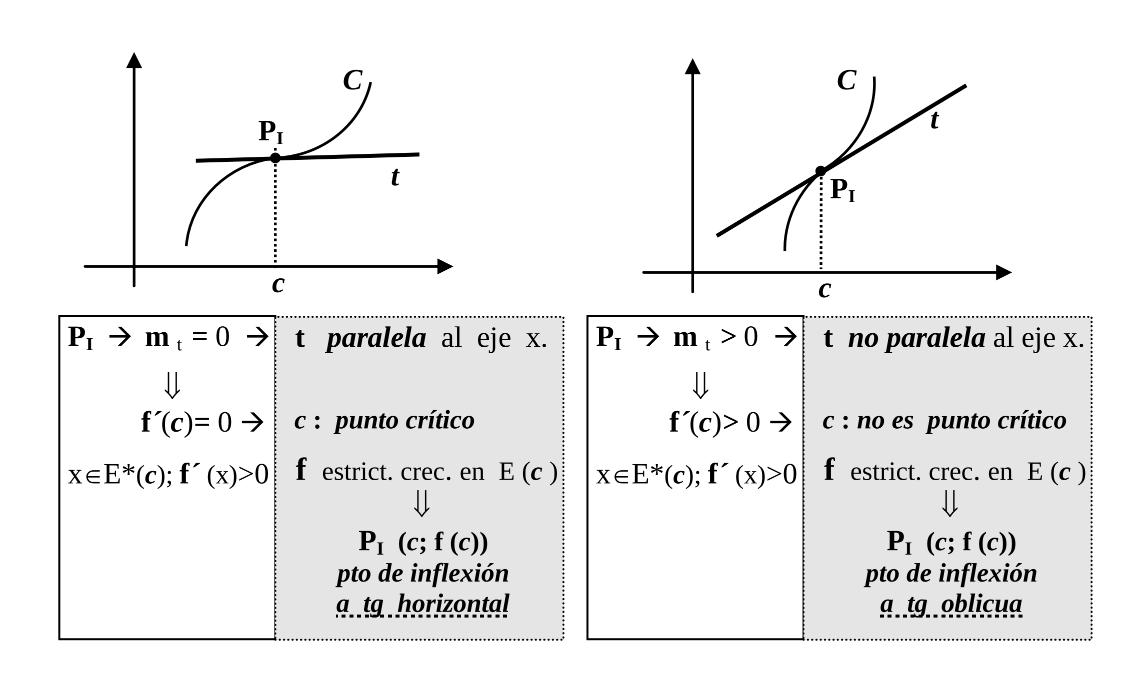
o sea, que no se dan las condiciones gráficas para la existencia de extremo: ***graf f*** *toda* por debajo (o por arriba) de **t ,** recta tg en el pto.

***Conclusión*:** pueden existir puntos críticos donde no haya extremos relativos.

Observamos que en un punto de este tipo, si existe recta tangente, esta aparece ´*atravesando*´ el gráfico de la función. Esta situación se repite cada vez que tenemos un punto crítico que no es extremo; luego, es algo que caracteriza a estos puntos, permite por lo tanto "***definir***" estos puntos, los que llamamos: ***puntos de inflexión.***

Definición *(geométrica):* ***Punto de Inflexión* , P_I**

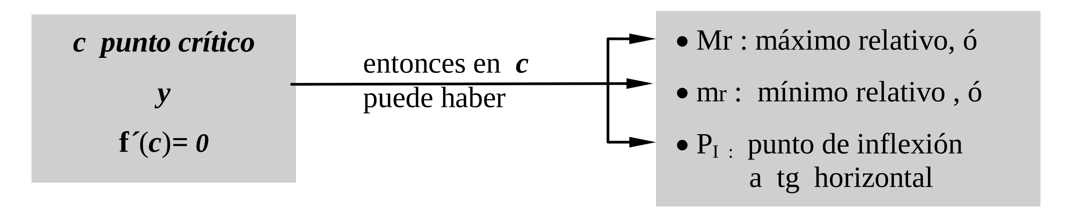
Dado **P (*c*; *f* (*c*)),** un punto de **C = *graf f*** , decimos que **P** es un punto de inflexión si la recta tangente a **C** en **P,** "atraviesa" la curva. (es decir, parte de **C** queda "por arriba" de **t** y parte "por debajo", produciéndose el cambio justo en **P**) .



P_I → $m_t = 0$ → ⇓ $f'(c) = 0$ → $x \in E^*(c)$; $f'(x) > 0$	**t** ***paralela*** al eje x. *c* : *punto crítico* **f** estrict. crec. en E (*c*) ⇓ **P_I (*c*; f (*c*))** ***pto de inflexión*** ***a tg horizontal***

P_I → $m_t > 0$ → ⇓ $f'(c) > 0$ → $x \in E^*(c)$; $f'(x) > 0$	**t** ***no paralela*** al eje x. *c* : *no es punto crítico* **f** estrict. crec. en E (*c*) ⇓ **P_I (*c*; f (*c*))** ***pto de inflexión*** ***a tg oblicua***

Observación 3: concluimos entonces que:



**** Continuación ej. 1 :*** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; analizamos si hay extremos

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$; $Df' = \mathbf{R}$

PC $= \{ x \in Df \ / \ f'(x) = 0 \} = \{ 1 ; 3 \}$

$x_1 = 1$ → • Mr ? • mr ? • P_I ?

$x_2 = 3$ → • Mr ? • mr ? • P_I ?

En este punto no tenemos *herramientas analíticas* para resolver este problema; pero como tenemos mucha información sobre ***f*** , si la organizamos de modo apropiado podemos graficar ***f*** , resolver el problema *´leyendo del gráfico´*.

A los efectos de graficar ***f***, nos organizamos de la siguiente forma:

1) listamos toda la información relativa a dominio, límites, continuidad, etc ; es decir, todas las características de la función que podemos obtener sin acudir a la derivada.

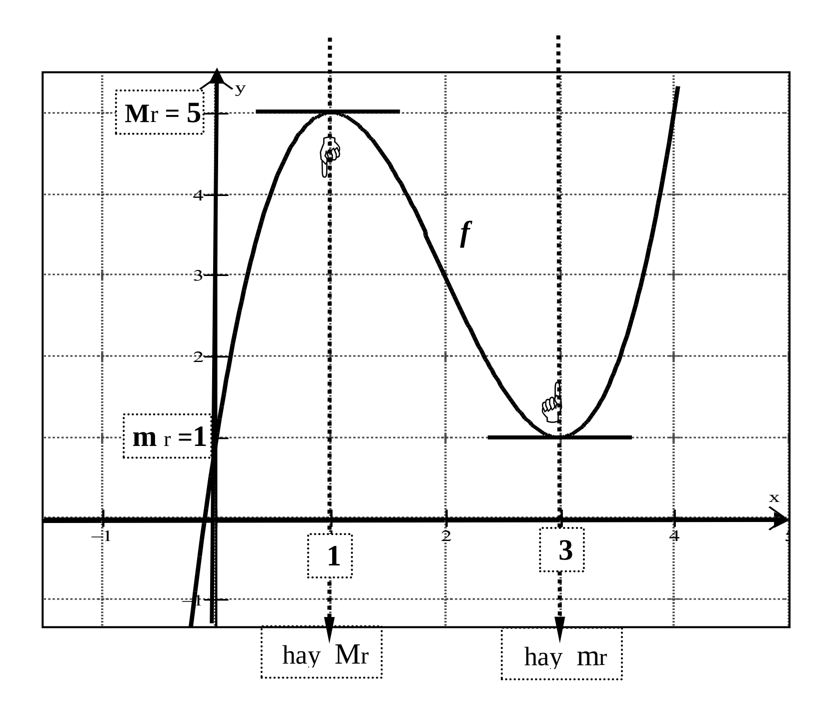
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$ *(polinomio)*

  a) D*f* = **R**
  b) Dominio continuidad = **R** (→ no hay saltos ni agujeros en el ***graf pol.***).
  c) Dominio derivabilidad = **R** (→ no hay ptos angulosos en el ***graf pol.***).
  d) *ceros de* ***f*** : $f(x) = 0$ (difíciles de determinar, los dejamos para luego).
  e) *simetrías:* ***f*** *no es par ni impar* (→ ***f*** tiene potencias pares e impares).
  f) *asíntotas*: no hay (→ los polinomios no tienen asíntotas)
  g) *acotación:* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; luego,
  f no es *acotada superior ni inferiormente.*

2) el resto de la información la organizamos en un "*cuadro de situación*" como se muestra a continuación. Este cuadro facilita el procesamiento y articulación de la información que brinda la derivada; por ende, la obtención del ***graf f .***

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

	x < 1	**1**	1< x <3	**3**	3 < x
f(x)		5		1	
f´(x)	**(+)**	0	**(-)**	0	**(+)**
f →	***crece***	***¿ ?***	***decrece***	***¿ ?***	***crece***



Finalmente concluimos que; en $x_1 = 1$ hay un máximo relativo (**M**r **= 5**) y que,
en $x_2 = 3$ hay un mínimo relativo (**m** r =*1* **).**

Observamos también que la derivada cambia de signo al pasar por $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$; o sea, por los puntos donde la función presenta extremos relativos. Esto sugiere un camino para la determinación de extremos, el que probamos en el siguiente teorema:

TEOREMA 7 – ***Criterio de la derivada 1ra para la determinación de extremos (relat.)***

Sea f continua en [a;b]**;** f derivable en (a;b) excepto a lo sumo en **c** ∈ (a;b), con **c** un punto crítico de f ; entonces:

a) $f'(x) > 0$; $\forall x \in (a; \mathbf{c})$
$f'(x) < 0$; $\forall x \in (\mathbf{c}; b)$ ⇒ en **c** hay un **M**r de f

b) $f'(x) < 0$; $\forall x \in (a; \mathbf{c})$
$f'(x) > 0$; $\forall x \in (\mathbf{c}; b)$ ⇒ en **c** hay un **m**r de f

Demostración :

a) $f'(x) > 0;\ \forall x \in (a;\mathbf{c}) \overset{Teo\ 6}{\Rightarrow} f$ estrict. crec. en [a; **c**] ; o sea, $x < \mathbf{c} \Rightarrow f(x) < f(\mathbf{c})$.

$f'(x) < 0;\ \forall x \in (\mathbf{c};b) \overset{Teo\ 6}{\Rightarrow} f$ estrict. decrec. en [**c**;b] ; o sea, $\mathbf{c} < x \Rightarrow f(\mathbf{c}) > f(x)$.

o sea; $\forall x \in (a;\mathbf{c}) \cup (\mathbf{c}; b)$ es $f(x) < f(\mathbf{c})$ ⇒ en **c** hay un **M**r de f **.** **(q.e.d.)**

b) idem (ejercicio)

Observación 1 : el Teo. 7 puede aplicarse aún en el caso que no exista $f'(c)$, de allí la potencia del criterio de la derivada 1ra.

Observación 2 : con el Teo. 7 queda entonces demostrado que los puntos donde hay extremos se encuentran donde la ***derivada 1ra cambia de signo***.

<u>COROLARIO TEO. *7*</u> : los ***<u>puntos de inflexión</u>*** a tg horizontal, si existen, se encuentran en los puntos críticos donde la ***<u>derivada 1ra NO cambia de signo</u>***

➢ ***<u>Pasos para la búsqueda de extremos relativos</u>***

(1º) Hallar f'.

(2º) Hallar los puntos críticos de f.

(3º) Aplicar el "***criterio de la derivada 1ra***" (Teo. 7) y el ***corolario*** del Teo. 7

Aplicar este criterio requiere estudiar el ***signo de*** f'.
Existen distintas formas de realizar este estudio, y cual de ellas conviene usar depende de la función en estudio, su forma o características particulares.
Luego, lo aconsejable es conocer los distintos métodos existentes para el caso.

➢ ***<u>Análisis del signo de una función.</u>***

Dada $y = g(x)$, existen 3 métodos a los que podemos acudir para hallar el ***sg*** $g(x)$.

(I) ***<u>Gráfico</u>***, consiste en graficar g ; resolver luego ´*leyendo*´ del gráfico.

(II) ***<u>Algebraico</u>***, consiste en proponer $g(x) > 0$ ó $g(x) < 0$, resolver luego, y según las reglas del álgebra, las *inecuaciones* que quedan planteadas.

(III) ***<u>Numérico</u>*** : ó "***método del punto de prueba***".

Este método se basa en una propiedad de las funciones continuas conocida como "<u>Invariancia del Signo</u>" (ver #) y consiste en 3 pasos siguientes:

(1º) subdividir el dominio de g en subintervalos **I** , tal que g sea continua en **I** y $g(x) \neq 0$, $\forall x \in$ **I.**

(2º) elegir un punto de prueba (x^*) en cada **I** obtenido en (1º), calcular $g(x^*)$.

(3º) ***<u>concluir</u>***: **sg** $g(x)$ = **sg** $g(x^*)$, $\forall x \in$ **I** ; o sea:

- $g(x^*) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$, $\forall x \in$ **I** .
- $g(x^*) < 0 \Rightarrow g(x) < 0$, $\forall x \in$ **I** .

(#) "***Invariancia del signo***"

g ***continua en*** **I** $g(x) \neq 0$; $\forall x \in$ **I**	$\Rightarrow$	g ***no cambia de signo en*** **I** ; ***o sea***: **a)** ***existe*** $x^* \in$ **I** / $g(x^*) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$, $\forall x \in$ **I** **b)** ***existe*** $x^* \in$ **I** / $g(x^*) < 0 \Rightarrow g(x) < 0$, $\forall x \in$ **I**

Demostración: (demostramos por el ABSURDO)

a) dada $x^* \in$ **I** / $g(x^*) > 0$ *suponemos* existe $x \in$ **I** / $g(x) < 0$.
Luego, por Bolzano, existe $c \in$ **I** tal que $g(c) = 0$ (**ABS**, contradice hip.).
Si al suponer que existe $x \in$ **I** / $g(x) < 0$ llegamos a un absurdo esto implica que tal x no puede existir; o sea que, $\forall x \in$ **I,** $g(x) > 0$. **(q.e.d.)**

b) idem (ejercicio).

<u>Ejemplo 2</u>: Dada $f(x) = x^4 - 8x^2$; hallar extremos relativos de f . Graficar f.

Para resolver este problema procedemos a:

1) hacer un listado de las características generales de $f(x) = x^4 - 8x^2$:

a) Df = **R** (***f:*** *polinomio)*
b) Dominio continuidad = **R** (→ no hay saltos ni agujeros en el ***graf f***).
c) Dominio derivabilidad = **R** (→ no hay ptos angulosos en el ***graf f***).

d) *ceros de* f : $f(x) = x^4 - 8x^2 = x^2(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,;\, -\sqrt{8} \,;\, \sqrt{8}$
e) *simetrías:* ***f*** es par ⇒ ***graf f*** simétrico respecto del eje y.

g) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \,;\; \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ ***f*** *no es acotada superiormente.*

2) Para hallar los extremos relativos seguimos los pasos indicados en pag, 282.

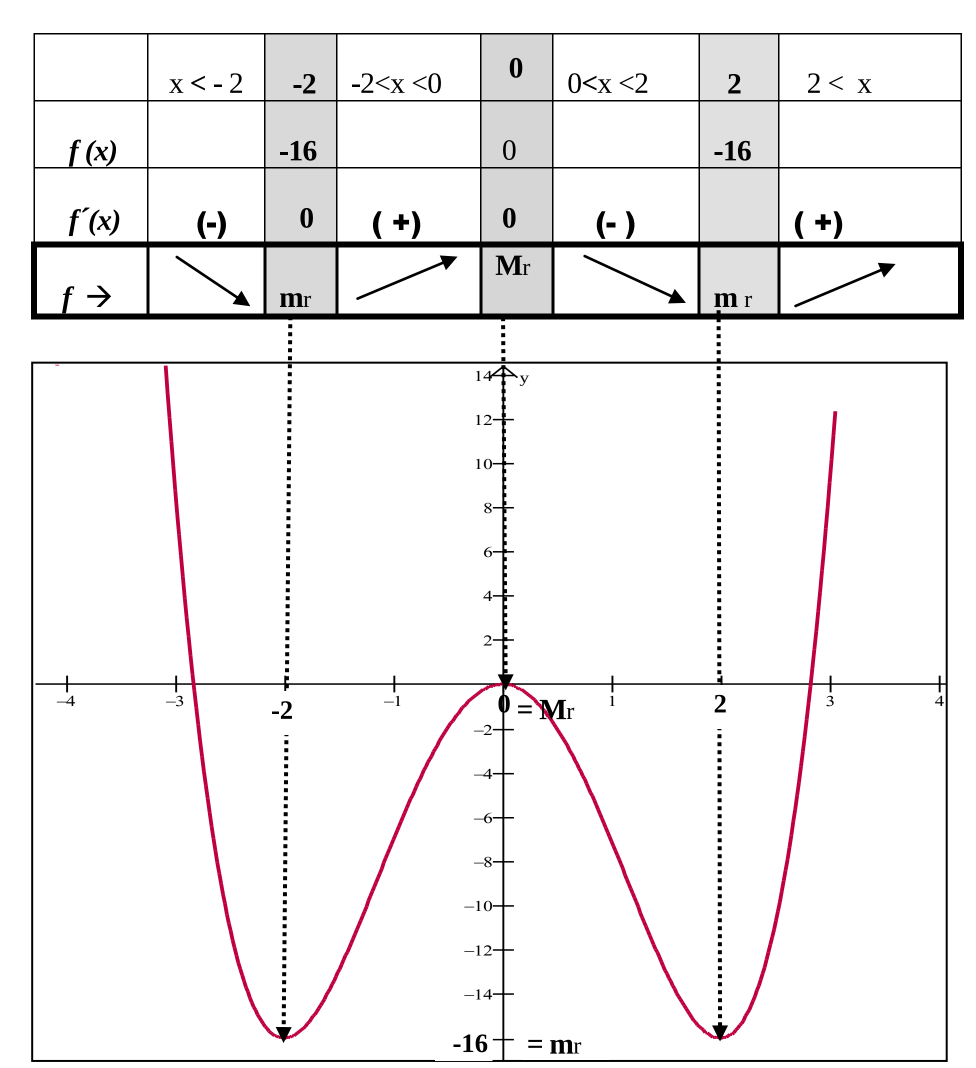
(1º) hallamos $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$

(2º) hallamos ptos críticos: ***f*** derivable en **R** ⇒

$$PC = \{ x \in R \,/\, f'(x) = 0 \} = \{ -2 \,;\, 0 \,;\, 2 \}$$

(3º) estudiamos signo de f' . Aquí conviene el "*método del punto de prueba*".
Organizamos la información en un *cuadro de situación*; concluimos con Teo.7

	x < - 2	**-2**	-2<x <0	**0**	0<x <2	**2**	2 < x
f (x)		**-16**		0		**-16**	
f´(x)	**(-)**	**0**	**(+)**	**0**	**(-)**		**(+)**
f →	↘	**m**r	↗	**M**r	↘	**m** r	↗



Conclusión : $f(x) = x^4 - 8x^2$ presenta extremos relativos en -2 ; 0 ; 2 :

- **M**r = ***f (0) = 0***
- **m** r = ***f (-2) = f(2) = -16.***

Leyendo del gráfico concluimos que: $m_r = -16 = m_a$ (***mínimo absoluto***);
que f es acotada inferiormente e ***Im f* = [-16; +∞].**

Ejemplo 3: Dada $f(x) = \dfrac{x^2-27}{x-6}$; hallar extremos relativos de f. Graficar ***f.***

1) Procedemos a listar las características generales de $f(x) = \dfrac{x^2-27}{x-6}$:

a) $D_f = \mathbf{R} - \{6\}$
b) Dominio continuidad = $\mathbf{R} - \{6\}$ (→ el ***graf f*** hay un ***salto*** en $x = 6$).
c) Dominio derivabilidad = $\mathbf{R} - \{6\}$ (f discontinua en $x = 6$) .
d) *ceros de f* : $f(x) = x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{27}\ ;\ \sqrt{27}$
e) *simetrías:* f no es par ni impar $\Rightarrow$ ***graf f*** no presenta simetrías.
f) *asíntotas*: $\lim_{x\to 6^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 6^-} f(x) = -\infty \Rightarrow a_{vert}: x = 6$.
g) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ f *no es acotada.*

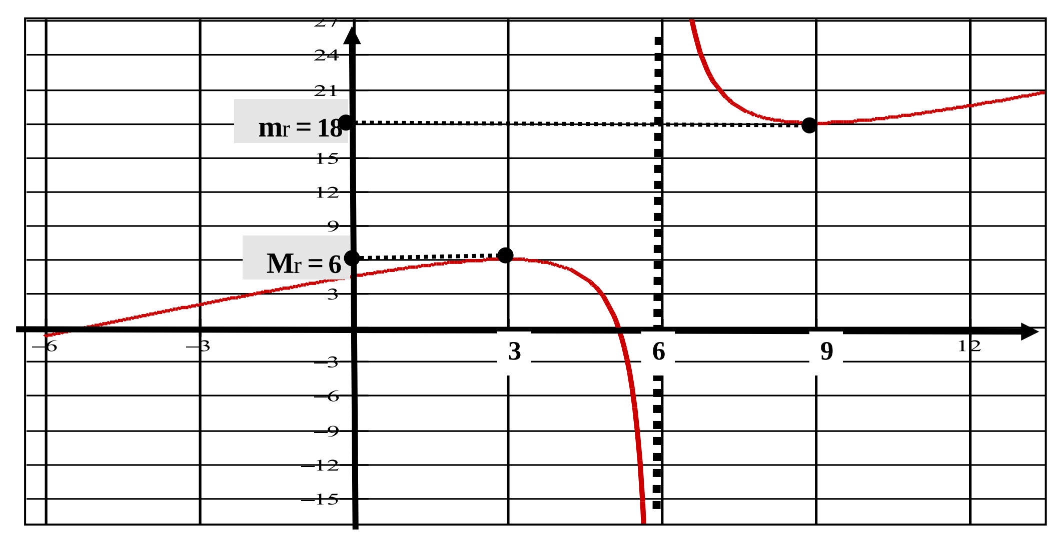
2) Extremos relativos, intervalos de monotonía.

(1º) hallamos $f'(x) = \dfrac{x^2-12x+27}{(x-6)^2} = \dfrac{(x-3).(x-9)}{(x-6)^2}$

(2º) ptos críticos: **PC** = $\{x \in R \,/\, f'(x) = 0 \wedge x = 6\} = \{3 ; 9 ; 6\}$

(3º) Signo de f' por el "*método del punto de prueba*".

	x < 3	3	3<x < 6	6	6< x <9	9	9 < x
f (x)		6		∄		18	
f ´(x)	(+)	0	(-)	∄	(-)		(+)
f →	↗	M_r	↘	a_v	↘	m_r	↗



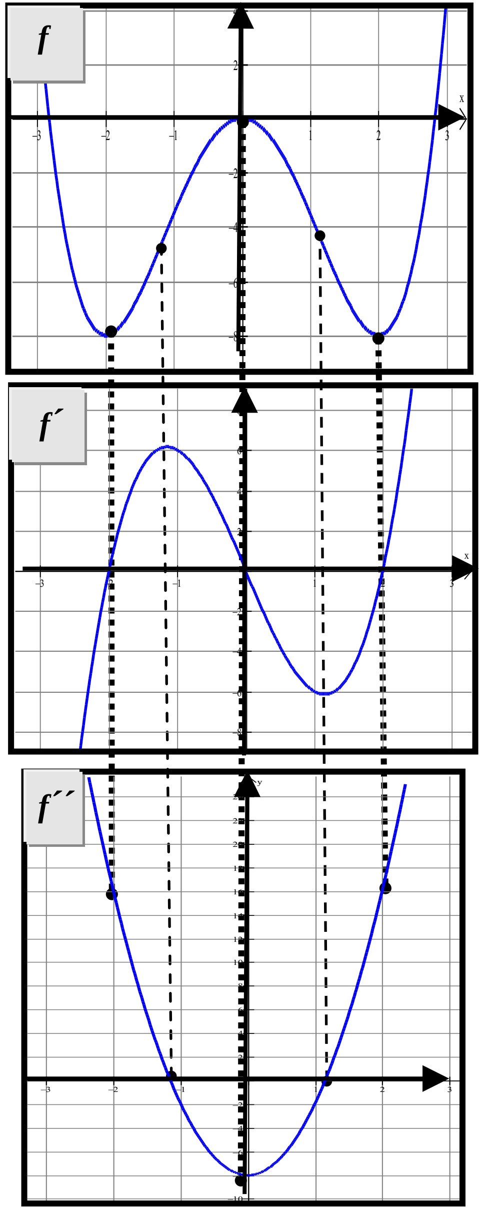
Conclusión : $f(x) = \dfrac{x^2-27}{x-6}$ presenta extremos relativos en 3 ; 9 :

- M_r = ***f (3) = 6***
- m_r = ***f (9) = 18.***

Estos resultados pueden parecer *´contradictorios´* , *¿el máximo menor que el mínimo*?. No olvidemos que son extremos *´relativos´*, que las correspondientes desigualdades se verifican en un entorno del punto. Además, en este caso, *´separando´* ambos puntos de extremo hay una asíntota vertical. ***x = 6 .***

Observamos también que ***f*** no es acotada ; que ***Im f* = (- ∞ ; 6] ∪ [18 ; + ∞]**

↳ APLICACIONES DE LA DERIVADA 2da



Los gráficos adjuntos corresponden a una función ***f*** y dos derivadas: ***f ´*** y ***f ´´***

En ellos verificamos resultados, "vemos" otros

Por ejemplo, verificamos que:

- en ***x***: **-2; 0; 2** (exts relats.) → ***f ´(x)* = *0.***

detectamos que:

- en ***x***: **-2; 2** (míns. rels.) → ***f´´(x)* > *0***
- en ***x***: **0** (máx. rel.) → ***f´´(x)* < *0***

también observamos que:

- los ***x´s*** tal que ***f´´(x) = 0***, se corresponden con puntos donde ***f´*** presenta ***extremos***, los cuales a su vez señalan puntos del ***graf. f*** donde la *´curvatura´* de la curva, *´cambia´* .

O sea, pareciera que los ***x´s*** donde ***f´´(x) = 0*** señalan ***puntos de inflexión a tg ´oblicua´*** , los cuales todavía no sabemos como detectar.

Lo observado nos indica que ***f´´(x),*** su valor o signo, también estaría dando información sobre el ***graf. f*** .

Luego, en lo que sigue nos ocupamos de analizar la derivada 2da; comprobar si lo observado para este ejemplo es una propiedad que vale para todas las curvas continuas y derivables.

TEOREMA 8 – ***Criterio de la derivada 2da para la determinación de extremos (relat.)***

Sea **c** un punto crítico de ***f*** y ***f*** dos veces derivable en ***c***; entonces:

a) $f''(c) > 0$ $\Rightarrow$ en **c** hay un **m**r de ***f*** ***(mínimo relativo)***

b) $f''(c) < 0$ $\Rightarrow$ en **c** hay un **M**r de ***f*** ***(Máximo relativo)***

c) $f''(c) = 0$ $\Rightarrow$ ***el criterio no decide.***

Demostración:

Primero observamos que ***f*** dos veces derivable en ***c*** implica existen $f'(c)$, $f''(c)$; luego , **c** es un punto crítico de ***f*** donde existe la derivada $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$

a) $f''(c) > 0 \Rightarrow f''(c) = (f')'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{x - c}$

O sea ; $\lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{x - c} = f''(c) > 0$; luego, por *Teor. conservación del signo,*

existe un entorno de ***c*** donde $\dfrac{f'(x)}{x - c} > 0$; $\forall$ **x** $\in$ **E*(c; δ).**

$c-\delta$ $\quad c \quad$ $c+\delta$

Entonces:

- $c - \delta < x < c \Rightarrow x - c < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$
- $c < x < c + \delta \Rightarrow x - c > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Teo.7(a) $\Rightarrow$ ***en c hay mínimo relativo***

(q.e.d)

b) idem (ejercicio)

c) • $f(x) = x^3$; $f'(0) = f''(0) = 0$ → en $c = 0$ ***hay punto de inflexión***

• $f(x) = x^4$; $f'(0) = f''(0) = 0$ → en $c = 0$ ***hay mínimo relativo***.

O sea, para $f'(c) = f''(c) = 0$, en ***c*** pueden darse distintas situaciones, las que dependen de la función del caso; de allí que el criterio de la derivada 2da, en este caso, no proporciona información alguna acerca de lo que pasa en ***c.***

Ejem plo 4: Hallar extremos de $f(x) = x^3 + 3/2\, x^2 - 6x + 3$

$f(x) = x^3 + 3/2\, x^2 - 6x + 3$

$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$

$f''(x) = 6x + 3$

PC	$c_1 = -2$	$c_2 = 1$
f	13	- ½
f'	0	0
f''	-9< 0	9>0

Mr = *13* **m**r = - ½

El criterio de la derivada 2da se puede generalizar, tenemos así el:

Criterio de la derivada enésima para la determinación de extremos (relativos)

Sea c tal que:

$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \ldots\ldots\ldots\ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$

$f^{(n)}(c) \neq 0$



A) n ***par*** $\Rightarrow$ en c hay un extremo relativo

- $f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow$ en c hay ***mínimo relativo***, $m_r = f(c)$
- $f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow$ en c hay ***máximo relativo***, $M_r = f(c)$

B) n ***impar*** $\Rightarrow$ en c hay un punto de inflexión a tg. horizontal, $P_I(c\,;f(c))$

Ejem plo 5: Hallar extremos de $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$f(x) = 3x^5 - 5x^3 = x^3(3x^2 - 5)$

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$

$f''(x) = 60x^3 - 30x$

PC $= \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f'(x) = 0 \} = \{ -1\,;0\,;1 \}$

PC	$c_1 = -1$	$c_2 = 0$	$c_3 = 1$
f	2	0	-2
f'	0	0	0
f''	$-30 < 0$	0	$30 > 0$
	Mr = 2	**¿..?**	**mr = -2**

- ***¿c = 0 ?***: si solo buscamos extremos, acudimos al ***criterio de la derivada enésima:***

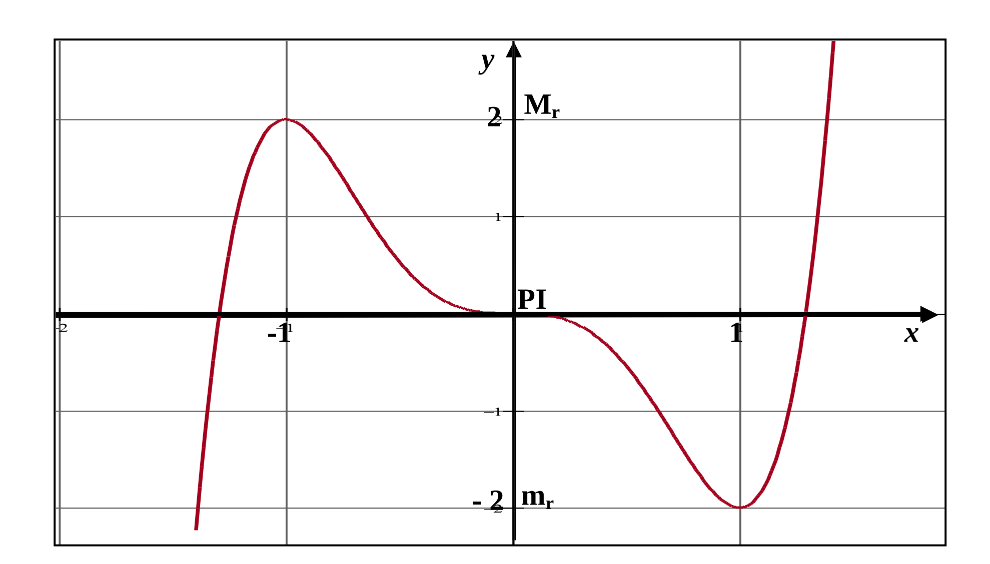
  $f'''(x) = 180x^2 - 30 \rightarrow f'''(0) = -30 < 0 \rightarrow$ en $c = 0$ hay ***pto inflexión***; $P_I(0\,;0)$

- ***¿c = 0 ?***: si deseamos graficar f, acudimos al ***criterio de la derivada 1ra.***

  Estudiamos signo de f'. Aquí conviene el "*método del punto de prueba*".

Organizamos los datos en un *cuadro de situación*; concluimos con Teo.7 y corolario

	x < - 1	**-1**	-1<x <0	**0**	0<x <1	**1**	1 < x
f (x)		**2**		0		**-2**	
f´(x)	**(+)**	**0**	**(-)**	**0**	**(-)**	**0**	**(+)**
f →	↗	**M**r	↘	$\mathbf{P_I}$	↘	**m** r	↗



4.4 Cálculo de Extremos *Absolutos*

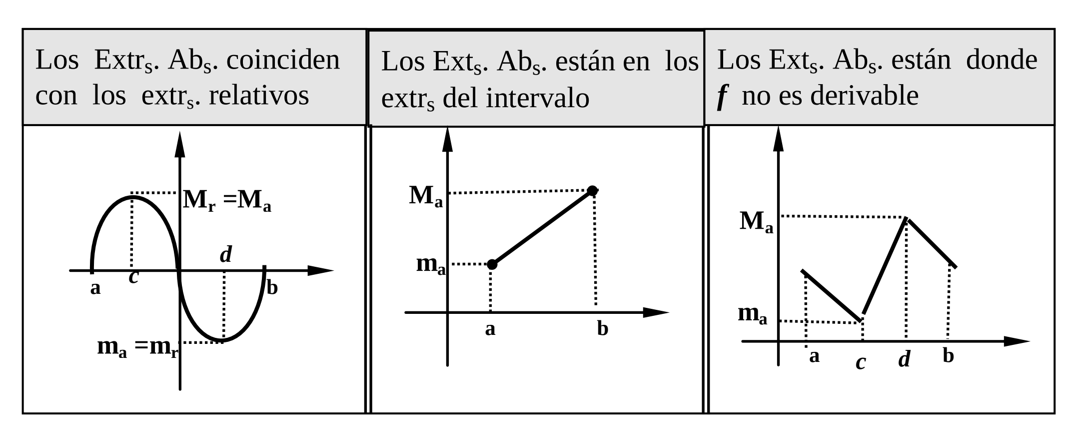
La existencia y determinación de ´*extremos absolutos*´ de una función ***f*** depende tanto de la ley de la función como del dominio de la misma. Si **D =** ***dom f*** tenemos al respecto dos situaciones bien diferenciadas:

(I) ***f*** discontinua en **D** y/ó **D** ≠ **[a; b].**

En este caso son muchas las situaciones que se pueden presentar: desde que no haya extremos absolutos, hasta que existan ambos, máximo y mínimo.
Que existan o no estos extremos, depende de la existencia de ***límites infinitos***.

(II) ***f*** continua en **D**; **D = [a; b].**

En este caso, el teorema de Weiertrass, asegura la existencia de máximo y mínimo absoluto de ***f*** en **[a; b] ;** y podemos establecer algunas pautas para su búsqueda ya que tenemos un número finito de casos posibles.



En este caso para buscar extremos absolutos procedemos a ampliar el conjunto de los puntos críticos (**PC**), agregando al mismo los extremos del intervalo, **a** y **b.**

PC = { x / $f'(x) = 0$; no existe $f'(x)$; **a** ; **b** }

Ejem plo 6: Hallar extremos absolutos de,

$$f(x) = x^3 + 3/2\, x^2 - 6\, x + 3 \quad \text{con} \quad \mathbf{D}\, f = [-3; 3]$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$$

PC (*Ampl.*) = { x / $f'(x) = 0$; -3 ; 3 } = { -2 ; 1 ; -3 ; 3 } .

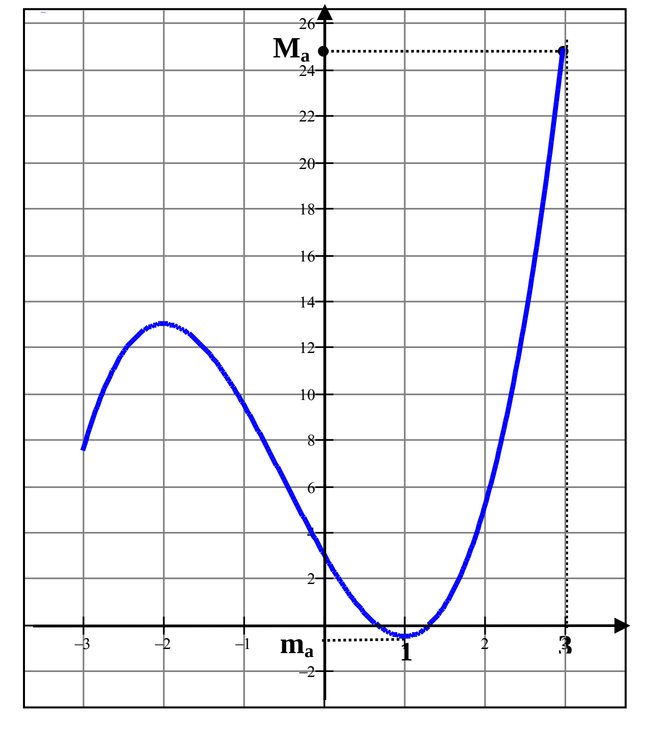
Máximo y mínimo absoluto existen y los puntos donde se producen se encuentran en el **PC(*Ampl.*)** Así, para hallarlos, basta calcular la función en todos los puntos del **PC(*Ampl.*)** y luego, por simple inspección reconocer máximo y mínimo absoluto.

f (-2) = 13

f (1) = - ½ → mín. absoluto

f (-3) = 7,5

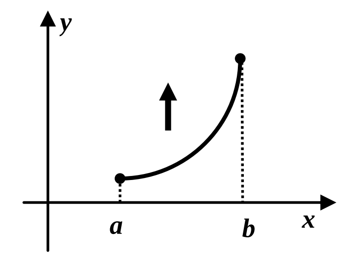
f (3) = 25,5 → máx. absoluto

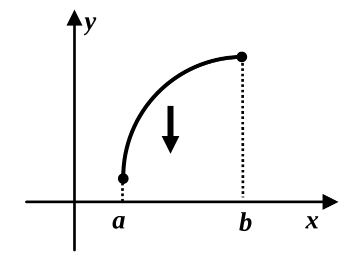


➭ APLICACIONES DE LA DERIVADA 2da:

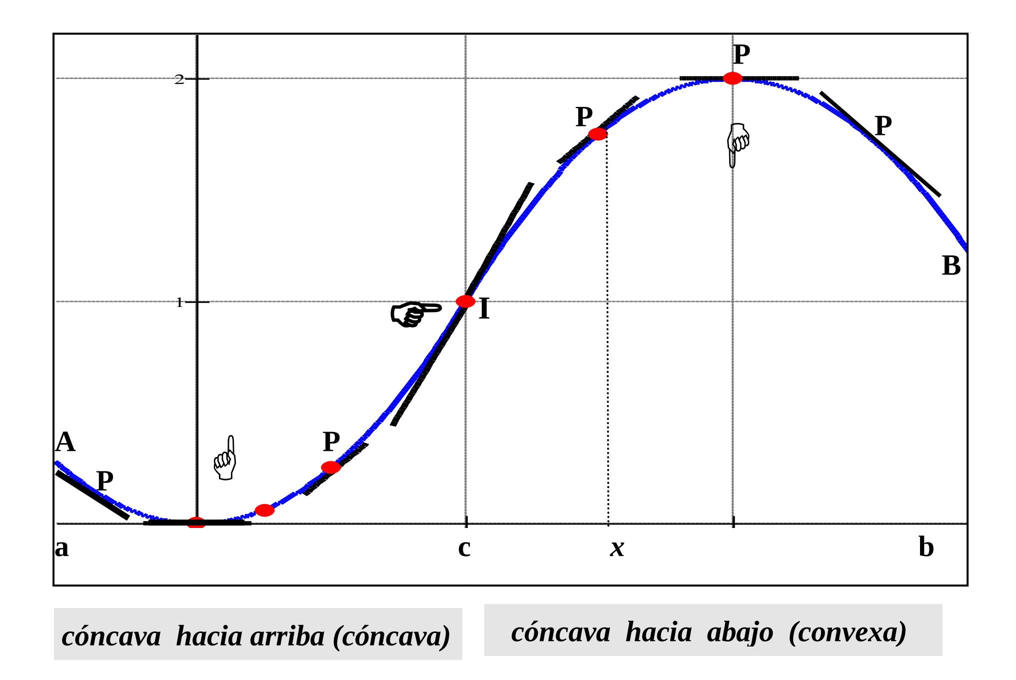
Concavidad y Convexidad . Puntos de inflexión a tangente oblicua.

Detectado que una función (no lineal) crece estrictamente en un intervalo [a; b] queda todavía una cuestión por resolver: ¿cómo unimos los puntos extremos de la curva?; ¿con la curvatura “hacia arriba” o, “hacia abajo” ?.





En lo que sigue nos ocupamos de esta cuestión. Hacemos esto a partir del análisis de la figura que se propone a continuación.



Seguimos el movimiento de un punto **P** sobre la curva grafico de una función derivable, observamos que hace la recta tangente a medida que **P** se desplaza.

- Mientras **P** se mueve de **A** hacia **I**, la curva permanece por encima de la recta tg. En este caso decimos que la curva es ***´cóncava hacia arriba´*** (ó *cóncava*) en [a; c].
- Mientras **P** se mueve de **I** hacia **B**, la curva permanece por debajo de la recta tg. En este caso decimos que la curva es ***´cóncava hacia abajo´*** (ó *convexa*) en [a; c] .

Observamos también que en **I** la curva cambia de *´cóncava hacia arriba´* a *´cóncava hacia abajo´*; que la recta tangente *´atraviesa´* la curva. O sea, vemos que en **I** tenemos un punto de inflexión; podemos ahora definir con más rigor este concepto.

Definición : ***Punto de Inflexión de una curva (C).***

P es punto de inflexión de **C** si y sólo si **P** es un punto de **C** donde se produce un cambio de concavidad; es decir, donde **C** pasa de cóncava a convexa o viceversa.

Análisis de la concavidad: (usando el hecho que $\mathbf{m_t} = f´(x)$)

Cóncava hacia arriba → mientras **P** se mueve de **A** hacia **I**, la recta tg gira en el sentido contrario a las agujas del reloj; o sea $\mathbf{m_t}$ **,** las pendientes de las rectas tangentes aumentan a medida que **P** se desplaza de **A** hacia **I**; equivalentemente, $f´(x)$ crece al tomar ***x´s*** crecientes (*hasta* **c**)

Cóncava hacia abajo → mientras **P** se mueve de **I** hacia **B**, la recta tg gira en el sentido de las agujas del reloj; o sea $\mathbf{m_t}$, las pendientes de las rectas tangente disminuyen a medida que **P** se desplaza de **I** hacia **B**; equivalentemente, $f´(x)$ decrece al tomar ***x´s*** crecientes (*a partir de* **c**) .

Estas observaciones sugieren las siguientes definiciones:

Definición : ***Concavidad y Convexidad de una curva C.***

Dada ***f*** derivable en [a; b] decimos que:

- ***f*** es ***cóncava hacia arriba*** (cóncava) en [a; b] si ***f´*** es creciente en [a; b].
- ***f*** es ***cóncava hacia abajo*** (convexa) en [a; b] si ***f´*** es decreciente en [a; b].

TEOREMA 9 – ***Criterio de la derivada 2da para la determinación de la concavidad.***

Sea ***f*** dos veces derivable en [a; b] ; entonces:

a) $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ ***f cóncava hacia arriba en* [a; b]**

b) $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ ***f cóncava hacia abajo en* [a; b]**

Demostración:

a) $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ (Teo.6) ***f´*** estrictamente creciente en [a; b]

$\Rightarrow$ (*def.*) ***f cóncava hacia arriba en* [a; b].** (q.e.d.)

b) idem (ejercicio).

Corolario TEO. 9 : los ***puntos de inflexión a tg . oblicua*** se encuentran en los ptos ***c*** del dominio donde la ***derivada 2da cambia de signo.*** (exista o no la ***f´´ (c)***)

Observación: el teo.9 señala que si ***c*** es un punto del dominio donde *cambia* la concavidad entonces ***f´´*** , en ese punto, pasa de *positiva* a *negativa* (o viceversa). Luego, si *existiera la derivada 2da en **c*** , es razonable suponer que valga *´cero´*.

TEOREMA 10 – ***Criterio de la derivada 2da para la detección de ptos de inflexión. .***

Si **P(*c; f(c)*)** es un punto de inflexión del ***graf f*** y existe $f''(c)$

entonces, $f''(c) = 0$.

Demostración: sea $g(x) = f'(x)$; $g'(x) = f''(x)$ **.**

P(*c; f(c)*) pto de inflexión $\Rightarrow$ ***f´´*** cambia de signo en ***c*** $\Rightarrow$ ***g´*** cambia de signo en ***c***
$\Rightarrow$ (Corol. Teo 7) ***g*** tiene un extremo en ***c*** $\Rightarrow$ (Teo.1) $g'(c) = 0$ $\Rightarrow$ $f''(c) = 0$.

Observación: $f''(c) = 0$ → condición necesaria *pero no suficiente* para que existe pto inflexión. **Ej.** : $f(x) = x^4$; $f'(0) = f''(0)= 0$ y en $c = 0$ no hay pto inflexión.

Corolario TEO. 10 : $f''(c) = 0$ y ***la derivada 2da de f, cambia de signo en c*** entonces **P(*c; f(c)*)** es un ***punto de inflexión*** .

- ***Pasos para la búsqueda de puntos de inflexión a tg. oblicua***

  (1º) Hallar ***f ´´*.**

  (2º) Hallar los ***ceros*** de ***f´´*** **.**

  (3º) Aplicar el "***corolario Teo 10***" .
  Aplicar este corolario requiere estudiar el ***signo de f ´´*** .

Ejemplo 7: Hallar extremos de $f(x) = x^4 - 6x^2$

$f(x) = x^4 - 6x^2 = x^2 (x^2 - 6)$

$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x (x^2 - 3)$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12 (x^2 - 1)$

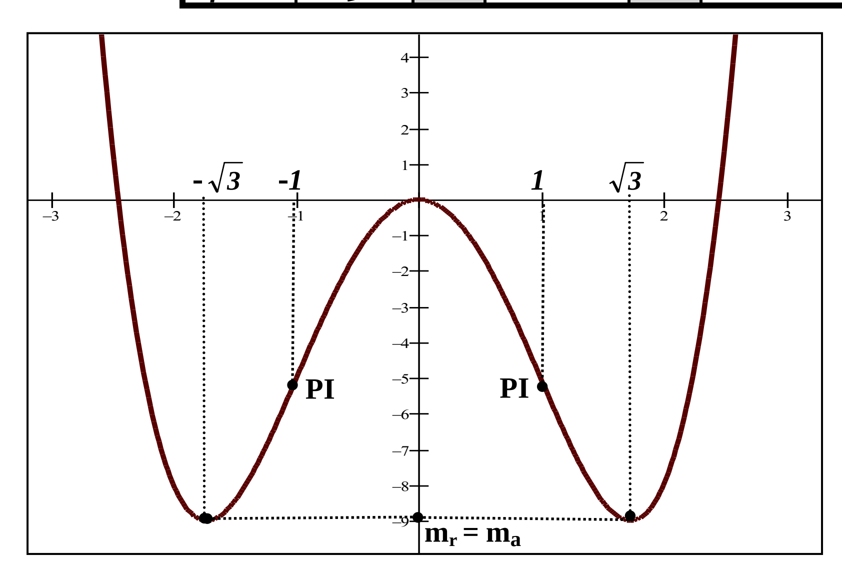
PC	$c_1 = -\sqrt{3}$	$c_2 = 0$	$c_3 = \sqrt{3}$
f	-9	0	-9
f'	0	0	0
f''	$24 > 0$	$-12 < 0$	$24 > 0$
	mr = -9	**Mr = 0**	**mr = -9**

PC= $\{ x \in R \,/\, f'(x) = 0\} = \{ -\sqrt{3} \;;\; 0;\; \sqrt{3} \}$

PI = $\{ x \in R \,/\, f''(x) = 0 \} = \{ -1 \;;\; 1 \}$

Estudiamos signo de f'' por el "*método del punto de prueba*".
Organizamos los datos en un *cuadro de situación*; concluimos con Teo.10 y corolario

	x < - 1	**- 1**	-1<x <1	**1**	1 < x
$f(x)$		**-5**		**-5**	
$f''(x)$	**(+)**	**0**	**(-)**	**0**	**(+)**
f →	∪	P_I	∩	P_I	∪



Ejemplo 8: Hacer el estudio completo y graficar f para $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3} = x^{2/3} [5 - x]$; $\mathbf{D}f = \mathbf{R}$

$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} [2x^{-1} - 1]$; $\mathbf{D}f' = \mathbf{R} - \{0\}$

$f''(x) = -\frac{10}{9} x^{-1/3} [x^{-1} + 1]$; $\mathbf{D}f'' = \mathbf{R} - \{0\}$

I) Procedemos a listar las características generales de $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$:

a) Df = **R**

b) Dominio continuidad = **R** (→ el ***graf f*** no presenta saltos ni agujeros).

c) Dominio derivabilidad = **R – {** 0**}** (→ el ***graf f*** presenta un pto anguloso) .

d) *ceros de* ***f*** : ***f*** (*x*) = $x^{2/3}$ [5- ***x***]= 0 ⇔ ***x*** = ***0*** ; ***5*** .

e) *simetrías:* ***f*** no es par ni impar ⇒ ***graf f*** no presenta simetrías.

f) *asíntotas*: no hay .

g) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ⇒ *f no es acotada;* ⇒ *f no tiene extremos absolutos*.

II) Extremos relativos, ptos de inflexión a tg. horizontal, intervalos de monotonía.

(1º) $f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} [2x^{-1} - 1]$

(2º) ptos críticos: **PC = {** ***x*** ∈ R / ***f´(x) = 0*** ∧ ***x* = 0 } = { 2 ; 0 }**

(3º) Signo de ***f´*** por el "*método del punto de prueba*".
Organizamos los datos en un *cuadro de situación*; acudimos Teo.7 y corolario.

	x < 0	**0**	0<x <2	**2**	2< x
f (x)	↘	**0**	↗	4,8	↘
f´(x)	**(-)**	∄	**(+)**	**0**	**(-)**
f →		**m**r		**M**r	

III) Concavidad, puntos de inflexión a tg, oblicua. intervalos de monotonía.

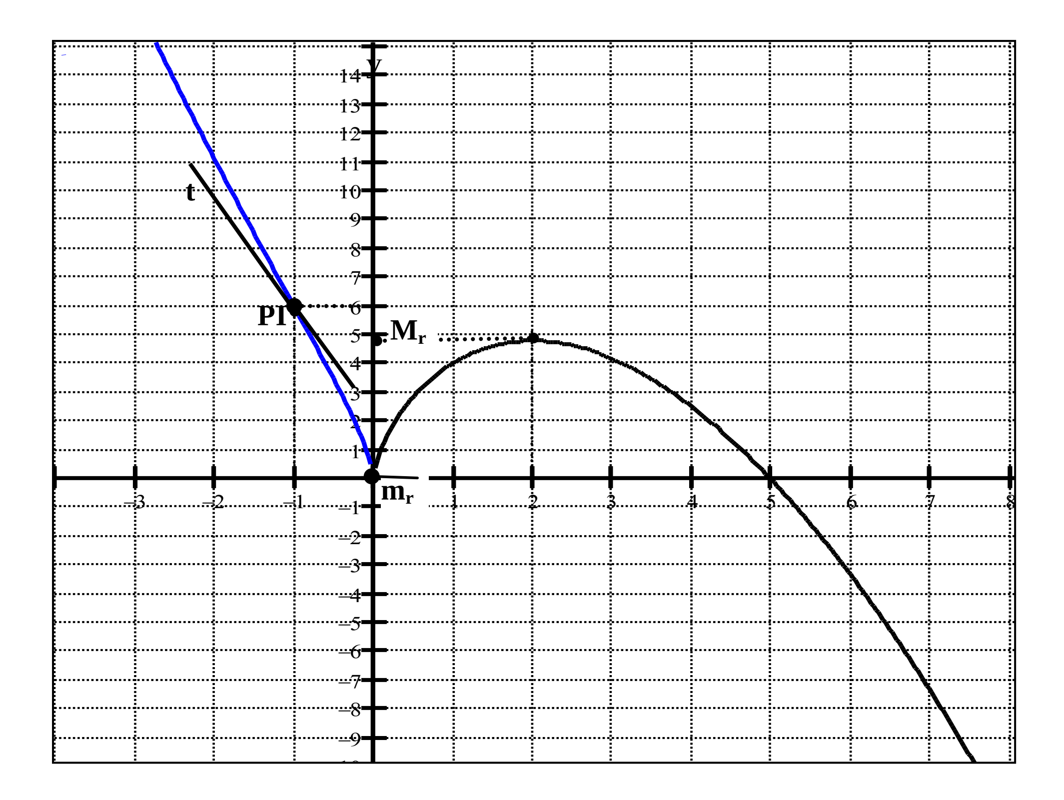
(1º) $f''(x) = -\frac{10}{9} x^{-1/3} [x^{-1} + 1]$

(2º) (*posibles*) **PI = {** ***x*** ∈ R / ***f ´´(x) = 0*** ó no existe ***f ´´(x)*** **} = { -1 ; 0 }**

(3º) Signo de ***f´´*** por el "*método del punto de prueba*".

Organizamos los datos en un *cuadro de situación*; acudimos Teo.9 y corolario.

	x < -1	**-1**	0<x <2	**0**	2< x
f (x)		**6**		0	
f´(x)	↘	**-5**	↗	∄	↘
f´´(x)	**(+)**	**0**	**(-)**	∄	**(-)**
f →	∪	**P**I	∩	pto ang.	∩



Ejemplo 9: Hacer el estudio completo y graficar ***f*** para $f(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{(x-1)^2}$

$f(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{(x-1)^2}$	; **D*f* = R – { 1}**
$f'(x) = \dfrac{x-5}{(x-1)^3}$	; **D*f*´ = R – { 1}**
$f''(x) = \dfrac{2\,(7-x)}{(x-1)^4}$	; **D*f*´´ = R – { 1}**

I) Procedemos a listar las características generales de $f(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{(x-1)^2}$:

a) D*f* = **R – {** 1**}**
b) Dominio continuidad = **R– {**1**}** (→ el ***graf f*** presenta un salto en ***x = 1***).
c) Dominio derivabilidad = **R – {**1**}** (***f*** discontinua en ***x = 1***) .
d) *ceros de* ***f*** : $-x^2 + x + 2 = 0 \iff x = -1\ ;\ 2$.
e) *simetrías:* ***f*** no es par ni impar ⇒ ***graf f*** no presenta simetrías.
f) *asíntotas*: $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \Rightarrow$ (asínt. vert.) ***x = 1 ;***

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$ (asínt. horizontal) ***y = - 1 .***

g) $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \Rightarrow$ <u>***f*** *no es acotada superiormente*</u>.

II) Extremos relativos, ptos de inflexión a tg. horizontal, intervalos de monotonía.

(1º) $f\,'(x) = \dfrac{x-5}{(x-1)^3}$

(2º) ptos críticos: **PC = {** $x \in$ R / $f'(x) = 0 \;\wedge\; x = 1$ **} = { 5 ; 1 }**

(3º) Signo de f' por el "*método del punto de prueba*".
Organizamos los datos en un *cuadro de situación*; acudimos Teo.7 y corolario.

	x < 1	1	1<x < 5	5	5< x
f (x)	↗	∄	↘	$-\frac{9}{8}$	↗
f´(x)	(+)	∄	(-)	0	(+)
f →		a_V		m_r	

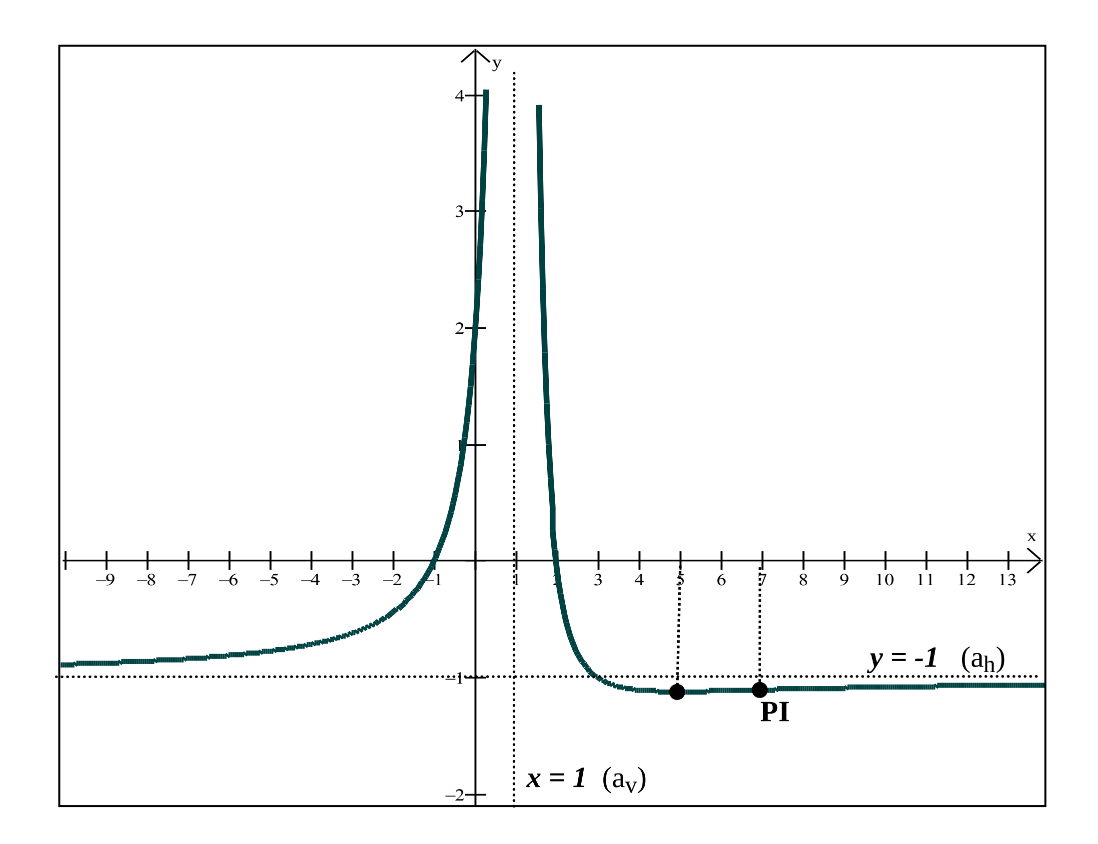
III) Concavidad, puntos de inflexión a tg, oblicua. intervalos de monotonía.

(1º) $f\,''(x) = \dfrac{2\,(7-x)}{(x-1)^4}$

(2º) (*posibles*) **PI = {** $x \in$ R / $f''(x) = 0$ ó no existe $f''(x)$ **} = { 7 ; 1 }**

(3º) Signo de f'' por el "*método del punto de prueba*".
Organizamos los datos en un *cuadro de situación*; acudimos Teo.9 y corolario

	x < 1	1	1< x < 7	7	7< x
f (x)		∄		$-\frac{10}{9}$	
f´(x)	(+)	∄			(+)
f´´(x)	(+)	∄	(+)	0	(-)
f →	∪	a_V	∪	P_I	∩



Del gráfico vemos que ***Im f* = [** $-\frac{9}{8}$; $+\infty$ **)**

Concluimos así que ***f*** es ***acotada inferiormente*** y que, $\mathbf{m_r = m_a} = -\frac{9}{8}$

Parte 2 - Aplicaciones de la derivada a la "aproximación" de funciones

4.5 Aproximación del Δy , incremento de la variable dependiente

- Sea: $y = f(x)$; $x_o \in D_f$; f derivable en x_o ; $\Delta x = x - x_o$ con $x \in E(x_o)$
- A cada Δx corresponde un Δy, con $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$
- Nos preguntamos: *¿ existen otras formas de estimar el valor de* Δy *?.*
  En lo que sigue nos ocupamos de dar respuesta a este interrogante.

$$f \text{ derivable en } x_o \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o)$$

Teo. de escritura fuera del límite

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o) + \rho(\Delta x); \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to o} \rho(\Delta x) = 0$$

despejando Δy

$$\Rightarrow \Delta y = f'(x_o)\, \Delta x + \underbrace{\rho(\Delta x).\Delta x}_{\varepsilon(\Delta x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta y = f'(x_o)\, \Delta x + \varepsilon(\Delta x)} \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$$\text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_o).\Delta x = 0$$

Conclusión: Δy se puede ´*descomponer*´ en suma de ´*dos infinitésimos*´ para $\Delta x \to 0$

Luego, y en la búsqueda de una *aproximación para* Δy, nos preguntamos cual de los infinitésimos del segundo término aproxima *mejor* a Δy. Dicho de otra forma, cual de ellos, de ser despreciado, introduce el *menor error*. Para resolver esta cuestión procedemos a *"comparar los infinitésimos"*.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{f'(x_o).\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho(\Delta x).\Delta x}{f'(x_o).\Delta x} = 0 \rightarrow$$

ε es un infinitésimo de orden superior a $f'(x_o)\,\Delta x$; o sea, ´***despreciable***´ frente a $f'(x_o)\,\Delta x$

Concluimos así que: $\Delta y = f'(x_o)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$

$f'(x_o)\,\Delta x$ → ***parte principal del incremento***

$\varepsilon(\Delta x)$ → ***despreciable***

O sea, que $f'(x_o)\,\Delta x$ es una ´*buena*´ aproximación de Δy

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x_o).\,\Delta x}$$

4.6 Diferencial de una función

Dado que el producto $f'(x_o).\Delta x$ constituye la *parte principal del incremento de la función*; se conviene en darle un nombre y se lo llama "***diferencial de f***".

DEFINICIÓN 1: *diferencial de una función* **dy** ó **df**	Dada ***y = f(x),*** derivable en x_o, llamamos "***diferencial de f***" al producto de ***f´***(x_o) por un incremento arbitrario de la v.i. (Δx). $$dy = f'(x_o).\ \Delta x$$

Observaciones:

1) La definición de diferencial proporciona otra forma de representar el incremento de una función y, por ende, de dar una aproximación del mismo.

$$\Delta y = f'(x_o)\ \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \longrightarrow \Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x)$$

$$\Delta y \approx f'(x_o).\ \Delta x \longrightarrow \Delta y \approx dy$$

(el diferencial de una función da una *aproximación* del incremento de la misma).

2) La parte que se desprecia, $\varepsilon(\Delta x)$ **,** constituye el "error" producido al aproximar

3) Tanto Δy como ***dy*** son infinitésimos para $\Delta x \to 0$. Comparando:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_o).\Delta x} = \frac{1}{f'(x_o)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{f'(x_o)}.[f'(x_o)] = 1\ ;$$

O sea, Δy y **dy** son *infinitésimos equivalentes*.

Así, para Δx infinitamente pequeño, **dy** *es una muy buena aproximación de* Δy.

Tanto es así que en el lenguaje vulgar las expresiones "incremento" y "diferencial" (de una función) se usan como sinónimas, aún cuando los correspondientes valores no sean exactamente iguales. Esto no trae aparejado ningún problema en tanto y en cuando no se pierda de vista que "*realmente*" :

"***dy*** es una aproximación de Δy con un ***error infinitesimal***, ε " (*error al fin !!!*)

Ejemplo: $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $f'(5) = 75$

Δx	Δy	$dy_{(5)}$	| ε |
3	387	**225**	162
2	218	**150**	68
1	91	**75**	16
0.1	7.651	**7.5**	0.151
0.05	3.788	**3.75**	0.038
0.01	**0.752**	**0.75**	**0.002**
0	**0**	**0**	**0**
-1	-61	**-75**	14

- $dy\ (5) = f'(5).\Delta x = 75.\ \Delta x$
- $\Delta y = f(5+\Delta x) - f(5)$

$\Delta y = (5+\Delta x)^3 - (5)^3 \Rightarrow$

$$\Delta y = \underbrace{75\ \Delta x}_{dy} + \underbrace{15\ \Delta x^2 + \Delta x^3}_{\varepsilon(\Delta x)}$$

NOTA:

Hemos visto que existen distintas notaciones para indicar la derivada en un punto y hemos usado mayormente una de ellas, $f'(x_o)$. Nos ocupamos ahora de otra notación, la de Leibniz: $\frac{dy}{dx}(x_o)$.

Hasta aquí esta notación no es más que un ***símbolo*** que, como los otros, representa la derivada de la función en un punto; o sea,

$$\frac{dy}{dx}(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

☞ En la notación de Leibniz aparece el símbolo ´***dy***´, símbolo al que acabamos de dar un ´nombre´: ***diferencial*** , y un ´significado´: $f'(x_o).\Delta x$. Debemos entonces controlar que la nueva definición no plantee contradicción alguna al interior del edificio de la matemática; o sea, que si hacemos otra interpretación de los símbolos que usamos para *´representar´* la derivada, la nueva interpretación no *´contradiga´* la original. A tal fin nos ocupamos primero de explicitar el *´significado´* del otro diferencial que aparece en la notación de Leibniz; o sea , del ´***dx***´ (*diferencial de la variable independiente*).

DEFINICIÓN 2: ***diferencial de la v.i.*** ***dx***	Dada ***y = f*** (x), llamamos "***diferencial de la variable independiente***" a Δx; o sea, al incremento de la variable independiente**.** Lo indicamos ***dx***. $dx = \Delta x$

Definido el diferencial de la v.i.; tenemos otra forma de escribir el ***dy*** :

$$dy_{(xo)} = f'(x_o).\ \Delta x \quad \rightarrow \quad dy_{(xo)} = f'(x_o).\ dx\ ;$$

Si dividimos por ***dx*** resulta que, $\frac{dy}{dx}_{(xo)} = f'(x_o)$; o sea,

$$\frac{dy}{dx}_{(xo)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$; y comprobamos:

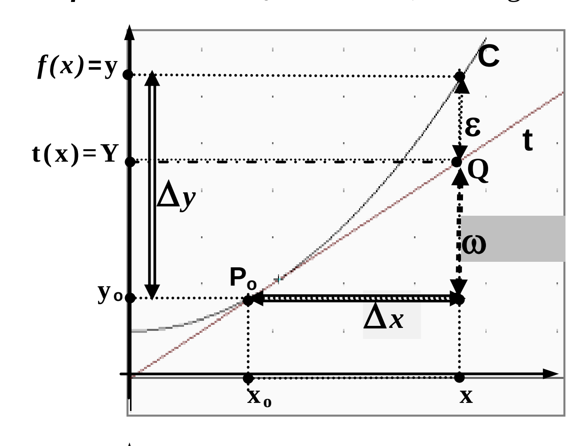
- que la notación de Leibniz para la derivada, $\frac{dy}{dx}_{(xo)}$, y las notaciones para los diferenciales, ***dx*** y ***dy*** , *no presentan contradicción alguna entre sí* ;
- que podemos interpretar el símbolo $\frac{dy}{dx}$ como un "***cociente*** " ; por ende, considerar la derivada misma como "***cociente de diferenciales***".

***Observación*:**

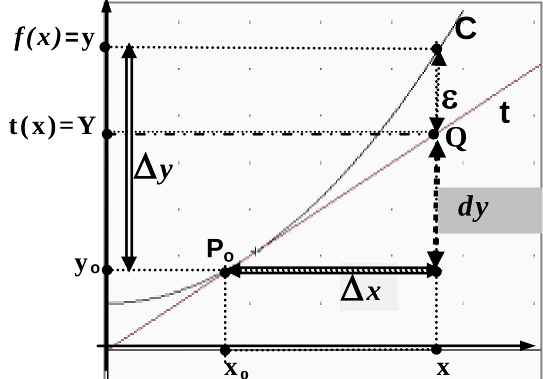
Dado que $dy \approx \Delta y$ y $dx = \Delta x$, tenemos que $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$; o sea, que el "***cociente de diferenciales***" ($\frac{dy}{dx}$) y el "***cociente de incrementos***" ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) están próximos pero, ***no son iguales***.

4.7 Interpretación geométrica del diferencial

f derivable en x_o $\Rightarrow$ existe **t**, recta tg. a **C** en $\mathbf{P_o}$ / **t**) $\mathbf{Y = f'(x_o)}\,(x - x_o) + f\,(x_o)$



$$m_t = f\,'(x_o)$$
$$m_t = \frac{\omega}{\Delta x}$$
$$\Rightarrow \; f'(x_o) = \frac{\omega}{\Delta x}$$
$$\Downarrow$$
$$\boldsymbol{\omega = f'(x_o).\,\Delta x}$$
$$\Downarrow$$
$$\boldsymbol{\omega = dy}$$



» Concluimos que: $\boldsymbol{dy = \omega}$ **;**

» pero $\boldsymbol{\omega = Y - y_o}$.

» Luego $\boldsymbol{dy = Y - y_o}$

dy = (*ordenada* **Q** - *ordenada* $\mathbf{P_o}$)

dy = diferencia de ordenadas, entre
$\mathbf{Q(x_o + \Delta x;\, Y)}$ sobre **t** , y
$\mathbf{P_o(\, x_o\, ;\, y_o)}$ sobre **C** = ***graf. f***

- Del gráfico vemos que el segmento que representa a Δy puede descomponerse en ´*dos segmentos*´, uno de ellos $\boldsymbol{\omega = dy}$ **(** primero de los infinitésimos en que se descompone Δy **).** Así, al segmento identificado con $\boldsymbol{\varepsilon}$ no le queda otra opción que corresponderse con el segundo infinitésimo; o sea, con $\varepsilon(\Delta x)$ **.**
  Concluimos así que los dos *sumandos* en que se descompone Δy se corresponden ´*geométricamente*´ con los dos segmentos identificados con "$\boldsymbol{\omega}$" y "$\boldsymbol{\varepsilon}$" .

  O sea, $\Delta y = \underbrace{dy} + \underbrace{\varepsilon(\Delta x)}$ (*algebraicamente*)

  $\Delta y = \omega + \boldsymbol{\varepsilon}$ (*geométricamente)*

  Y tenemos así una forma de poder apreciar "*gráficamente*" la magnitud del **error** ($\boldsymbol{\varepsilon}$ **)** cometido al aproximar Δy con ***dy.***

<u>*Observaciones*</u>:

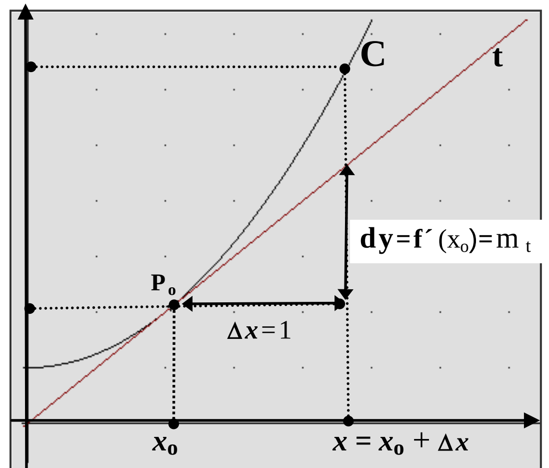
1) Geométricamente vemos que, para un Δx dado:

* dy indica la cantidad que se ´eleva´ (o cae) **t**, la recta tangente, en un entorno de x_o

*Δy indica la cantidad que se ´*eleva*´ (o *cae*) **C**, el gráfico de f , en un entorno de x_o.

4.8 La derivada como razón de cambio

La interpretación geométrica del *diferencial de una función* permite una mejor visualización de la noción de *derivada* como razón de cambio.



Según vimos:

- **dy** representa la cantidad que se eleva (o cae) ***la recta tg*** cuando ***x*** se incrementa en Δx; en particular, <u>*el cambio producido en **y**,*</u> <u>***sobre la recta tg***</u>, <u>*por cada cambio unitario en **x**.*</u>

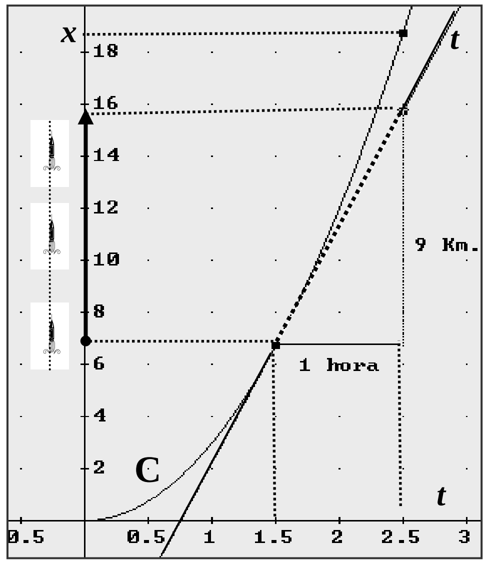
- Por definición: $dy = f'(x_o) . \Delta x$

  $\Delta x = 1$: $dy = f'(x_o)$

Concluimos entonces que **f´** (x_o) indica el cambio que <u>*se produciría*</u> en ***y*** , por cada cambio unitario en ***x***, <u>*en el caso que*</u> P_o <u>*continuara moviéndose*</u> <u>*sobre la recta tangente*</u>; dicho de otra forma, si a partir de x_o "***la razón de cambio permaneciera constante e igual a la pendiente de la recta tg en*** P_o" .

Ejemplo:

Sea $x = 3\,t^2$; [***x***] = Km ; [**t**] = hs la función posición de un móvil que comienza a moverse. A la hora y media de iniciado el movimiento se produce un cambio en la velocidad y el móvil comienza a desplazarse a *velocidad constante* e igual a la que tenía en ese instante. Si a partir de ese momento se mueve una hora más, ¿cuántos Kms. se desplaza?. Y en total, ¿cuánto se desplaza*?*



» $x(t) = 3\,t^2$ → $x'(t) = 6\,t$

» <u>Posición a la 1 ½ hora</u>: ***x*** **(1.5) = 6.75**

» <u>Velocidad a 1 ½ hora</u>: ***x´*** **(1.5) = 9**

Según vimos, ***x´*****(**1.5**)** es el *cambio* que se produciría en ***x***, *en una hora*, si a partir de este momento la velocidad permaneciera constante e igual a ***x´*****(**1.5**)**. Así, si a la 1½ hs. el móvil comienza a ir a velocidad cte e igual a ***x´*****(**1.5**)**, o sea, a **9** Km/h., en una hora se desplaza **9 km.**

» <u>Posición a 2 ½ hs. de iniciado el movimiento</u>.

x**(**1.5**) = 6.75**

x**(**2.5**)** = ***x*** (1.5) **+ 9 = 15.75**

(*si hubiera seguido sobre **C** → ***x*** (2.5) = 18.75)

4.9 Uso del Diferencial

ERRORES: uno de los usos más importantes del "diferencial" es en la estimación de errores, particularmente en la *propagación de errores*.

Ejemplo:

" *Se mide el lado de un cubo y se encuentra que es de 2 cm. Se sabe que la medición se hace con un error de apreciación,* $\varepsilon = \pm(0.01)$, *que esto induce un error en el cálculo del volumen de dicho cubo. Se pide hallar el máximo error cometido al calcular el volumen con el valor medido ".*

Como en todo problema procedemos a:

☞ *Reconocer*, *etiquetar* y *describir* variables:

x = lado del cubo (cm); **V**= volumen del cubo (cm^3)

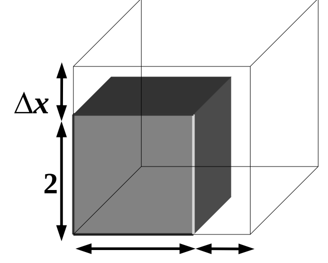
☞ *Explicitar la incógnita*:

E / **E** = *error máximo al calcular* **V** *(debido al error de apreciación en* x*).*

☞ *Explicitar los datos*:

- Por geometría sabemos que: $V = x^3 \Rightarrow V = V(x)$ con $V(x) = x^3$
- Se informa un ´*error de medición*´; luego, $x = 2$ puede *no ser* el verdadero valor del lado. Si llamamos Δx al *error producido al medir*, entonces el *valor verdadero* (*v.v.*) del lado es: $x = 2 + \Delta x$.
- Tenemos así que:

$x_0 = 2$ (*valor medido*)
$x = 2 + \Delta x$ (*v. v.*)
$\varepsilon_x = \pm(0.01) \Rightarrow \lvert\Delta x\rvert \le 0.01$



Nota: El valor de Δx, *se desconoce*. $\varepsilon_x = \pm(0.01)$ informa el valor *máximo (ó mínimo)* que puede tomar este error. O sea; da una ***cota*** del mismo.

- El *verdadero valor* (*v.v.*) del volumen es el calculado con el *v.v.* del lado; o sea, $V = V(2+\Delta x)$.

$V_c = V(2) = 8$ (*vol. calculado*)
$V_v = V(2+\Delta x) = V(2) + \Delta V$ (*vol. verdadero*)
$E_V = \lvert \Delta V \rvert = \lvert V_v - V_c \rvert = \lvert V(2+\Delta x) - V(2)\rvert$

→ → ¿cómo calculamos E_V si no conocemos Δx ?!!

Este problema lo resolvemos acudiendo al ***diferencial de la función***, pues $dV \approx \Delta V$ y, mientras sobre el ΔV nada podemos hacer, al dV si lo podemos trabajar.

☞ Resolvemos: $E_V = \lvert \Delta V \rvert = \lvert V(2+\Delta x) - V(2)\rvert$;

$$dV = V'(x_o).\Delta x \;;$$

Calculamos $V'(x) = 3x^2$ y procedemos a aproximar el error con el diferencial:

$$E_V = |\Delta V| \approx |dV| = |V'(2).\,\Delta x| = |12\,.\,\Delta x| = 12\,|\Delta x| \underbrace{<}_{|\Delta x|<0.01} 12\,.0.01 = \boldsymbol{0.12}$$

$E_V = |\Delta V| < \boldsymbol{0.12}$ $\Rightarrow$ ***error absoluto "máximo"*** que se puede cometer al calcular **V** con x_o medido con $\varepsilon_x = \pm(0.01)$

☞ Conclusión: $E_V = \pm\ \boldsymbol{0.12}$

Notas:

$|\Delta V| < 0.12 \Rightarrow -0.12 < \Delta V < 0.12$

O sea ***0.12*** (cm³) es una ***cota del error*** cometido al calcular **V** con un error en ***x***.

$V_v = V(2) \pm 0.12 \Rightarrow V_v = 8 \pm 0.12 \Rightarrow$ **7.88 < V_v < 8.12**

Observaciones :

Si bien E_a, el ***error absoluto***, da una idea de cómo se "*propaga*" en el cálculo el error cometido al medir, no permite apreciar la importancia del mismo. Ej: E_V, ¿será un error de peso o será despreciable en relación al problema que se esta resolviendo?.
El error relativo y el error porcentual proporcionan una mejor idea a este respecto.

⇨ E_r = (error relativo) = $\dfrac{E_a}{V_c} = \dfrac{0.12}{8} = 0.015$

⇨ $E_{\%}$=(error porcentual) = 100. E_r = 1,5 %. ⇒ $E_{\%} = 1{,}5\ \%$

- ¿cuál hubiera sido la situación si el radio medido hubiera sido de ***5 cm*** ?

$$E_V = |\Delta V| \approx |dV| = |V'(5).\Delta x| = |3.(5)^2.\Delta x| = 75\,|\Delta x| \underbrace{<}_{|\Delta x|<0.01} 75.\ 0.01 = \boldsymbol{0.75}$$

O sea: $E_V = |\Delta V| < 0.75$ lo cual implica un $E_{aV} = \pm\ 0.75$.

Si observamos los errores absolutos, diríamos que para $x = 5$ se comete un error mayor que para $x = 2$; pero , ¿ es realmente así ?.

Consideramos el $E_{\%}$ para $x = 5$: $E_r = \dfrac{E_a}{V_c} = \dfrac{0.75}{125} = 0{,}006 \Rightarrow$ $E_{\%} = 0{,}6\ \%$

Vemos así que al aumentar el lado el ***error porcentual disminuye***, y esto es lógico ya que mientras las variables toman valores cada vez más grandes ***el error de medición permanece constante***. Así, va perdiendo significatividad (por ej.; un $\varepsilon_x = \pm 0.1$ cm. no impacta lo mismo cuando medimos "2cm." que cuando medimos "50 cm.".)

- Dada $y = f(x)$, para estimar $\mathcal{E}$, ´*error absluto*´ en el cálculo de y, procedemos a:
  - Reconocer que $\mathcal{E} = |v_{verdadero} - v_{calculado}| = |y - y_o| = |\Delta y|$
  - Aproximar el incremento de la función por el diferencial de la misma: $\Delta y \approx dy$.
  - Calcular el diferencial tomando Δx igual a la ´*cota del error*´ dada para x:
    $dy = f'(x_o).\ \Delta x_{(máximo)}$
  - Estimar el Error relativo, E_r al efecto de evaluar la ´*significatividad*´ del error.

$$E_r = \frac{\Delta y}{y_o} \approx \frac{dy}{y_o} = \frac{f'(x_o).\Delta x}{f(x_o)} = \frac{f'(x_o)}{f(x_o)}.\Delta x$$

- Así, en el caso del ejemplo visto y para un x_o genérico, tendríamos que:

$$E_r = \frac{\Delta V}{V_o} \approx \frac{dV}{V_o} = \frac{V'(x_o)}{V(x_o)}.\Delta x = \frac{3.\,x_o^2}{x_o^3}.dx = 3.\frac{\Delta x}{x_o}$$

Error relativo para x

Acotando y reemplazando Δx y x_o por los datos del problema tenemos entonces una estimación del error relativo en **V**. Cabe remarcar que la fórmula tal cual quedó brinda información muy valiosa. Ella nos dice que "*el error relativo en el volumen es alrededor de 3 veces el error relativo en el lado*".

En general, para $y = x^n$,
"*el error relativo en* ***y*** *es alrededor de* ***n** veces* *el error relativo en* x".

Cuidado !!: esta regla es válida en el caso de las potencias y *sólo en este caso*.

Por ejemplo, para $y = sen\,x$,

$$E_r = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y} = \frac{f'(x_o)}{f(x_o)}.dx = \frac{\cos x_o}{sen\,x_o}.\,dx = tg(x_o).\,dx$$

4.10 Aproximación Lineal

A partir de la expresión obtenida para Δy en párrafos anteriores, vamos ahora a obtener la expresión que vincula la función en un punto incrementado, **f** (x), con la función y su derivada en el punto dato, $\mathbf{x_o}$.

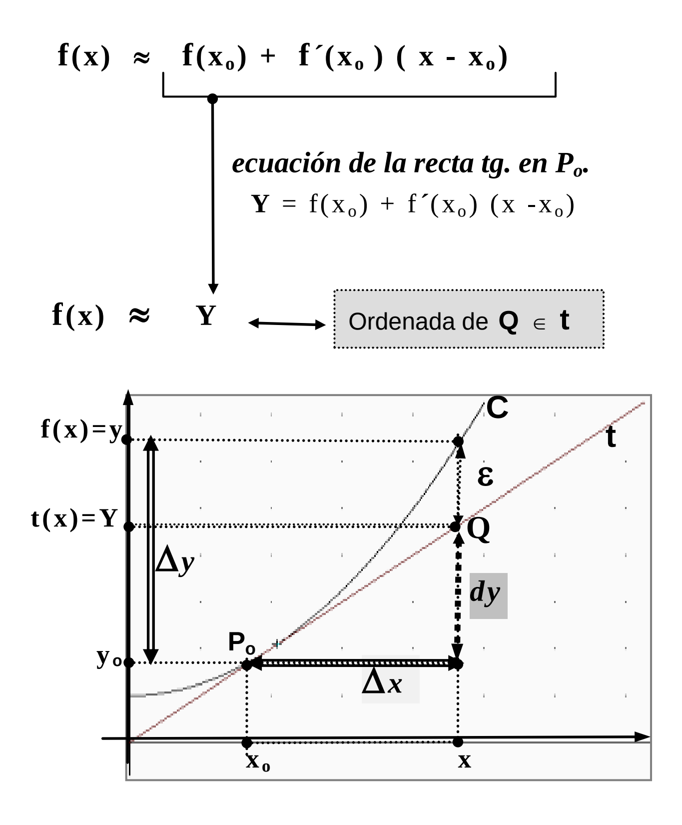
$$\Delta y = f'(x_o)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \qquad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$\Delta y = f(x) - f(x_o)$
$\Delta x = x - x_o$

$$f(x) - f(x_o) = f'(x_o)\,(x - x_o) + \varepsilon(\Delta x) \qquad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$$\mathbf{f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o) + \varepsilon(\Delta x)} \qquad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

- En esta última expresión, podemos ***despreciar el último sumando***, $\varepsilon(\Delta x)$, (infinitésimo para $\Delta x \to 0$); obtener así una ***aproximación*** de **f** (x) en términos de **f** y **f´** en x_o, para todo x en un entorno de x_o.



Conclusión : **f** (x) se puede aproximar por **Y**, ordenada del punto **Q** sobre ***t*** correspondiente a $\mathbf{x = x_o} + \Delta x$.

DEFINICIÓN*:** ***Aproximación lineal.	La aproximación de **f** por la recta tangente en $\mathbf{P_o}(x_o, y_o)$ se llama ***aproximación lineal*** de **f** en x_o. La ***función lineal*** que determina la recta tangente; o sea, $\mathbf{t(x) = f(x_o) + f'(x_0)\,(x - x_o)}$ decimos que es la ***linealización*** de **f** en x_o.

Finalmente observamos que:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o) + \varepsilon(\Delta x) \;/\; \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$$f(x) = t(x) + \varepsilon(\Delta x) \qquad / \; \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$$f(x) \approx t(x) \quad \text{con} \quad \varepsilon(x) = [\, f(x) - t(x)] = \varepsilon \to 0 \quad \text{para} \quad \Delta x \to 0$$

Conclusiones:

1.- Vemos que cualquiera función, con la sola condición de ser derivable en x_o , admite ser asimilada a una función lineal (*su linealización*) en un entorno de x_o.

2.- El valor que despreciamos ($\varepsilon(\Delta x)$), es el ***error*** que cometemos al aproximar *f (x)* con *t (x)*: $\varepsilon(\Delta x) = \varepsilon$

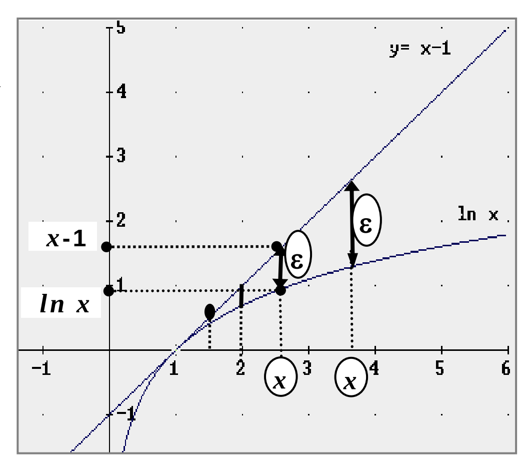
3- Acudir a la aproximación lineal tiene sentido cuando, por alguna razón, ***no se puede calcular f(x).*** Obviamente, en tal caso, tampoco se podrá calcular el error;

o sea **ε .** Para tener una idea de la calidad de la aproximación ("buena" o "mala") resulta de suma importancia entonces poder dar una ***cota*** del error.
A tal efecto observamos que $\varepsilon(\Delta x)$ es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$. Así, podemos estimar su magnitud (o "*pequeñez*") a partir de *compararlo* con otro infinitésimo conocido, como ser, el mismo Δx **.**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho(\Delta x).\Delta x}{\Delta x} = 0 .$$

Conclusión: $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ es un infinitésimo de orden *superior* a Δx .
(se acerca a cero *más rápido* que Δx). O sea, para Δx *pequeños*, $|\varepsilon| < |\Delta x|$ **.**

Ejemplo 1:
Obtener la linealización de $\ln x$ en $x_o = 1$



$f(x) = \ln x$; $x_o = 1$
$f'(x) = 1/x$
$t(x) = f(x_o) + f'(x_o).(x - x_o)$

- $f(x) \approx t(x)$
- $f(x) \approx f(1) + f'(1).(x-1)$
- $\ln x \approx \ln 1 + 1.(x-1)$
- $\ln x \approx x - 1$

Luego: $t(x) = x-1$, linealización de **f** en $x_o = 1$

Así: $\ln x \approx t(x)$; para todo x en un entorno de $x_o = 1$

$\ln 2 \approx t(2) = 1$ → $\varepsilon(2) = [\ln(2) - t(2)] = ??$

$\ln 1.5 \approx t(1.5) = 0.5$ → $\varepsilon(1.5) = [\ln(1.5) - t(1.5)] = ??$

* Obviamente no podemos calcular el error ´*exacto*´; aunque si podemos apreciar (del gráfico) que este va disminuyendo a medida que $x \to 1$; que $\varepsilon(1.5) < \varepsilon(2)$.

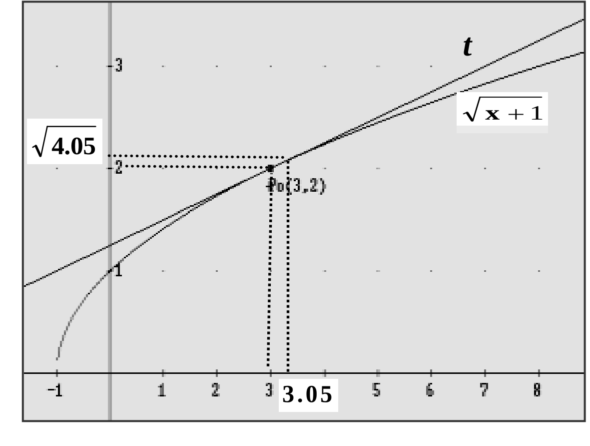
* Por otro lado, aún cuando dado un x no podemos *calcular* el error , está claro que este existe y tiene un valor fijo para cada x.

Ejemplo 2: encontrar la aproximación lineal para $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x_o = 3$.
Aproximar $\sqrt{2.95}$ y $\sqrt{4.05}$. Indicar si la aprox. es "por exceso" o "por defecto".

$f(x) = \sqrt{x+1}$; $x_o = 3$

$f'(x) = 1/(2\sqrt{x+1})$

$t(x) = f(x_o) + f'(x_o).(x - x_o)$



- $f(x) \approx t(x)$
- $f(x) \approx f(3) + f'(3).(x-3)$
- $f(x) \approx 2 + 1/4.(x-3)$
- $\sqrt{x+1} \approx \frac{1}{4} x + \frac{5}{4}$

Luego: $\mathbf{t}(x) = \frac{1}{4}\,x + \frac{5}{4}$ ó $\mathbf{t}(x) = 0.25\,x + 1.25$ es la linealización de **f** en $x_o = 3$.

- Dado **a** ∈ R, y **a** próximo a $x_o = 3$,
  ¿cómo damos una aproximación de $\sqrt{\mathbf{a}}$ usando la linealización hallada?:
  1º) buscando un x^* tal que $\sqrt{\mathbf{a}} = \mathbf{f}(x^*) = \sqrt{x^* + 1}$ ($\rightarrow x^* = \mathbf{a} - 1$)
  2º) calculando $\mathbf{t}(x^*)$

Por ej., $\mathbf{a} = 2.95 \rightarrow \sqrt{\mathbf{2.95}} = \mathbf{f}(x^*) = \sqrt{x^* + 1} \rightarrow x^* = 2.95 - 1 \rightarrow x^* = \mathbf{1.95}$

$\sqrt{\mathbf{2.95}} = \mathbf{f}(1{,}95) \approx \mathbf{t}(1{,}95) = 0{,}25 \cdot 1{,}95 + 1{,}25 = 1{,}7375 \rightarrow \sqrt{\mathbf{2.95}} \approx \mathbf{1.7375}$

$\mathbf{a} = 4.05 \rightarrow \sqrt{\mathbf{4.05}} = \mathbf{f}(x^*) = \sqrt{x^* + 1} \rightarrow x^* = 4.05 - 1 \rightarrow x^* = \mathbf{3.05}$

$\sqrt{\mathbf{4.05}} = \mathbf{f}(3{,}05) \approx t(3{,}05) = 0{,}25 \cdot 3{,}05 + 1{,}25 = 2{,}025 \rightarrow \sqrt{\mathbf{4.05}} \approx \mathbf{2.025}$

- ***¿ por exceso o por defecto ?***: del **gráf f** y la recta tangente decidimos fácilmente esta cuestión: la curva está "por debajo" de la recta tangente luego, las aprox_s. son "*por exceso*".

4.11 Aproximación por Polinomios: *Polinomios De Taylor*

En el párrafo anterior encontramos la aproximación lineal de algunas funciones**,** la usamos para aproximar algunos valores en el entorno del punto, vimos que muy poco se podía decir del ´error´ producido en cada caso. Retomamos el ***ejemplo 1*** para analizar en más detalle esta cuestión del error que producimos al aproximar una función cualquiera por una función lineal .

***Ejemplo 1*:**

$\mathbf{f}(x) = \ln x$; $x_o = 1$, $\mathbf{f}'(x) = 1/x$

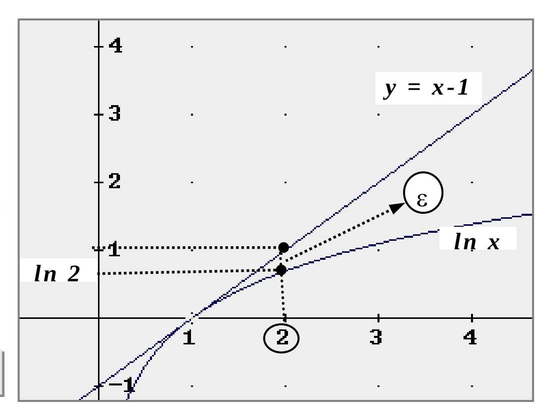
$\mathbf{t}(x) = \mathbf{f}(x_o) + \mathbf{f}'(x_o).(x - x_o)$

$\mathbf{t}(x) = x - 1$

Vimos que $\mathbf{f}(x) = \mathbf{t}(x) + \varepsilon(x)$, o sea que:

- $\mathbf{f}(x) \approx \mathbf{t}(x)$ con $\varepsilon(x) = \mathbf{t}(x) - \mathbf{f}(x)$
- $\ln x \approx x - 1$ con $\varepsilon(x) = (x-1) - \ln x$

$\ln 2 \approx \mathbf{t}(2) = 1$ $\varepsilon_1 = 1 - \ln 2$



Respecto a la aproximación de ***ln2*** obtenida por linealización del logaritmo, ¿habrá alguna manera de estimar el error cometido? .

Resolver esta cuestión requiere la aplicación de complejos resultados teóricos que no son el objetivo de este curso. Hoy día, todos sabemos que con una calculadora podemos obtener en forma rápida y sin pensar una aproximación de ***ln2,*** por lo que quizás algunos se pregunten si es necesario estudiar este tema. La respuesta es "sí", porque el mismo se usa para demostrar resultados teóricos dentro de la propia matemática e incluso fuera de ella (por ej, en fisicoquímica). Además, si bien la calculadora da un valor aproximado de ***ln2***, lo que no da es el ´error´ implícito en esa aproximación. Luego, necesitamos saber algo más acerca del mismo**.** En lo que sigue, vamos a aprovechar el avance tecnológico para proceder a *estimar el error*, sin

acudir a resultados teóricos. O sea, vamos a usar la calculadora para obtener los logaritmos y con ellos una *estimación del error,* porque lo que nos interesa estudiar ahora no es la aproximación en sí, sino el "*error*" cometido al aproximar.

$$\ln 2 \approx t(2) = 1 \xrightarrow{\text{por aproxlineal}} \ln 2 \approx 1$$

$$\varepsilon_1(2) = 1 - \ln 2$$

$$\xrightarrow{\text{calcul: } \ln 2 \approx 0.6931} \varepsilon_1(2) = 1 - 0.6931 = 0.3079 \cong 0.31$$

Concluimos así que si para aproximar ***ln 2*** usamos la ***aproximación lineal*** obtenemos ***ln 2*** $\approx$ ***1*** con un $\varepsilon_{(2)} \cong$ ***0.31***; o sea, con un error bastante "grande". Luego, si por alguna razón necesitáramos dar una "buena" aproximación de $\ln 2$, por ejemplo, con $\varepsilon < 0.01$, la aproximación obtenida por *linealización* no es aceptable.

* *Para pensar*: el valor que da la calculadora, ¿cumple este requisito??; o sea, ¿es 0.6931 una aproximación del ln 2 con $\varepsilon < 0.01$?.

Como entre todas las rectas que pasan por $P_o(1;0)$ *la recta tg es la que mejor aproxima* a ***ln x,*** vemos que no hay forma de aproximar $\ln 2$ con $\varepsilon < 0.01$ por medio de una función lineal, que debemos acudir a otro tipo de función. ¿*Qué tipo de función*?, uno en donde las funciones sean lo más "simple" posible; o sea, continuas, suaves y fáciles de calcular. ¿Existen funciones así?: si, ***los polinomios***.

La función lineal es un polinomio de grado 1. Luego vamos a probar de aproximar con polinomios *de grado mayor que 1,* ver si con ellos el error disminuye.

Así, dada **f** y un ***x*** del Df, en lo que sigue nos ocupamos de hallar un polinomio de grado **n**, que indicamos p_n, tal que si con $\varepsilon_n(x)$ indicamos el error, tengamos:

$$f(x) \approx p_n(x)$$

$$f(x) = p_n(x) + \varepsilon_n(x) \quad \text{con } \varepsilon_n(x) \text{ un infinitésimo para } n \to +\infty$$

Si **f** tiene **n** derivadas sucesivas y finitas en un punto x_o próximo a x, se puede demostrar que existe y es único el polinomio de grado **n** que aproxima a **f** (x) en un entorno de x_o y tiene la propiedad de que $\varepsilon_n(x) \to 0$ a medida que aumenta n.

Ejemplo: hallar un polinomio de grado 2 que permita aproximar ***ln 2.*** Estimar ε_2

- $f(x) = \ln x$; $x = 2$; $x_o = 1$
  (→ próximo a 2, y donde se puede calcular **f** y sus derivadas)
- **f** es **n** veces derivable:

$$f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f^{(4)}(x) = \frac{-2.3}{x^4}; \; \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

- Buscamos un polinomio de grado 2, $p_2(x)$ tal que:

$$f(x) \approx p_2(x)$$

$$f(x) = p_2(x) + \varepsilon_2(x) \quad \text{con} \quad \varepsilon_2(x) = f(x) - p_2(x)$$

$$\varepsilon_2(2) < \varepsilon_1(2) \approx 0.31$$

Un polinomio de grado 2, cualquiera sea su forma, queda determinado por ***3 coeficientes***. Luego, resolver este problema implica resolver ***una ecuación con 3 incógnitas.***
Para que una ecuación de este tipo tenga ***solución única*** se requiere la existencia de cierta cantidad de ***condiciones sobre la ecuación***; en particular, se requiere que haya ***la misma cantidad de condiciones que de incógnitas***. Así, en este caso, para obtener ***solución única*** tenemos que imponer ***3 condiciones***.

Antes de comenzar a resolver el problema, y dado que existen distintas maneras de escribir un polinomio, conviene detenerse y buscar la más conveniente a los objetivos propuestos.

- $p_2(x) = A_o + A_1 x + A_2 x^2$ → *desarrollado*
- $p_2(x) = A_2 (x - x_1).(x - x_2)$ → *factorizado*
- $p_2(x) = A_2 (x+h)^2 + k$ → *en forma canónica*
- $p_2(x) = a_o + a_1 (x- x_o) + a_2 (x- x_o)^2$ → *según las potencias de $(x-x_o)$; a partir de dividir el polinomio en forma sucesiva por dicho binomio.*

El polinomio buscado es aquel que *mejor aproxime* a la función en un entorno de x_o, luego la forma del polinomio más práctica para nuestros objetivos es la última.

Partimos entonces de $p_2(x) = a_o + a_1 (x- x_o) + a_2 (x- x_o)^2$,

fijamos ***3 condiciones*** y trabajamos para hallar los coeficientes a_0; a_1 y a_2.

<u>Condiciones sobre</u> **<u>$p_2(x)$</u>:**

$$(S)\begin{cases} p_2(x_o) = f(x_o) & \Rightarrow \text{ que ambas curvas pasen por } P_0(x_o; f(x_o)) \\ p_2'(x_o) = f'(x_o) & \Rightarrow \text{ que ambas curvas tengan la misma } \textit{recta tg} \text{ en } P_o \\ p_2''(x_o) = f''(x_o) & \Rightarrow \text{ que ambas curvas tengan la misma } \textit{curvatura} \text{ en } P_o. \end{cases}$$

<u>Derivamos el polinomio, lo calculamos en x_o, reemplazamos en (S) y resolvemos:</u>

$$p_2(x) = a_o + a_1 (x- x_o) + a_2 (x- x_o)^2 \Rightarrow p_2(x_o) = a_o$$
$$p_2'(x) = a_1 + 2 a_2 (x- x_o) \Rightarrow p_2'(x_o) = a_1$$
$$p_2''(x) = 2 a_2 \Rightarrow p_2''(x_o) = 2 a_2$$

$$\longleftrightarrow (S)\begin{cases} a_o = f(x_o). \\ a_1 = f'(x_o) \\ 2 a_2 = f''(x_o) \end{cases}$$

Concluimos que: $p_2(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x- x_o) + \frac{f''(x_o)}{2}(x- x_o)^2$

$x_o = 1$ → $p_2(x) = f(1) + f'(1)(x- 1) + \frac{f''(1)}{2}(x- 1)^2$

$x = 2$; $f(x) = \ln x$ → $p_2(2) = 0 + 1.(2 - 1) + \frac{(-1)}{2}(2- 1)^2 = 0.5$

$$\ln 2 \approx p_2(2) \xrightarrow{\text{por aprox. cuadrática}} \ln 2 \approx 0.5$$
$$\varepsilon_2(2) = |0.5 - \ln 2|$$
$$\xrightarrow{\text{calcul: } \ln 2 \approx 0.6931} \varepsilon_2(2) = |0.5 - 0.6931| = 0.19331 \cong 0.19$$

Y verificamos que, $\varepsilon_2(2) < \varepsilon_1(2) \approx 0.31$

Pero también verificamos que ε_2 es todavía muy grande; más aún, que con este error estamos muy lejos de tener una aproximación ***aceptable*** ($\varepsilon < 0.01$) de ***ln 2.***

¿Qué podemos hacer? : buscar un polinomio de grado 3.

Buscamos un polinomio de grado 3.

$$p_3(x) = a_o + a_1 (x - x_o) + a_2 (x - x_o)^2 + a_3 (x - x_o)^3 \Rightarrow ¿\ a_o ; a_1 ; a_2 ; a_3 ?$$

Si queremos solución única, necesitamos *4 condiciones*.

Sin dudas debemos seguir pidiendo que ambas curvas pasen por P_o, que tengan igual recta tg e igual curvatura en P_o. Tenemos así tres condiciones, falta la cuarta. Ya no hay argumentos geométricos a la vista, de modo que acudimos a la "*intuición razonada*". Así, y dado que la secuencia funcionó para el $\mathbf{p_2}$, lo razonable parece pedir que las derivadas terceras, coincidan en x_o.

$$(S)\ \begin{cases} p_3(x_o) = f(x_o). \\ p_3'(x_o) = f'(x_o) \\ p_3''(x_o) = f''(x_o) \\ p_3'''(x_o) = f'''(x_o) \end{cases}$$

Derivamos, calculamos en x_o, reemplazamos en (S), resolvemos y obtenemos:

$$(S)\ \begin{cases} a_o = f(x_o). \\ a_1 = f'(x_o) \\ a_2 = \dfrac{f''(x_o)}{2} \\ a_3 = \dfrac{f'''(x_o)}{2.3} \end{cases}$$

Concluimos que:

$$p_3(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2}(x - x_o)^2 + \frac{f'''(x_o)}{2.3}(x - x_o)^3$$

y se pude probar (*no lo hacemos*) que $\varepsilon_3(2) \approx \mathbf{0.14} < \varepsilon_2(2) < \varepsilon_1(2)$

O sea que al aumentar el grado del polinomio en una unidad, el error disminuyó en solo, ***5 centésimos !!*** y seguimos por lo tanto sin cumplir el requisito de $\varepsilon < 0.01$

OBSERVACIONES:

Si bien el error disminuye al aumentar el grado del polinomio resulta claro que lo hace en forma *muy lenta* y que, en consecuencia, el polinomio que aproxime la función con $\varepsilon < \mathbf{0.01}$ tendrá que ser de grado *muy grande*; por ende, muy grande también el trabajo para hallarlo *por este camino*. Se trata entonces de ver si podemos generalizar lo hecho hasta aquí, hallar una expresión genérica para el polinomio de aproximación, la cual facilite y posibilite el trabajo.

Así, si observamos el caso de los polinomios de grado 2 y grado 3, detectamos que existe una "regularidad" en la forma en que se van generando los coeficientes. Efectivamente, a poco que prestemos atención, vemos que para "n" genérico:

$$a_n = \underline{\textit{coeficiente del término de grado } n} = \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}$$

$$(\ n! = 1.2.3......n\ ,\quad \text{factorial de } n\ )$$

Los polinomios cuyos coeficientes tienen esta forma se conocen como **polinomios de Taylor**

4.12 Polinomio de Taylor

Dada **f** "n-veces derivable" en x_o ; los polinomios de Taylor aproximan a **f**(x) para todo *x* en un conveniente entorno de x_o y se puede demostrar que el error disminuye al ir aumentado el grado del polinomio. O sea:

Polinomio de Taylor de f , alrededor de x_o.

$$p_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{f'''(x_o)}{n!}(x-x_o)^3$$

- $f(x) \approx p_n(x)$
- $f(x) = p_n(x) + \varepsilon_n(x)$ → Fórmula de Taylor con resto ; ε = error ó resto de orden n.
- $\varepsilon_n(x) = f(x) - p_n(x)$ y $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$

n	$p_n(x)$	$p_n(x)$ (para $f(x) = \ln x$; $x_o = 1$)
1	$p_1(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o)$	$p_1(x) = x - 1$
2	$p_2(x) = p_1(x) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2$	$p_2(x) = (x-1) - ½ (x-1)^2$
3	$p_3(x) = p_2(x) + \frac{f'''(x_o)}{3!}(x-x_o)^3$	$p_3(x) = (x-1) - ½ (x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$
4	$p_4(x) = p_3(x) + \frac{f^{(4)}(x_o)}{4!}(x-x_o)^4$	$p_4(x) = p_3(x) + \frac{-6}{4!}(x-1)^4$
5	$p_5(x) = p_4(x) + \frac{f^{(5)}(x_o)}{5!}(x-x_o)^5$	$p_5(x) = p_4(x) + \frac{24}{5!}(x-1)^5$

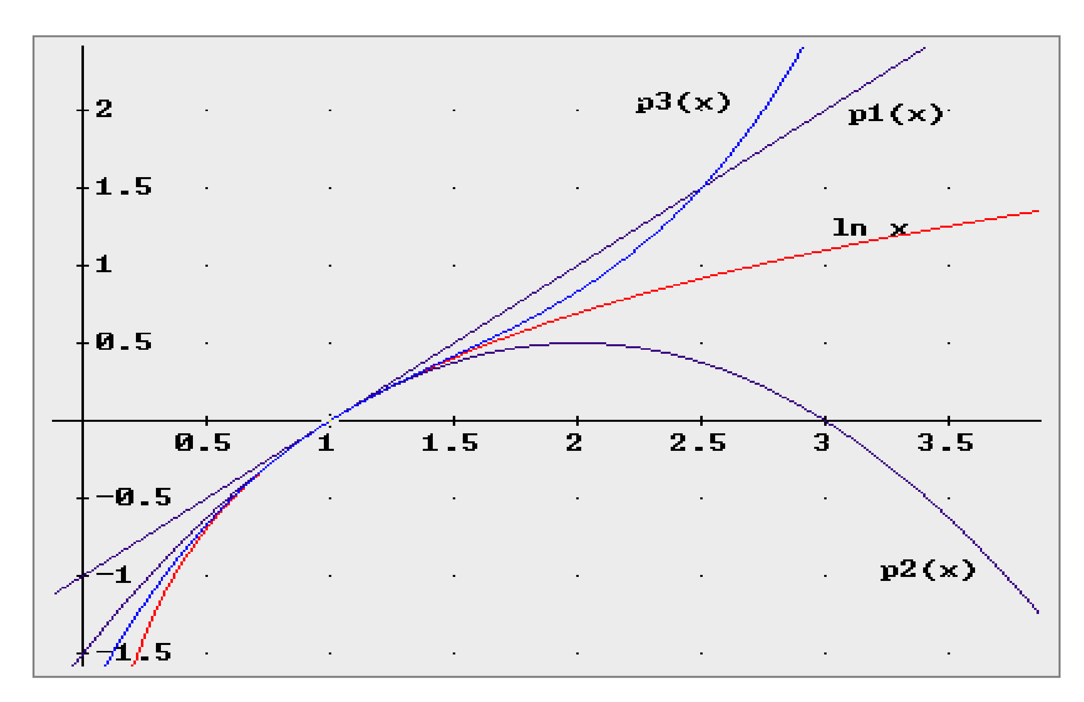
(*) en este cuadro vemos como el trabajo se puede *sistematizar* ya que cada nuevo polinomio se puede obtener del anterior agregando un nuevo sumando cuya expresión general es:

$$\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} \cdot (x - x_o)^n$$

🛠 ¿Podemos ahora resolver el problema que dio origen a todo este desarrollo?
O sea, ¿aproximar ***ln 2*** con ε< **0.01** usando un apropiado polinomio de Taylor?

Polinomios de Taylor para $f(x) = \ln x$; $x_o = 1$

n	$p_n(x)$ (desarrollado)	$p_n(2)$	$\varepsilon_n(2)$
1	$p_1(x) = x - 1$	$p_1(2) = 1$	≈ 0.31
2	$p_2(x) = -½\, x^2 + 2x - 1.5$	$p_2(2) = 0.5$	≈ 0.19
3	$p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}$	$p_3(2) = 0.833$	≈ 0.14
4	$p_4(x) = -0.25x^4 + 1.33x^3 - 3x^2 + 4x - 2$	$p_4(2) = 0.596$	≈ 0.10



Vemos que si bien pudimos sistematizar el cálculo, por este camino (construir el polinomio, calcularlo en 2 y estimar el error) estamos muy lejos de alcanzar una aproximación con el error solicitado. No queda otra que acudir a la teoría, donde tenemos el siguiente resultado

Forma de Lagrange del Error

Si **f** es una función con derivada de orden ***n+1*** en todos los puntos de un entorno de $\mathbf{x_o}$, entonces dado un punto **x** de dicho entorno, existe un punto "**c**" entre $\mathbf{x_o}$ y **x** tal que si $\mathbf{p_n}$ es el ***polinomio de Taylor de*** **f** alrededor de $\mathbf{x_o}$, entonces:

$$f(x) = p_n(x) + \varepsilon_n(x) \quad \text{con} \quad \varepsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x-x_0)^{n+1}$$

Forma de Lagrange del error

Si $f^{(n+1)}$ es acotada en un entorno de $\mathbf{x_o}$, entonces la forma de Lagrange del error permite establecer en forma rigurosa ***una cota para el error absoluto***. También facilita la búsqueda del "n" para que el error sea el requerido para el caso.

Así, y por ej., al aproximar ***ln 2*** con el polinomio de Taylor de grado 4, obtuvimos:

$$p_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

Luego, $f(x) = p_4(x) + \varepsilon_4(x)$ con $\varepsilon_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{(5)!}.(x-1)^5$, $1<c<2$

$f(2) = p_4(2) + \varepsilon_4(2)$ con $\varepsilon_4(2) = \frac{f^{(5)}(c)}{(5)!}.(2-1)^5$, $1<c<2$

$\ln 2 \approx p_4(2) = 0.596$ con $\varepsilon_4(2) = \frac{f^{(5)}(c)}{(5)!}$, $1<c<2$

Acotamos el error cometido al aproximar con p_4

Calculamos la derivada quinta de **f** , acudiendo a la expresión general .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n} \xrightarrow[x=c]{n=5} f^{(5)}(c) = (-1)^4\,\frac{4!}{c^5} = \frac{4!}{c^5}$$

Reemplazando en la fórmula del error:

$$|\varepsilon_4(2)| = \left|\frac{f^{(5)}(c)}{5!}\right| = \left|\frac{\frac{4!}{c^5}}{5!}\right| = \left|\frac{4!}{5!\,c^5}\right| = \left|\frac{1}{5\,c^5}\right| \qquad ; \quad 1<c<2$$

El valor de "**c**" es "desconocido" , luego no podemos "calcular" el error.
Sí lo podemos "acotar" dado que sabemos que "**c**" está entre 1 y 2 :

$$1<c<2 \;\Rightarrow\; c>1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{c}<1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{c^5}<1$$

Luego: $|\varepsilon_4(2)| = \frac{1}{5\,c^5} < \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; |\varepsilon_4(2)| < \frac{1}{5} = 0.2 \;\Rightarrow\; |\varepsilon_4(2)| < 0.2$ (*y no cumple lo pedido*)

➢ ***Buscamos un "n" para el cual*** p_n ***aproxima ln 2 con*** $\varepsilon < 0.01$

$$\varepsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,.\,(x-x_0)^{n+1}$$

$$\xrightarrow[x=2]{x_0=1} \varepsilon_n(2) = \frac{\frac{(-1)^n\,(n)!}{c^{n+1}}}{(n+1)!}\,.\,(2-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1).\,c^{n+1}}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_n(2)| = \frac{1}{(n+1).\,c^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \quad ; \left(\textit{pues } \frac{1}{c^{n+1}} < 1\right) \Rightarrow |\varepsilon_4(2)| < \frac{1}{n+1}$$

Así, nuestro problema estará resuelto si encontramos "**n**" tal que, $\frac{1}{n+1} < 0.01$.

Buscamos "**n**" : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \;\Leftrightarrow\; n+1 > 100 \;\Leftrightarrow\; n > 99$

Conclusión: un polinomio que permite aproximar ***ln 2*** con $\varepsilon < 0.01$ es el p_{100}

$p_{100}(2) = 0.698164507991 \;\Rightarrow\;$ **ln 2** ≈ 0.698164507991 con $\varepsilon < 0.01$

(aproximación del **ln 2** obtenida con un software).

4.13 Ejercicios

PARTE 1 - LA DERIVADA Y EL "ESTUDIO DE FUNCIONES".

I – TEOREMAS DE ROLLE Y LAGRANGE:

1. Indicar si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle. En caso afirmativo, hallar el o los valores de "c" que verifican la tesis.

a) $f(x)= x^2 - 2x + 2$ en $[0;2]$ b) $f(x)= x^4 - 2x + 1$ en $[-2;2]$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ -2 \le x < 1 \\ x & ; \ 1 < x < 4 \end{cases}$ d) $f(x)= \begin{cases} x^2 & ; \ -2 \le x < 1 \\ 2x & ; \ 1 < x < 4 \end{cases}$

2. Hallar el o los valores de "c" del T.V.M. de Lagrange. Ilustrar con un gráfico.

a) $f(x)= \sqrt{x-1}$; $[1;5]$ b) $f(x)= x^2 - 3x$; $[1;4]$

c) $f(x)= \ln(x)$; $[1;e]$ d) $f(x)= \operatorname{sen} x$; $[0;\pi]$

e) $f(x)= \operatorname{sen} x$; $[0;3\pi]$ f) $f(x)= x^2 - 2x + 1$; $[-1;2]$

3. Dada $f(x)= \sqrt[3]{x^2}$ en [-1;1] calcular f(1) , f(-1) y f '(x).
¿Se anula la derivada en algún punto del [-1;1]?.
El resultado obtenido, ¿contradice el Teorema de Rolle? . ¿ Porqué?

II - REGLA DE L'HOPITAL:

4. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 . e^x)}{x^2}$ o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen}(2x))^{2x}$

b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{1 - e^{2t}}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 . \ln x$ p) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty} x . \operatorname{sen}(\dfrac{3}{x})$ q) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x^2})^4$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - x - 2\sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x}$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x \operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x})$ r) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos 6x}{\ln \cos 3x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2}$ s) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x})$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{x^2}$ m) $\lim\limits_{x\to 0^+} (4x)^{\operatorname{sen} x}$ t) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x^2 - x})$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2-x).e^x - x - 2}{x^3}$ n) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x - \operatorname{sen} x).\ln x$ u) $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x - x)$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln x)$

III – ESTUDIO DE FUNCIONES:

5. Graficar las siguientes funciones e indicar, *leyendo del gráfico*, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de ellas. Luego, controlar las respuestas dadas acudiendo al criterio de la derivada primera.

a) $f(x) = \ln x$ b) $f(x) = 4^{-x}$

c) $f(x) = \dfrac{-2}{x}$ d) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $x \in [-2\pi; 2\pi]$

e) $f(x) = (x-2)^{17}$ f) $f(x) = (x-2)^{18}$

g) $f(x) = (x+3)(x-3)$ h) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$

i) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ j) $f(x) = \dfrac{x-4}{-x+1}$

6. Dada $f(x) = (x-2)^3 + 8$ se pide:

a) hallar g, inversa de f. Graficar f y g en un mismo sistema e indicar, *leyendo del gráfico*, intervalos donde f y g sean estrictamente crecientes.

b) Derivar f y g y corroborar lo afirmado en (a) aplicando el criterio de la derivada 1ra (donde sea posible) o la definición de estrictamente creciente.

c) Indicar **V** ó **F**, justificar la respuesta:

c1) " f derivable y estrictamente creciente en Df $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$, $\forall$ x$\in$Df ".

c2) " f derivable en Df , f' continua en x_o y $f'(x_o) > 0$ $\Rightarrow$ f estrictamente creciente en un entorno de x_o "

c3) " f biyectiva, estrictamente creciente, derivable y $f'(x) \neq 0$ en Df $\Rightarrow$ g, su inversa, es estrictamente creciente en Dg ".
(*Sugerencia*: hallar $g'(x)$ a partir de derivar la identidad $f \circ g = \mathbf{id}_{Dg}$ y aplicar luego los resultados teóricos que correspondan al caso).

7. Sea g la inversa de f con $f(y) = y^7 + y^5 + 17$ Analizar si g está estrictamente creciendo (o decreciendo) en un entorno de $x_o = f(y_o)$ con $y_o = 19$.
Informar por escrito el método o forma como concluye su respuesta.

8. Trazar la gráfica de una función que tenga las propiedades enumeradas en cada ítem. Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

a) Tres máximos relativos, mínimo absoluto y cinco puntos donde alcanza el mínimo absoluto.

b) Dos puntos donde alcanza el mínimo absoluto, ningún máximo.

c) Seis mínimos relativos, máximo absoluto y dos puntos donde alcanza el máximo absoluto.

d) Sea continua en R, tenga cuatro ceros, no tenga máximo absoluto y y tenga mínimo absoluto igual a **- 6 .** ¿Puede expresar la ley de esta función por medio de una ecuación?. Sí?. Cuál?. Porqué?.

e) Sea continua en R, tenga cinco ceros, no tenga máximo ni mínimo absoluto

y tenga mínimos relativos positivos e iguales . ¿Puede expresar la ley de esta función por medio de una ecuación?. Sí?. Cuál?. Porqué?.

Secuencia *sugerida* para el estudio de una función:

1- Dominio de la función. Dom. continuidad. Dom. derivabilidad
2- Intersecciones con los ejes coordenados
3- Propiedades: paridad, signo definido, periódica, etc.
4- Límites y asíntotas
5- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
6- Extremos relativos y absolutos
7- Intervalos de concavidad y convexidad
8- Puntos de inflexión
9- Gráfico
10- Imagen

Nota: *La secuencia dada es una enumeración de todas las cuestiones a analizar y/o determinar al "estudiar una función" para graficarla. Es una> simple "ayuda memoria" de las cosas a hacer; y si bien están presentadas en un cierto "orden" esto obedece a razones puramente "literarias" y no "matemáticas"; es decir,* no es "indispensable" seguir este orden.

9. Para las funciones "*elementales*" que se indican a continuación, se pide hacer un "*bosquejo*" de su gráfico, "*sin acudir a la derivada*"; o sea, teniendo en cuenta sólo (1-2-3 y 4) de la secuencia para graficar funciones. Indicar luego, y *leyendo del gráfico*, si tienen máximos y /o mínimos relativos. ***Finalmente,*** verificar las respuestas acudiendo, si se puede, al ***criterio de la derivada enésima***.

a) $f(x)=(x-1)^5-32$ b) $f(x)=x^4-16x^2$ c) $f(x)=(x-1)^2.(x-2)$

d) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ e) $f(x)=|\ln x|$ f) $f(x)=x^4-12x^3+48x^2$

10. Efectuar el estudio de los siguientes polinomios y graficar los mismos. Si el polinomio presenta punto de inflexión a tangente no horizontal, $\mathbf{P_I}$, obtener la ecuación de la recta tangente a la curva en $\mathbf{P_I}$ y graficarla sobre la curva.

a) $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ b) $f(x)=x^4-12x^3+48x^2$ (17– f)

c) $f(x)=x^5-20x^2$ d) $f(x)=x^3-9x$

e) $f(x)=x^4-3x^2-4$ f) $f(x)=3x^5-x^3$

g) $f(x)=x^3-6x^2+9x-5$ h) $f(x)=x^6-192x+17$

i) $f(x)=\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{5}{4}x^4+2x^2+6$ j) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-3x^2+10$

Nota: *de ser posible, calcular las raíces del polinomio. De no serlo, obtener (por aplicación del Teorema de Bolzano) un intervalo donde se encuentre la raíz (*si existe*).*

11. Efectuar el estudio de:

a) $f(x) = 16\ x + \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{8}{x^3} + \frac{6}{x}$

c) $f(x) = x.\ \ln x$ d) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

e) $f(x) = sen^2(x)$ en $[0; \pi]$ f) $f(x) = x\,e^{x^2}$

g) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ h) $f(x) = \ln|x|$ j) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

i) $f(x) = x + sen\ x\ ;\ D = [0; \pi]$

k) $f(x) = e^{-x^2}$ m) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

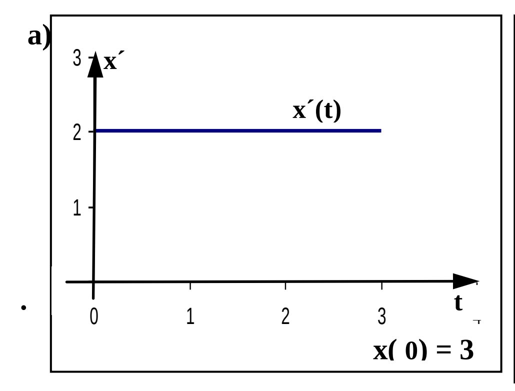
n) $f(x) = x^2 - \ln x$ o) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 2x - 6)$

p) $f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{(x-1)^2}$ q) $f(x) = e^{-\alpha x^2} \rightarrow$ i) $\alpha > 0$ ii) $\alpha < 0$

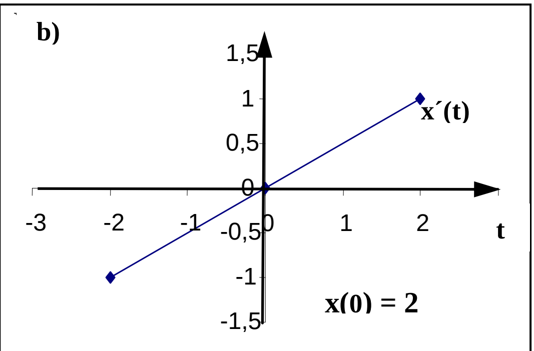
12. Siendo $x = x(t)$, los siguientes gráficos corresponden a $x'(t)$.

A partir de ellos hacer el estudio de $x(t)$ y luego graficarla.

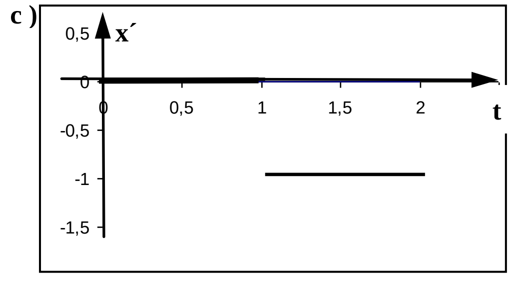
a)



b)

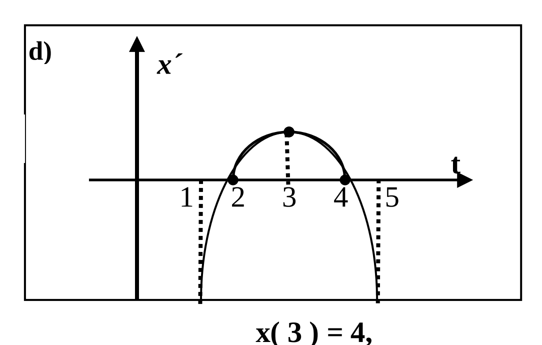


c)



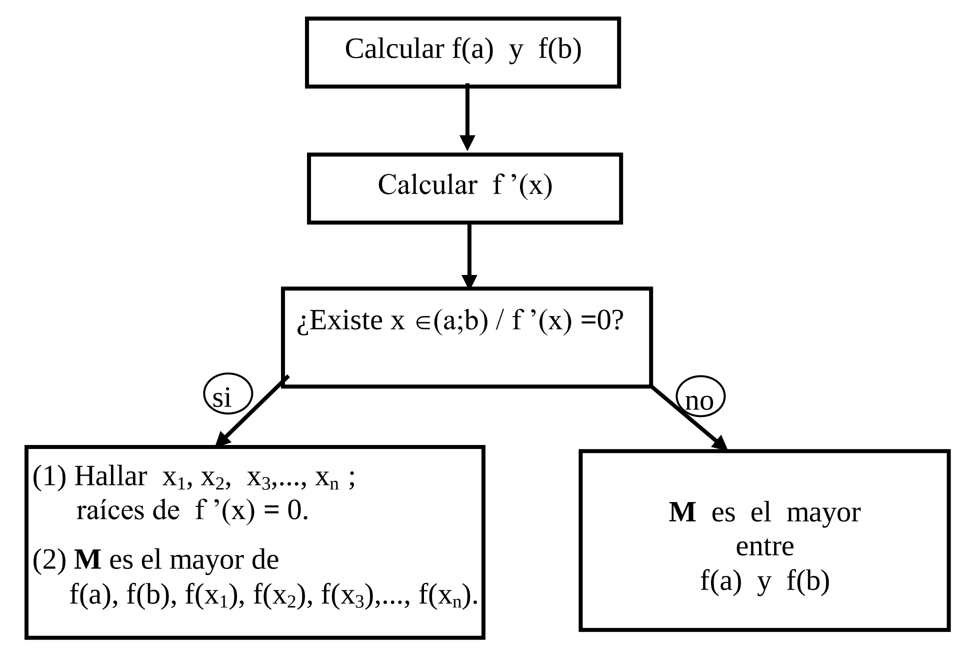


d)



x(3) = 4,

13. Sea **f** : [a;b] → R; **f** *derivable* en [a;b]. El siguiente diagrama de flujo permite hallar **M** = ***máximo absoluto*** de **f** en [a;b]. Analizar e interpretar el diagrama; luego construir uno similar para la búsqueda de **m** = ***mínimo absoluto*** de **f** en [a;b].



14. Si existe x* ∈ [a;b] tal que f no es derivable en x*, el diagrama para la búsqueda de extremos absolutos del ej. 18, ¿es válido?. ¿Porqué?.

15. Hallar los extremos absolutos de:

a) $f(x)=x^3+3x^2$ en (i) $\left[-4;\frac{1}{2}\right]$ (ii) $[-4;2]$ (iii) $\left[-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right]$

b) $f(x)=\frac{1}{x}$ en $\left[\frac{1}{2};4\right]$

c) $f(x)=|x-1|$ en $[-1;3]$

d) $f(x)=x+\text{sen } x$ en $[0;2\pi]$

e) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1;8]$

f) $f(x)=\frac{x^6}{6}-\frac{5}{4}x^4+2x^2+6$ en $[-3;4]$

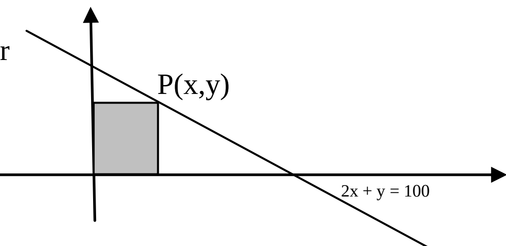
g) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2+10$ en $[-2;5]$

IV – PROBLEMAS DE EXTREMOS ABSOLUTOS:

En lo que sigue el objetivo es aplicar la derivada al estudio del *comportamiento* de expresiones que modelizan la situación o proceso que estamos estudiando, expresión sobre la que tenemos uno o más interrogantes (crece?, tiene máximo?, mínimo?, donde crece más rápido?, etc...). En general la expresión a estudiar resulta ser una *función de dos o más variables*. Luego, y en esta etapa, podremos resolver el problema si tenemos la función *más alguna condición o restricción* que permita transformar la expresión en una *función de una variable* (únicas funciones conocidas hasta aquí).
Dado que los extremos de una función con dominio en un intervalo cerrado y acotado [a; b] pueden estar en los *extremos del intervalo*; que de la *resolución algebraica* de una ecuación pueden resultar valores que no están en dicho dominio; es de suma importancia determinar y escribir en forma clara y destacada, *el dominio natural de la función*. (la existencia o calidad de un extremo *depende* de dicho dominio).

1 6. La suma de dos números es 48. ¿Cuál es el valor mínimo posible de la suma de sus cuadrados?

17. Hallar el área máxima que puede alcanzar el rectángulo indicado en la figura, al desplazar el vértice P sobre la recta $2x + y = 100$.



18. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio 10 .

19. Se desea envasar leche en cajas de base cuadrada, cerradas y de 1000 cm^3 de capacidad. Obviamente interesa que las dimensiones de estas cajas sean tales que requieran la menor cantidad posible de material para construirlas. Se pide hallar cuales son las dimensiones de la caja que hacen esto posible.

20. Se desea construir una caja sin tapa a partir de una pieza de metal rectangular de 5 m. de ancho por 8 m. de largo. Para ello se recorta, en sus cuatro esquinas, cuadrados de lado "x". La pieza luego se dobla y se unen los bordes en forma conveniente a los efectos de obtener la caja. ¿ Qué dimensión deben tener los cuadrados que se cortan para que el volumen de la caja sea lo mayor posible?.

21. Queremos fabricar una caja de base cuadrada y volumen $V = 1000$ cm^3 y queremos hacerlo de modo tal que el "costo" sea mínimo. Al respecto sabemos que el material para las caras cuesta " **a**" ctvos/cm^2 y el pegado de las aristas cuesta " **b** " ctvos/cm.

a) Mostrar que **C**, costo total, es función de "x" , lado de la base; que

$$\mathbf{C}(x) = 2\,\mathbf{a}\,x^2 + 8\,\mathbf{b}\,x + \frac{4000\,\mathbf{a}}{\mathbf{x}} + \frac{4000\,\mathbf{b}}{\mathbf{x}^2}$$

b) Mostrar que el planteo de $\mathbf{C}'(x) = 0$ conduce a la siguiente ecuación en ***x***

$$\mathbf{C}'(x) = \mathbf{a}\,x^4 + 2\,\mathbf{b}\,x^3 - 1000\,\mathbf{a}\,x - 2000\,\mathbf{b} = 0\ ;$$

y que el valor óptimo de "**x**" no depende del costo de los materiales. Analizar si este resultado tiene "sentido".

22. La "diferencia de potencial" **U** para una corriente alterna puede calcularse por medio de la siguiente función : $\mathbf{U} = U_o \operatorname{sen}(\omega\ t)$. En relación a ella, se pide:

a) Indicar la ley de la función para una corriente alterna cuyo período es 0,021.

b) hallar la diferencia de potencial máxima para la corriente del item (a) ($\mathbf{U}_o > 0$)

c) Indicar dos instantes donde la alcance.

23. Si una molécula del producto C se forma a partir de una molécula del reactivo A y una del reactivo B; si las concentraciones de A y B son iguales, [A]= [B] = **a** moles/ls., entonces la concentración de C en función del tiempo es

$$[C] = \frac{\mathbf{a^2.k.t}}{\mathbf{akt+1}};$$ donde k es una constante positiva.

a) Establecer si, según el modelo, se alcanza una concentración máxima .

b) Hallar (si existe) el instante donde la velocidad de la reacción es máxima (dominio!!); calcular esta velocidad máxima.

V- MÁS SOBRE BOLZANO, ROLLE Y LAGRANGE:

1) Dada $\mathbf{f}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ demostrar que no existe "c" / $\mathbf{f}(2) - \mathbf{f}(0) = 2\,\mathbf{f}'(c)$.
¿Contradice esto el teorema del valor medio de Lagrange?, porqué?.

2) Dadas las siguientes ecuaciones de la forma f(x) = 0, demostrar que tienen uno y sólo un cero real. Acudir al apoyo de gráficos y teoremas convenientes al caso.

a) $x^3 + x - 1 = 0$ b) $x^5 + 10x + 3 = 0$ c) $3x - 2 + \cos(\frac{\pi}{2}.x) = 0$

Sugerencias:

A) Sabemos que el Teo. Bolzano permite estimar el o los intervalos donde una función puede tener un cero. Pero, para aplicar este teorema debemos detectar un intervalo donde se cumplan las hipótesis del mismo. Una forma de facilitar esta búsqueda consiste en pensar f como la suma de *dos funciones cuyos gráficos se conozca*. (por ej.: si $\mathbf{f}(x) = x^3 + x - 1$; $\mathbf{p}(x) = x^3$; $\mathbf{q}(x) = x-1$ entonces $\mathbf{f} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$).

Como $\mathbf{f}(x) = 0$ equivale a $\mathbf{p}(x) = -\mathbf{q}(x)$, graficamos **p** y **-q** en un mismo sistema y procedemos a buscar un intervalo dentro del cual se produzca la *intersección de ambos gráficos*. (o sea, donde exista ***c*** tal que $p(c) = -q(c)$). Si lo hallamos, tenemos un intervalo donde se produce un cero de **f .** Para verificar la validez del trabajo hecho aplicamos Bolzano al intervalo hallado y concluimos.

Para $\mathbf{f}(x) = x^3 + x - 1$, verificar que existe $c \in [0; 1]$ tal que $\mathbf{p}(c) = -\mathbf{q}(c)$; aplicar luego Bolzano en este intervalo y concluir.

B) Par demostrar que el cero hallado es *único* podemos proceder por "*el absurdo*"; o sea, suponer que existe *otro cero* , aplicar Rolle, *llegar a un absurdo* , concluir.

3) Demostrar que $x^4 + 4x + c = 0$, $c \in R$, tiene a lo sumo 2 raíces reales. Acudir al apoyo de gráficos y teoremas convenientes al caso. Discutir los valores de "c" para los cuales la ecuación tiene dos, una o ninguna raíz real.

Sugerencias: **A)** reconocer f(x), descomponerla en dos funciones, graficarlas, visualizar la situación

B) detectar la existencia de un mínimo absoluto de **f,** concluir.

4) Demostrar que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$; $\forall x > 0$.
Sugerencia: buscar los extremos de $\mathbf{f}(x) = \sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)$; concluir.

5) Si **f** es continua y derivable en R, $\mathbf{f}(0) = -3$ y $\mathbf{f}'(x) \leq 5$ $\forall x$; ¿ qué tan grande puede ser f(2)?. *Sugerencia*: aplicar Lagrange en el [0; 2].

6) Demostrar que si $\mathbf{f}(x) = \text{arc tg}\, x + \text{arc cotg}(x)$ entonces $\mathbf{f}(x) = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in Df$

Sugerencia: mostrar $\mathbf{f}'(x) = 0$ $\forall x \in Df$, concluir.

PARTE 2- DIFERENCIAL Y APROXIMACIÓN POLINÓMICA

1. a) Sea $\mathbf{y = 5\,x^3 - 2\,x^2 + 6}$. Utilizar diferenciales para encontrar el cambio *aproximado* en **y** cuando ***x*** varía de **1** a **1, 03**.

b) Idem para $\mathbf{y = x^4 + 10}$, con ***x*** de **2** a **1, 99**.

2. a) Completar la siguiente tabla, para $f(x) = x^2$; $x_o = 1$

Δx	dy(*1*; Δx) =...........	Δy =__________	$\mathcal{E} = \lvert \Delta y - dy \rvert$
2			
1			
0,5			
0			
-0,5			
-1			
-2			

b) Graficar ***f*** y la recta tangente en $\mathbf{P}(x_o; f(x_o))$.
Marcar **dy**; **Δy** y $\mathcal{E}$ correspondiente a cada **Δx.** Hacer una conjetura respecto al comportamiento de $\mathcal{E}$ para $\Delta x \to 0$; investigar su validez.

3. Para las funciones y puntos indicados a continuación:

i) $f(x) = \frac{1}{2}\, x^2$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

ii) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; se pide:

a) Hallar el diferencial de ***f*** en los puntos x_1 y x_2 indicados en cada caso.

b) Calcular el diferencial y el incremento de ***f*** en cada punto, para $\Delta x = 1$.

c) Encontrar el *error* (absoluto, relativo y porcentual) que se comete al *aproximar* el incremento con el diferencial. Indicar en que punto (x_1 ó x_2) el error sería menos *´significativo´* (*importante*) en relación al *verdadero valor* del incremento.
($\mathcal{E} = |\,E\,| = \lvert \Delta y - dy \rvert$; $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}/dy$; $\mathcal{E}_{\%} = 100\ \mathcal{E}_r$).

d) Indicar ***V ó F***, justificar: "$\mathcal{E}$ es menos *´significativo´* en los puntos donde la función varía a mayor velocidad".

4. Justificar, usando diferenciales, las siguientes fórmulas de aproximación, para $\Delta x \cong 0$

a) $(1 + \Delta x)^2 \cong 1 + 2\,\Delta x$ ▸ aproximar $(1{,}15)^2$; estimar el error.

b) $\sqrt{100 + \Delta x} \cong 10 + \dfrac{\Delta x}{20}$ ▸ aproximar $\sqrt{106}$; $\sqrt{95}$.

c) $\dfrac{1}{1 + \Delta x} \cong 1 - \Delta x$ ▸ aproximar $\dfrac{1}{1{,}5}$; $\dfrac{1}{0{,}8}$; estimar el error.

d) $\operatorname{sen} \Delta x \cong \Delta x$

▸ aproximar, de ser posible, seno α para $\alpha =$ 0,01; -0,2 ; $\frac{\pi}{2}$; 1 ; 1º ; 20º.

▸ obtener seno α con calculadora; concluir en que caso y porqué se puede (o no) usar la fórmula de aproximación indicada.

5. Leemos en un libro que la fórmula $\mathbf{V = 1 + \alpha\,(t - 4)^2}$, con **t** = temperatura en ºC, y $\alpha \cong 8{,}38.10^{-6}$ permite obtener el volumen **V** de un gramo de agua cuando la temperatura del medio es mayor o igual a cero (**t** ≥ 0ºC). Al respecto, hacer un bosquejo del gráfico de **V** y , usando diferenciales,

a) *estimar* la *variación* de volumen debida a una variación infinitesimal de temperatura (un *´dt´*) cuando $t_o = 0º$. Idem para $t_o = 2º$; $t_o = 4º$; $t_o = 6º$.

b) indicar que informan los resultados del item (a) en cuanto al comportamiento del volumen de 1gr de agua según la temperatura. (se expande?; contrae?, rapidez?). Hacer lo propio en cuanto a la densidad de 1gr de agua.

c) ¿Tienen sentido ´*físico/químico*´ los resultados obtenidos?; es decir, la fórmula hallada, ¿es un ´*buen modelo*´ de la dependencia V- t para un 1 gr. de agua sometido a una fuente de calor, a partir de 0ºC?. Si?, no?, porqué?. Si le informan que es un ´*buen modelo*´, en tal caso, ¿lo usaría para calcular el volumen de 1gr de agua a 150ºC?. Si?, no?, porqué? .

*** *Diferencial y errores*** :

Dada $y = f(x)$, para estimar $\mathcal{E}$, ´*error absluto*´ en el cálculo de y, procedemos a:

- Reconocer $\mathcal{E}$ → $\mathcal{E} = |\,E\,| = |v_{verdadero} - v_{c\ alculado}| = |\,y - y_o\,| = |\,\Delta y\,|$
- Aproximar el incremento de f por el diferencial de f → $\Delta y \approx dy$.
- Calcular el diferencial tomando como incremento de la variable independiente (Δx) la ´cota del error´ indicada para la misma: $dy = f'(x_o).\Delta x_{(máx)} = f'(x_o).\text{™}_x$
- Estimar el error relativo a los efectos de evaluar la ´*significatividad*´ del error.

$$\frac{\Delta y}{y_o} \approx \frac{dy}{y_o} = \frac{f'(x_o).dx}{f(x_o)} = \frac{f'(x_o)}{f(x_o)}.dx$$

6. Se mide el lado de un cubo y se encuentra que la longitud del mismo es de x_o cm. Se hace esto con un instrumento donde ε (error de apreciación), se conoce. Este error se propaga a cualquier calculo realizado con x_o , por ejemplo al del volumen del cubo (**V**). El valor exacto de este error se desconoce (al igual que el de x_o) pero, en general y conocido ε, se puede establecer una ´cotar superior´ del mismo.

Si se sabe que $\varepsilon = \pm 0.01$ (*cm*), se pide entonces:

a) hallar el *error absoluto´máximo´* producido al calcular **V** con $x_o = 3$.
Indicar el *intervalo de incerteza* para los valores de **V.**
b) hallar el *error absoluto´máximo´* producido al calcular **V** con $x_o = 10$.
Indicar el *intervalo de incerteza* para los valores de **V.**
c) analizar en qué caso es más ´*significativo*´ el error inducido en **V,** por el error de medición en x_o.
d) justificar la validez de la siguiente expresión: $\frac{\Delta V}{V_o} \approx 3.\frac{dx}{x_o}$, expresar en una oración el sentido de la misma.

7. Estimar (acudiendo al método más apropiado al caso), cómo y cuánto varía la longitud del lado de un cubo si su volumen pasa de:

a) 8 cm^3 a 8.12 cm^3 ; b) 8 cm^3 a 7.88 cm^3 ; c) 8 cm^3 a ***27*** cm^3 .

8. Dado un cono donde r = radio de la base, h= altura del cono y $h = 2r$; se mide r y se encuentra que su longitud es x_o *cm*. Si el error de apreciación $\varepsilon = \pm 0.01$ (*cm*), se pide hallar el máximo error cometido al calcular el volumen del cono usando el valor medido del radio para $x_o = 2$ y $x_o = 5$. (V_{cono} = sup. base x h).
¿En qué caso el ´error absoluto´ es mayor?, ¿cuando es más ´significativo´?.

9. *Cuando la sangre fluye por un vaso, el **flujo** Φ (volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado), es proporcional a la cuarta potencia del radio ´**r** ´ de ese vaso. (ley de Poiseuille). Una arteria parcialmente obstruida se puede expandir (aumentar su radio) por medio de una operación llamada ´angioplastia´. Nos preguntamos entonces: ¿cómo afecta al flujo de sangre un aumento del 5% en el radio? ¿alcanza a los efectos de normalizar el flujo si para ello hay que aumentar el mismo alrededor de un 35 % ?. Si no alcanza, hallar en cuanto hay que aumentar **r**.*

$\Phi = k\ r^4$ →

» Aumento relativo en r: **dr / r**

» Aumento relativo de flujo: $\dfrac{d\Phi}{\Phi} = \dfrac{\Phi'.dr}{\Phi}. =$ **.........(**completar**)...........**

* Vemos que el aumento relativo en el flujo es alrededor de .... el aumento relativo en r
* Equivalentemente, el aumento porcentual del flujo sería alrededor de .... el aumento porcentual del radio.
Luego, para un aumento porcentual del radio del 5% se tendrá una aumento del flujo de aproximadamente un ....

$p_n(x)$: ***polinomio de Taylor de grado "n" de f , alrededor de x_o.***

$$p_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \dots\dots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

- $f(x) \approx p_n(x)$
- $f(x) = p_n(x) + \varepsilon_n(x)$ → **Fórmula de Taylor con resto** ; ε = error ó resto de orden n.
- $\varepsilon_n(x) = f(x) - p_n(x)$ y $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$
- $\varepsilon_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x - x_o)^{n+1}$ → Forma de Lagrange del error

("**c**" entre x_o y x)

16. Para cada función y punto indicado a continuación,

a) $f(x) = \text{sen } x$; $x_0 = 0$ **b)** $g(x) = \cos x$; $x_0 = 0$

c) $h(x) = \ln(x)$; $x_0 = 1$ **d)** $k(x) = \log(x)$; $x_0 = 1$

se pide dar:

a) la aproximación *lineal* de f en x_o (*recta tangente* ó $p_1(x)$)

b) la aproximación polinómica correspondiente a $n = 3$ ($p_3(x)$)

c) un valor aproximado de $f(0.1)$; $g(0.1)$; $h(1.5)$ y $k(1.5)$; acudiendo a la aproximación lineal y al $p_3(x)$.

Verificar si la aproximación mejora.

17. Hallar $p_n(x)$ para f y x_o indicados .

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ $x_0 = 0$; $x_0 = 1$

b) $f(x) = \text{sen } x$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = e^{3x}$; $x_0 = 0$

d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $x_0 = 0$

Sugerencia: recurrir a las fórmulas para la derivada enésima de *f* (Pract. 3, ej.10):

a) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \rightarrow f^{(n)}(x) = n!.a_n$

b) $f(x) = \text{sen } x \rightarrow f^{(n)}(x) = \text{sen}(x + n\frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = e^{kx} \rightarrow f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$

d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (*verificar que*) $\rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

18. Sea $f(x) = e^x$

a) Hallar $p_n(x)$ para $x_o = 0$

b) Calcular el valor aproximado del número " ***e*** " usando

i) aproximación lineal

ii) polinomio de Taylor de grado 2 ; 4 y 6.

c) Acudiendo a la fórmula de Taylor, hallar " ***e*** " con 7 cifras decimales exactas.

($\Rightarrow$ hallar "*n*" tal que el error, $\varepsilon_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(1)^{n+1} < ½\ 10^{-8}$, $0 < c < 1$).

(*Sug*: acotar ***c*** y ***e*** por el entero más próximo, tener en cuenta las sgtes tablas)

n	n !
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	$4.03 \cdot 10^4$
9	$3.62 \cdot 10^5$
10	$3.62 \cdot 10^6$

n	n !
11	$3.99 \cdot 10^7$
12	$4.79 \cdot 10^8$
13	$6.22 \cdot 10^9$
14	$8.71 \cdot 10^{10}$
15	$1.30 \cdot 10^{12}$

19. Si $f(x) = e^x$; se pide:

a) Hallar $p_2(x)$; polinomio de Taylor de grado 2 de ***f*** en un entorno de $x_o = 0$.

b) Si $q(u) = p_2(u^2)$, obtener la ley de ***q*** e indicar ***V ó F*** (justificar respuesta):

i) ***q*** es un polinomio de grado 4.

ii) si $g(u) = f(u^2)$ entonces ***q*** es el polinomio de Taylor de gr. 4 de ***g*** en $u_0 = 0$

20. Sea ***f*** una función dos veces derivable en R y tal que $f''(x) > 0$, $\forall x \in R$.

Demostrar que, en un entorno de $x_o = \mathbf{0}$ la recta tangente a la gráfica de ***f*** en $P_o(0; f(0))$ se encuentra por debajo de dicha gráfica.

(*Sugerencia*: acudir a la Fórmula de Taylor con resto y a la forma de Lagrange del resto)

4.14 Ejercicios de aplicación

1. ***´Medición Indirecta´***

En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita hacer estimaciones sobre una cierta variable que, por alguna razón, no admite ser *medida* en forma *directa* (por ejemplo un ángulo de refracción). En estos casos se miden y calculan valores *relacionados* con la incógnita (por ejemplo, el seno del ángulo) y finalmente entonces, por ***medición indirecta***, se obtiene una estimación de la misma.

Así, por ejemplo, si **y = f(x)**; ´y_o´ y ´x_o´ los valores ´estimados´

(y_o por *medición*, x_o por *cálculo* a partir de y_o)

´ε_y´ y ´ε_x´ los respectivos *errores* de estimación, tenemos entonces que:

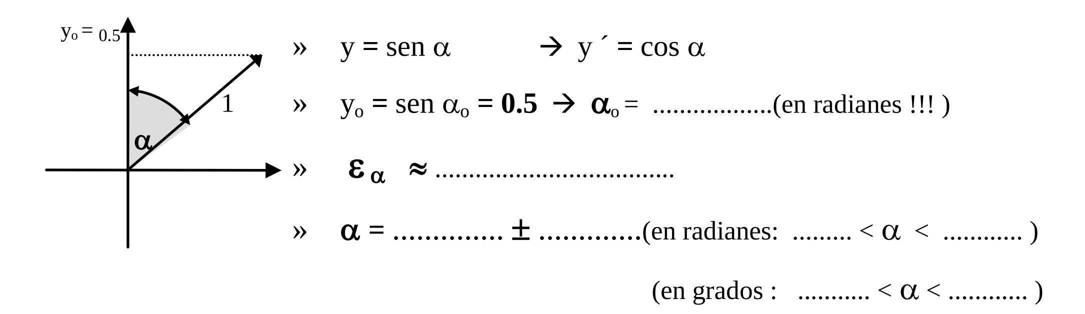
" $y_{real} = y_o \pm \varepsilon_y$ " ; " $x_{real} = x_o \pm \varepsilon_x$ "

y el problema a resolver es: estimar ´ε_x´ conociendo un valor máximo para ´ε_y´

Haciendo $\varepsilon_y = \Delta y$, $\varepsilon_x = \Delta x$ y acudiendo a diferenciales :

$$\Delta y \approx dy = f'(x_o).\,\Delta x \rightarrow \Delta x \approx \frac{\Delta y}{f'(x_o)} \rightarrow \boxed{\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_y}{f'(x_o)}}$$

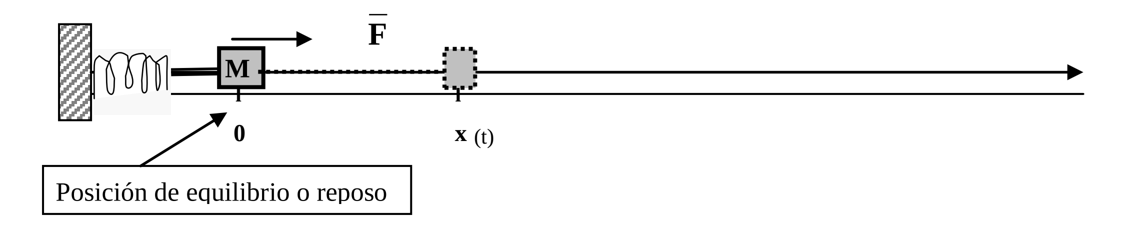
Problema: *A los efectos de estimar un ángulo de reflexión* α *se realizan una serie de mediciones al efecto de determinar* $y = \text{sen}\ \alpha$*. Finalmente se encuentra que* $y_o = 0.5$ *cm. Si el error de medición es* $\varepsilon_y = \pm 0.2$ *dar una estimación del error máximo cometido en la determinación de* α.



(en grados : .... < α < ....)

(*) En este problema queda claro la influencia e importancia de los errores de medición Vemos en el mismo como un error *máximo* de .... mm. en la medición de los catetos determina un error *máximo* de aproximadamente .... grados en la estimación del ángulo. Vemos también cómo para apreciar el error conviene expresar los ángulos en grados, cosa que *no podemos hacer para calcular*. (realice los cálculos con el ángulo en grados y compare los resultados!!!).

2. Una masa M sujeta a un resorte se pone en movimiento bajo la acción de una fuerza $\overline{F}$. La función de posición para M en cada instante " t " y respecto a su posición de equilibrio es: **x = sen t + cos t** (t ≥ 0)



a) Asimilando la masa M a un punto, establecer un eje de referencia conveniente al caso, completar la siguiente tabla para **x = *x*(t)** con ***x*(t) = sen t + cos t** y representar sobre dicho eje la "trayectoria" de M desde $t = 0$ hasta $t = 5\frac{\pi}{2}$.

		$(\frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{2})$	$(3\frac{\pi}{4})$	π	$5\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{2}$	$7\frac{\pi}{4}$	2π	$9\frac{\pi}{4}$	$5\frac{\pi}{2}$	
t	0	0.78	1.57	2.36	3.14							
x		$\sqrt{2}$		0			-1				1	

b) Describir el movimiento de **M** analizando para ello la trayectoria y el comportamiento de la función de posición para $t \rightarrow +\infty$ (indicar con qué característica <u>*física*</u> del movimiento relaciona este resultado) .

c) Graficar **x = *x*(t)** en un sistema cartesiano **x-t.**
(*Sugerencia:* expresar la función de "otra forma"; acudir para ello a identidades Trigonométricas. Es decir, hallar **A** y α / **x(**t) = **A** sen (t + α)).

d) Hallar el ***desplazamiento máximo***, $\mathbf{d}_M$, de la masa como acción de la fuerza $\overline{\mathbf{F}}$.

Nota: el "desplazamiento máximo" puede darse tanto a izquierda como a derecha del punto de equilibrio pues, $d_{espl.} = | x - 0 |$.)

e) ¿En qué instantes alcanza el desplazamiento máximo? Dar al menos ***cuatro***.

f) ¿Existe una función con la cual, conocida la posición de la masa, se puede calcular el tiempo que hace que la misma se está moviendo ?. (¿ g ? / t = g(x)).
Por ejemplo, si nos informan que $x = \sqrt{2}$; ¿alcanza este dato para determinar el tiempo que hace que la masa se está moviendo?.

¿Y si nos dijeran que $x = \sqrt{2}$ y ***la masa pasó dos veces por su posición de equilibrio***?, podríamos decir cuanto hace que la masa se está moviendo?.

3. Cuando se dispara un proyectil desde el origen (O), la "trayectoria" del mismo es una parábola de ecuación:

$$y = \mathbf{m}\, x - \frac{16}{\mathbf{v}_o^2}\,(1 + \mathbf{m}^2).\; x^2 .$$

O sea $y = f(x)$, con:

x = desplazamiento "horizontal"**(v.i.)**

y = desplazamiento "vertical" (**v.d.**)

→ $\overline{\mathbf{v}_o}$ = ***vector velocidad inicial***

$\overline{\mathbf{v}_o} = (\mathbf{v}_{ox}\, ;\, \mathbf{v}_{oy})$

→ v_o = ***módulo de*** $\overline{\mathbf{v}_o}$

$$V_o = \sqrt{\mathbf{v}_{ox}^2 + \mathbf{v}_{oy}^2}$$

→ **m** = ***tg*** α ; α = ángulo $\overline{\mathbf{v}_o}$ y ***eje x.***

$$tg\ \alpha = \frac{\mathbf{v}_{oy}}{\mathbf{v}_{ox}}$$

→ $\overline{\mathbf{g}}$ = **(0; *g*)**
vector aceleración de la gravedad
g = - 32 (pies/seg.)

La ***ecuación cartesiana*** para la trayectoria del proyectil se deduce a partir de las ***ecuaciones paramétricas*** del "tiro oblicuo", las que se obtienen en física, de acuerdo a los principios de la cinemática. Estas son:

$$\begin{cases} \mathbf{x = x_o + v_{ox}\,.\,t} \\ \mathbf{y = y_o + v_{oy}\,.\,t + \tfrac{1}{2}\,a.t^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{a= g = }-32]{\text{(xo; yo) = (0; 0)}} \begin{cases} \mathbf{x = v_{ox}\,.\,t} \\ \mathbf{y = v_{oy}\,.\,t - 16.t^2} \end{cases}$$

v_{oy} $\overline{\mathbf{v_o}}$ v_{ox}

a) A partir de las ***ecuaciones paramétricas*** deducir la ***ecuación cartesiana*** de la trayectoria.
(<u>*Sugerencias*</u>: despejar ***t*** de la 1er ecuación.; reemplazarla en la 2da. Multiplicar y dividir por $\mathbf{v_o^2}$ donde convenga).

b) Demostrar que la altura máxima, y_M , alcanzada por el proyectil es:

$$y_M = \frac{\mathbf{m^2.v_o^2}}{\mathbf{64\,(1+m^2)}}.$$

Indicar cual es el desplazamiento horizontal cuando el proyectil alcanza y_M

c) Indicar V ó F , justificar:

" el desplazamiento horizontal máximo es: $x_M = \dfrac{\mathbf{m\,.v_o^2}}{\mathbf{16.\,(1+m^2)}}$ " .

d) Ambos valores y_M y x_M , *como era de esperarse,* dependen tanto de "***m***"

como de "v_o" (en definitiva, de $\overline{\mathbf{v_o}}$).

Tenemos así que y_M y x_M son funciones de *dos variables.*
Para estudiar como incide $\overline{\mathbf{v_o}}$ sobre estos valores, te pedimos que estudies el comportamiento de las funciones que los definen, <u>***dejando***</u> $\mathbf{v_o}$ <u>***constante***</u> ; o sea, tomando y_M y x_M como funciones de "***m***" : $y_M = \mathbf{p(m)}$ y $x_M = \mathbf{q(m)}$.

Estudiadas las funciones **p** y **q** <u>*por separado*</u> (máximos, mínimos, límites para

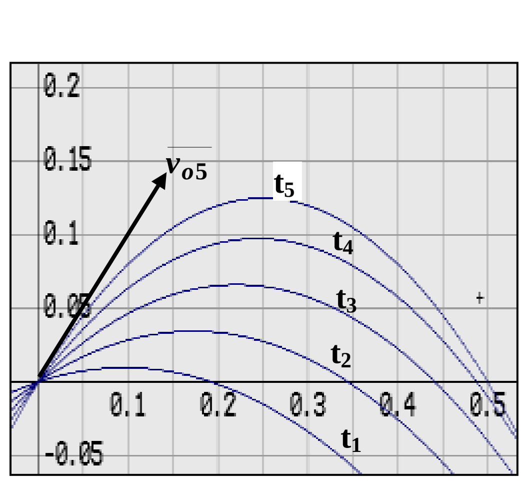
$m \to \infty$; relación con α , qué pasa si $v_{ox} = 0$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$); ó $v_{oy} = 0$ ...)

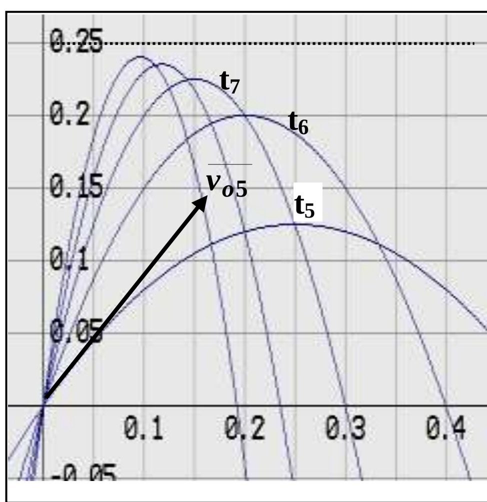
te pedimos que, usando los resultados obtenidos, <u>*analices y describas*</u> que pasa con las ***trayectorias*** a medida que $m \to \infty$; o sea, qué pasa ***con el movimiento*** .

Para hacer este análisis te sugerimos:
1ro) reflexionar acerca del enunciado del problema; es decir, si $\mathbf{v_o}$ = cte , ¿ puede $\overline{\mathbf{v_o}}$ tener alguna incidencia sobre y_M y x_M ?, porqué ?.

2do) Acudir al apoyo "gráfico"; o sea, graficar algunos casos para orientar el análisis, la obtención de conclusiones y, fundamentalmente, el <u>*informe*</u> de las mismas. *(ver graficas).*

Para ayudarte en este paso, a continuación te presentamos gráficas que representan la trayectoria de un proyectil lanzado siempre con la misma rapidez inicial (v_o = 4), pero con distintas inclinaciones (distintos "***m***"). Enumera las trayectorias (t_1 ; t_2 ; ....; t_6 ; t_7 ..) y relaciona las mismas con valores crecientes de "***m***" → $0 < m_1 < m_2 ... < m_{xM} = 1 < m_6 < m_7 <....$ (<u>***sin hacer cuentas***</u> ***!!***, <u>***usando los resultados hallados***</u> ***!!***)





4. La función $\mathbf{f}(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ se presenta en probabilidad y estadística y se llama "***función de densidad normal***". Cada parámetro que aparece en ella tiene una interpretación concreta en la práctica, **μ** se conoce como "media" y **σ** como "desvío estándar". Para simplificar el estudio de esta función procedemos a tomar un caso particular (**μ** = 0) y a "cambiar de escala" de tal modo que se elimine el factor $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Se pide entonces:

a) Hacer el estudio completo y graficar la función $\mathbf{f}(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

b) Indicar que papel juega **σ** en la forma de la curva? Y **μ** ??.

5. *Crecimiento restringido.*

Si se estudia el crecimiento de una población **P** a partir del supuesto de que su razón de crecimiento es proporcional a la población presente (P´ = k P) se demuestra que en tal caso la función que modeliza el crecimiento es una exponencial. Retomamos ahora esta cuestión pues la función exponencial tiene un crecimiento, ¡***exponencial***!! (es la que más rápido crece entre las funciones elementales) y este hecho no representa el comportamiento "real" de una población. Cualquiera sean los individuos que constituyen una población, existe un momento en donde el crecimiento de la misma comienza a declinar pues existen factores que comienzan a inhibirlo (*falta de alimento, espacio, epidemias, guerras, etc.)* Así, con el tiempo, el modelo exponencial deja de ser una buena representación del fenómeno. Estudios experimentales con distintas poblaciones indican que estas tienden a un valor **M** (*población de equilibrio*), valor en el que se mantienen con el paso del tiempo si no se modifican drásticamente las condiciones del sistema.

Se concluye así un modelo más apropiado para el crecimiento de una población, el cual es:

(I) $\dfrac{dP}{dt} = k.P.(M-P)$; ***k*** y **M** constantes positivas;

M = P$_e$ (población de equilibrio)

a) Expresar en palabras que informa esta ecuación en cuanto a la razón de crecimiento de P, en cada instante "t" .

b) Si por ***población estable*** entendemos una población que permanece ***constante en***

el tiempo, o sea P(t) = c $\forall t \geq 0$; ¿cuál sería el valor de c ?.
(Sugerencia: *pensar ¿¿ a que velocidad varía* P ??)

c) El ***comportamiento de la población*** depende de la población inicial, $\mathbf{P_o}$, y puede ser deducido de la ecuación (I) *aún cuando no conozcamos la ley de* P.

Así, te pedimos que teniendo en cuenta (I) completes las siguientes afirmaciones:

i) Si $\mathbf{P_o} < \mathbf{M}$ entonces $\frac{dP}{dt}(0) \ldots\ldots 0$.

(considerar que $\frac{dP}{dt}(0) = k.P(0).(M - P(0))$)

ii) $\frac{dP}{dt}(t)$ es continua entonces por el teorema de ....,

para todo **t** próximo a cero, $\frac{dP}{dt}(t) \ldots\ldots 0$,

con lo cual la población .... (*crece o decrece*?)

iii) Si $\mathbf{P_o} > \mathbf{M}$ entonces $\frac{dP}{dt}(0) \ldots\ldots 0$.

iv) Como $\frac{dP}{dt}(t)$ es continua entonces por el teorema de ....,

para todo **t** próximo a cero, $\frac{dP}{dt}(t) \ldots\ldots 0$,

con lo cual la población .... (*crece o decrece*?)

d) Demostrar que **P**(t) = $\frac{M.P_o}{P_o + (M - P_o).e^{-M.k.t}} = \frac{M}{1 + (M/P_o - 1).e^{-Mkt}}$

verifica la ecuación (I).

A esta función que aparece en muchos fenómenos biológicos y químicos, se la conoce con el nombre de "***ecuación logística o de saturación***"

Completar: **i)** Si $\mathbf{P_o} = \mathbf{M}$ entonces **P(t) =** .... $\forall t \geq 0$

ii) $\forall\, \mathbf{P_o}$, $\lim_{t \to \infty} P(t) =$ ....

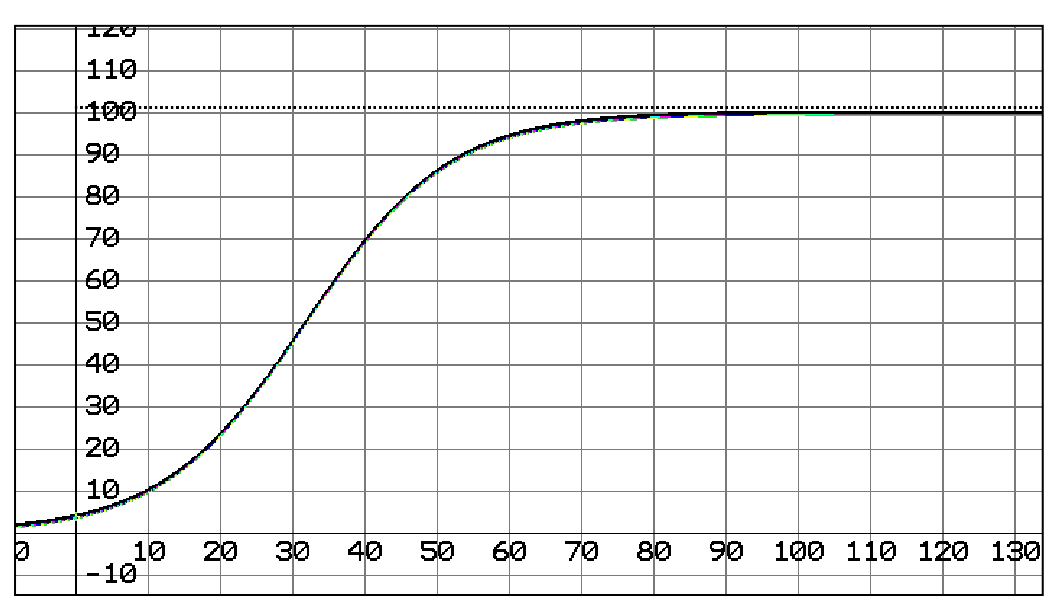
e) Si $\mathbf{P_o} > \mathbf{M}/2$ el grafico de **P** no presenta punto de inflexión, mientras que si $\mathbf{P_o} < \mathbf{M}/2$ la curva presenta un punto de inflexión para un único t > 0.

El instante en que se produce este "punto de inflexión" la población es exactamente la mitad de la población de equilibrio.

* El gráfico que se adjunta corresponde a la situación en que $\mathbf{P_o} < \mathbf{M}/2$; evalúa y marca en el mismo $\mathbf{P_o}$; **M** ; **M**/2 y el punto de inflexión que según te informamos existe en este caso.

Describe luego el comportamiento de la población que describe este gráfico, particularmente que pasa con la velocidad de crecimiento con el transcurso del tiempo, que indica al respecto el punto de inflexión.

* Grafica en el mismo sistema la función **P = P**(t) en el caso que $\mathbf{P_o = M}$.



<u>NOTA</u>:
La gráfica anterior es la forma típica que toma la ecuación de crecimiento (*decrecimiento*) (I) ó ***<u>ecuación logística</u>*** cuando $P_o < M/2$. Esta ecuación modeliza muchos otros fenómenos además del crecimiento de una población, entre ellos la propagación de una epidemia o la concentración del producto en ciertas reacciones químicas.

5. Una persona en una cierta población, P*, contrae una enfermedad infecciosa de la cual son susceptibles de contagiarse todos los miembros de la población. Si con i(t) indicamos el número de personas infectadas hasta el instante "t" , con s(t) el número de personas aún no infectadas hasta ese instante; o sea,

i (t) + s(t) = P* ; entonces en tal caso se tiene que $\dfrac{ds}{dt} = k.s(t).\ i(t)$.

Se pide:

a) Expresar en palabras que dice esta ecuación. Mostrar que esta es, en esencia, la ecuación (I) del problema 4 (expresar la ecuación con sólo la función ***s***).

b) Discutir el signo de k para que la ecuación modelice efectivamente lo que pasa con "s".

c) Dar fórmula explícita para ***s***(t). (tener en cuenta la solución dada en el problema 4 para ecuaciones del tipo (I))

d) ¿Qué pasa con ***s***(t) a medida que pasa el tiempo si no llega asistencia sanitaria; o sea, si no se controla la epidemia?. Cómo "estima" esto?, tiene sentido el resultado obtenido ?.

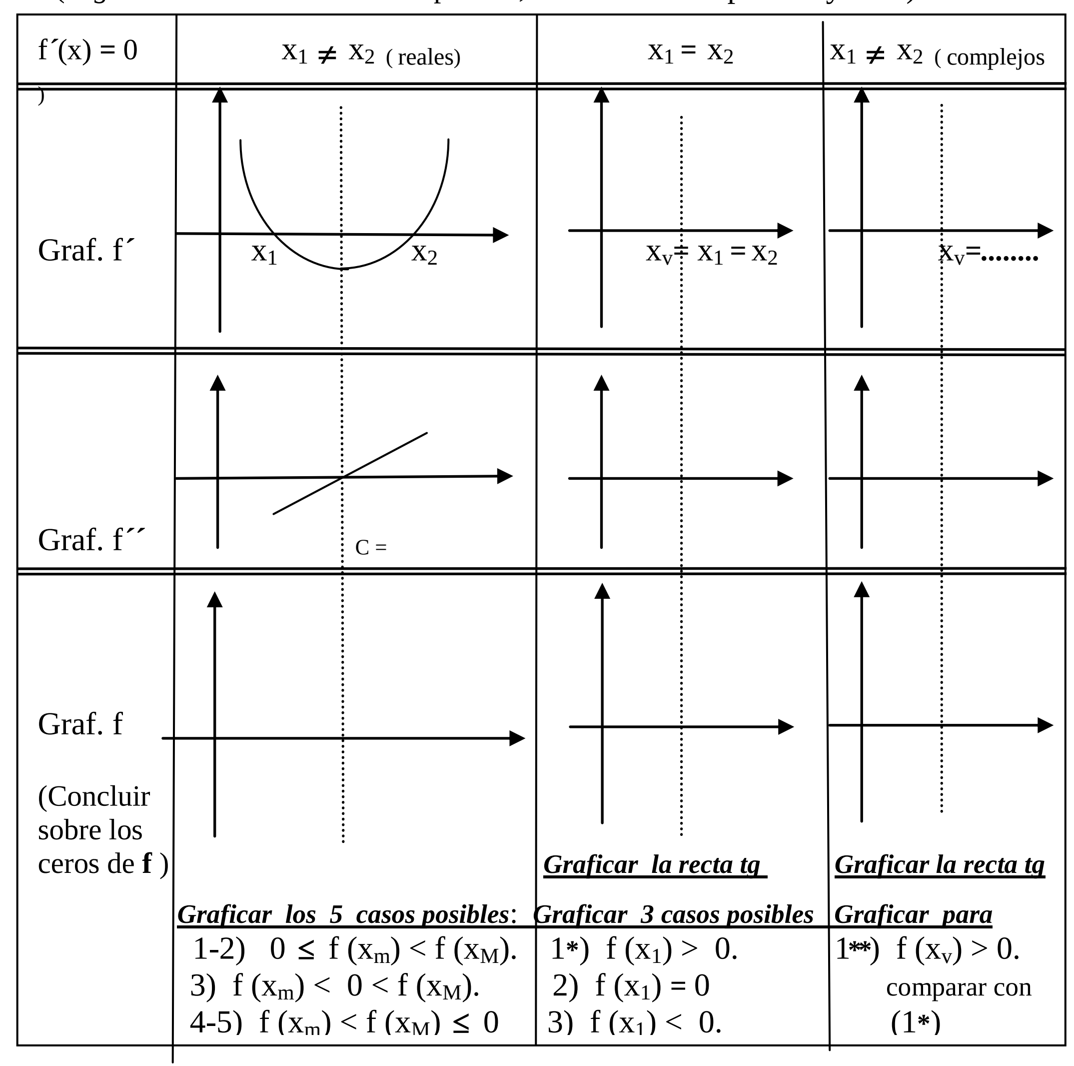
6. Dada **f**(x) = **A x**^{3} **+ B x**^{2} **+ C x + D** con **A** ≠ 0 ; Df = R:

a) ¿Qué condiciones sobre A, B y C determinan que **f** sea estrictamente creciente?.

b) Demostrar que cualquiera sean los coeficientes, **f** siempre tiene punto de inflexión.

c) Demostrar que f puede tener dos, uno o ningún punto crítico; hacer un bosquejo del gráfico de f para cada caso completando el cuadro de "gráficos" para A>0 ; B< 0.

Resumir en palabras, y ***en orden al nro de ceros de f***, todas las situaciones que se (*Sugerencia*: en el caso de ser posible, "factorizar" f puede ayudar)



f´(x) = 0	$x_1 \neq x_2$ (reales)	$x_1 = x_2$	$x_1 \neq x_2$ (complejos)
Graf. f´	x_1 x_2	$x_v = x_1 = x_2$	x_v=........
Graf. f´´	C =		
Graf. f (Concluir sobre los ceros de **f**)	***Graficar los 5 casos posibles***: 1-2) 0 ≤ f (x_m) < f (x_M). 3) f (x_m) < 0 < f (x_M). 4-5) f (x_m) < f (x_M) ≤ 0	***Graficar la recta tg*** ***Graficar 3 casos posibles*** 1*) f (x_1) > 0. 2) f (x_1) = 0 3) f (x_1) < 0.	***Graficar la recta tg*** ***Graficar para*** 1**) f (x_v) > 0. comparar con (1*)

7. Mostrar que si f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D con A ≠ 0 tiene tres raíces reales y distintas x_1, x_2, x_3, entonces la abscisa del punto de inflexión es:

$$x_{PI} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

<u>Sugerencia</u>*:* derivar la forma "factorizada" de f ;

o sea, f(x) = A (x-x_1) (x-x_2) (x-x_3).

8. Hallar f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D y graficarla si se sabe que tiene un máximo relativo en ***x*** = -2 con **M**$_r$ = 10 y un mínimo relativo en ***x*** = 1 con **m**$_r$ = - 7/2 .

Si tiene tres raíces reales y distintas verificar que $x_{PI} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

9. S puede probar que si $f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D$ con $A \neq 0$ tiene tres raíces reales y distintas x_1, x_2, x_3, entonces :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{B}{A} \\ x_1 . x_2 + x_2 . x_3 + x_1 . x_3 = \dfrac{C}{A} \\ x_1 . x_2 . x_3 = -\dfrac{D}{A} \end{cases}$$

Hallar y graficar $f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D$ si se sabe que sus raíces son $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$ y $f(0) = 4$.

10. **a)** Mostrar que si $f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D$ con $A \neq 0$ tiene tres raíces reales e iguales $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, entonces

$f(x) = A x^3 - 3\alpha A x^2 + 3\alpha^2 A x - \alpha^3 A$, y que en tal caso en $x = \alpha$ hay un punto de inflexión a tangente horizontal.

b) Hallar y graficar $f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D$ si se sabe que $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ y $f(0) = 4$

11. Supongamos que la presión **p** (en atm,), el volumen **V** (en cm^3) y la temperatura **T** (en grados Kelvin) de **n** moles de bióxido de carbono (CO_2) satisfacen la ecuación de Van der Waals:

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) .(V - n.b) = n .R.T$$ con a, b y R constantes empíricas.

Para determinar el valor de estas constantes se realiza el siguiente experimento: se comprime un mol de CO_2 manteniendo la temperatura constante e igual a T = 304 K. Los datos medidos de presión y volumen se grafican en el plano en una curva pV (isoterma). A la temperatura en que se realiza la experiencia la curva (que es decreciente) presenta un punto de inflexión a *tangente horizontal*, en ***V = 128.1*** ; ***p = 72.8*** .
Usar estos datos para determinar **a, b** y **R**.

Sugerencia : *despejar **p** en función de **V** de la ecuación de Van der Waals, calcular p´ y p´´ .*

5 — La Integral

5.1 Introducción

El Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral son las dos áreas básicas de una rama de la matemática que se conoce como Análisis Matemático ó simplemente Cálculo**.**

Tanto el Cálculo Diferencial como el Integral se ocupan de los ***procesos de cambio.***

- El Cálculo Diferencial del estudio, cálculo y aplicaciones de las ***razones de cambio***.
  En particular, de determinar el ***cambio instantáneo*** de una magnitud.
- El Cálculo Integral, se ocupa de determinar ***qué cosa cambió y cuanto lo hizo.***
  O sea, de determinar

" el resultado ó efecto total de un proceso de cambio"

Por ejemplo el Cálculo Integral da respuestas a cuestiones tales cómo:

- si un objeto se mueve a una velocidad *variable* , ¿cuál es el *desplazamiento total* del objeto al cabo de t horas ?.
- si la velocidad a la que entra agua a un tanque es *variable*: ¿cuanto *aumenta el volumen de agua en el tanque* al cabo de t horas ?
- si una varilla de metal tiene densidad *variable* (por ej., es más liviana en un extremo que en el otro), ¿cómo calculamos la *masa total* de la varilla?;
- si la tasa de variación de un cultivo de bacterias es *variable*, ¿cuánto *cambia* (*aumenta o disminuye*) *la cantidad de bacterias* al cabo t horas ? .
- de la Física elemental sabemos calcular el trabajo (W) realizado por una fuerza para mover un cuerpo sobre una recta, cuando la fuerza tiene la dirección del movimiento e intensidad *constante* (F)**:** W = F × desplazamiento ; pero, ¿cómo calculamos el trabajo en el caso de una fuerza con intensidad *variable* ?
- de la Geometría elemental sabemos calcular el área de rectángulos (R), regiones con altura *constante*: área R = base × altura; pero, ¿cómo hacemos para calcular el área de una región de *altura variable* ; por ejemplo, en el caso que el contorno superior del rectángulo no sea recto sino *curvo* ?.

Si observamos las cuestiones que resuelve la integral, detectamos un rasgo común a todas ellas: que si la función del caso (velocidad, densidad, tasa de variación, intensidad de una fuerza, altura de una figura, etc) es "*constante"*, ***f(x) = k*** y definida en ***I = [a ; b]***, entonces la solución del problema viene dada por el producto: "***k***" x "*amplitud de **I*** ". O sea, abordamos aquí un tipo de problema que sabemos resolver si la *"función dato"* es "*constante*" pero cuya resolución desconocemos si tal función es "*variable*".

Observamos también que la problemática que da origen al Cálculo Integral, "*determinación del resultado total de un proceso de cambio*" tiene que ver con situaciones concretas, muchas de las cuales enfrentamos y resolvemos cotidianamente, aun sin tener conciencia de ello. Se ha observado que individuos sin conocimientos de Cálculo enfrentados a problemas de naturaleza "integral", los resuelven procediendo de la misma forma en que se hacia esto históricamente, antes de que se desarrollara y formalizara del Cálculo Integral. Así, con el objetivo de promover un aprendizaje que permita tanto la cabal comprensión de los conceptos como el acertado y efectivo uso de "la integral", en lo que sigue se proponen las ideas básicas del Cálculo Integral a partir de lo intuitivo y relacionándolas con aplicaciones conocidas. Lograda la familiarización con tales ideas, se procede finalmente a la "formalización" de las mismas.

5.2 Cálculo del "resultado o efecto total del cambio"

EJEMPLO:

*__*Proceso*__: **entrada/salida de líquido** (agua, solución salina, etc.) en un tanque.
Función asociada, **V** = *V*(t), volumen de líquido en el tanque al instante **t .**

***Incógnita**: ΔV; variación de volumen en el tanque, en un intervalo de tpo **I = [t**$_i$; **t**$_f$ **]**

***Resolución**: como todo problema, esta depende del dato de que se dispone:

❶ ▸ ***Dato***: V = *V*(t); **volumen total de líquido en el tanque, al instante t .**
Aquí, el cálculo de **ΔV** remite a una simple resta: **ΔV = V**(t$_f$) **- V**(t$_i$).

❷ ▸ ***Dato***: *v* = *V´*(t); o sea, **velocidad a la que se desarrolla el proceso**.
Este caso remite al **problema tipo** que resuelve el **cálculo integral;** o sea,
Al caso en que la obtención de **ΔV** depende de como sea "*v*":

* si ***v* = *cte***, **ΔV** se calcula a través del simple producto "***v*** x **Δt**"; pero,

* si ***v*≠*cte***, ***no sabemos (hasta ahora) como proceder*** para obtener **ΔV**.

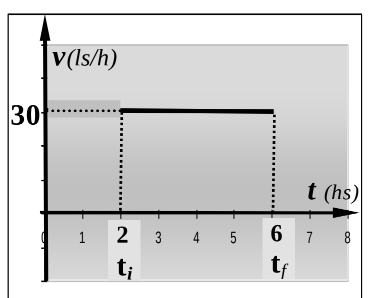
ⓘ Cuando el investigador se encuentra ante un problema cuya resolución desconoce lo primero que hace es simplificar hipótesis al efecto de transformar el problema en otro análogo cuya resolución conoce (*el* "***caso simple***"). Luego, y a partir de lo observado para el caso simple, idea, propone y prueba un proceso de resolución para el problema original.

ⓘ Con el objeto de resolver el problema del ***cálculo de* ΔV, *variación de volumen en un Δt conocida la velocidad del proceso* (*v* ≠ *cte*)**; comenzamos por el ***caso simple*** (***v* = *cte***).

(A) CASO SIMPLE (*v = cte*).

Cálculo de la "*variación de volumen*" para "*velocidad constante*".

Problema 1: El gráfico adjunto corresponde al registro de la ***velocidad* (*v*)** con que entra agua a un tanque durante **4 hs.** y a partir de las **2 hs.** de ***iniciado el proceso***. Se desea conocer la "***variación de volumen***" en el tanque en este lapso de tiempo.



*__*Función del proceso:*__ **V**= *V*(t)
V→ vol. de agua en el tanque, al instante **t**

*__*Incógnita*__: **ΔV** = variación de vol. entre las **2** y las **6.**

*__*Datos:*__ ***v* = 30** (ls/h) → ***velocidad del proceso = cte* (*)**

Δt= t$_f$ – t$_i$ = 4 (**t$_f$** = **t**final; **t$_i$** = **t**inicial **)**

*__*Resolución*__: por **(*)** $v = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ ⇒ **ΔV = *v* . Δt**

***v* = 30 ; Δt = 4 ⇒ ΔV= 30 . 4 = 120**

Rta: entre las **2** y las **6** el volumen de agua en el tanque ***"aumenta"*** **120 ls.**

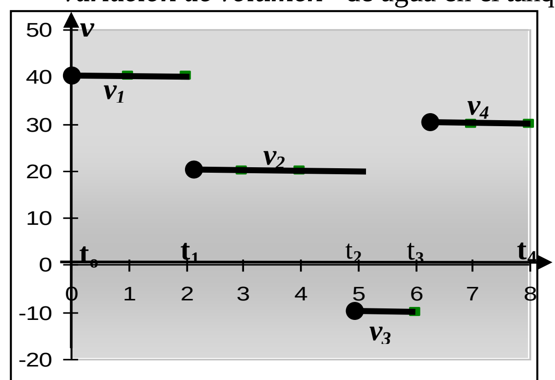
▸ **Conclusión :** ***v* = *cte*** ⇒ **ΔV = *v* x Δt** (*variación de vol. = "velocidad" x "tiempo"*)

▸ **Observación:** **ΔV$_{[2 ;6]}$ = V(6) - V(2)** ⇒ **V(6) = ΔV$_{[2 ;6]}$ + V(2) = 120 + V(2)**
Luego, de conocerse **V(2)** (volumen de agua en el tanque a las **2** hs. de iniciado el proceso), se puede calcular **V(6)** (volumen de agua en el tanque a las **6** hs. de iniciado el proceso).

(B) CASO *CUASI* SIMPLE (*se resuelve en forma simple, aunque no sea el caso simple*).

Cálculo de la "*variación de volumen*" *para* "*velocidad constante a tramos*".

Problema 2 : El gráfico adjunto corresponde al registro de la ***velocidad* (*v*)** con que durante **8 hs** ***entra*** o ***sale*** agua de un tanque. Al respecto se desea conocer la **"*variación de volumen*"** de agua en el tanque, en ese intervalo de tiempo.



*__*Función del proceso*__: **V** = $V(t)$

*__*Incógnita*__: **ΔV** = variación de vol. en **8** hs.

*__*Datos:*__ *v = v(t)* → ***velocidad del proceso***

v = v_{graf} → ***velocidad*** $\neq$ ***cte***

I = [0; 8] → $t_i = 0$; $t_f = 8$

$\Delta t = t_f - t_i = 8$

Observamos y concluimos:

→ v_{graf} ***constante "a tramos"***.

→ **4** subintervalos $I_i = [t_{i-1}; \ t_i]$, $i = 1,2,3,4$; tal que $I_i \subset I$ y $v(t) = v_i$, $\forall \ t \in I_i$

Conclusión 1: en cada I_i estamos en el "caso simple" (*v = cte*); luego, y según la fórmula hallada en **(A)**; en cada I_i: $\Delta V_i = v_i \times \Delta t_i$.

Por ejemplo:

- $I_1 = [0; 2]$, $v_1 = 40 \Rightarrow \Delta V_1 = v_1 \times \Delta t_1 \Rightarrow \Delta V_1 = 40 \times 2 = 80$

  La *variación de volumen* (en este caso, ***aumento***) en las **2** primeras horas es de **80 lts.**

- $I_3 = [5; 6]$, $v_3 = -10 \Rightarrow \Delta V_3 = v_3 \times \Delta t_3 \Rightarrow \Delta V_3 = -10 \times 3 = -30$

  La *variación de volumen* (en este caso, ***disminución***) entre la **5ta** y **6ta** hora de iniciado el proceso, es de **30 lts.**

Conclusión 2: ΔV_i indica la **"*variación de volumen*"** en un ***subintervalo*** (→ I_i).
Luego, al ΔV_i lo llamamos ***"variación parcial"***.

Finalmente vemos que para obtener la ***"variación total"***; o sea, la correspondiente a las **8** hs. que dura el proceso, basta ***"sumar"*** las ***"variaciones parciales"***.

CONCLUSIÓN FINAL para el problema 2 :

v = cte a tramos ⇒ la ***variación total*** en **I** es la ***suma*** de las ***variaciones parciales***

$$\Delta V_{[0;8]} = \text{suma de las "variaciones parciales"}$$

$$\Delta V_{[0;8]} = \sum_{i=1}^{4} v_i \times \Delta t_i$$

$$\Delta V_{[0;8]} = v_1 \times \Delta t_1 + v_2 \times \Delta t_2 + v_3 \times \Delta t_3 + v_4 \times \Delta t_4 .$$

Resolución del Problema 2: cálculo de la ***"variación total"*** de volumen en 8 hs..

tpo(hs)		I_i	Δt_i	v_i	$\Delta V_i\,[t_{i-1}\,;t_i]$ $v_i \times \Delta t_i$ = *variac. parcial*	*VARIACIÓN TOTAL* en $[\,t_0\,;\,t_i\,]$
t_0	**0**					------------------------------------
t_1	**2**	[0; 2]	$\Delta t_1 = 2$	**40**	40 x 2 = ***80*** (entran 80 ls)	$\Delta V_{[0;2]}$ = ***80***
t_2	**5**	[2; 5]	$\Delta t_2 = 3$	**20**	20 x 3 = ***60*** (entran 60 ls)	$\Delta V_{[0;5]}$ = 80 **+ *60***
t_3	**6**	[5; 6]	$\Delta t_3 = 1$	**-10**	-10 x 1= ***-10*** (salen 10 ls)	$\Delta V_{[0;6]}$ = 80 + 60 ***-10***
t_4	**8**	[6; 8]	$\Delta t_4 = 2$	**30**	30 x 2 = ***60*** (entran 60 ls)	$\Delta V_{[0;8]}$ = 80 + 60 – 10 **+ *60*** = ***190***

Luego, $\Delta V_{[0;8]} = 190$; o sea, la ***variación de volumen*** *(o* ***volumen "acumulado")*** en el tanque en **8 hs**. es de ***190 ls***.

CONCLUSIÓN FINAL para el CASO B :

Lo observado en el ejemplo puede generalizarse a cualquier proceso de cambio con ***velocidad cte a tramos***; es decir, la ***variación total*** al final del proceso se obtiene de:

1º) ***hacer el producto "v x tiempo" en cada I_i donde v = cte*** (*variación parcial*)

2º) ***sumar las "variaciones parciales"*** . (*VARIACIÓN TOTAL*)

O sea, si subdividimos el intervalo genérico $\mathbf{I} = [t_o\,;\,t_n]$ en los n subintervalos $\mathbf{I_i} = [t_{i-1}\,;\,t_i]$ donde la velocidad permanece constante e igual a v_i ; tenemos que:

$$\Delta V_{[t_o\,;\,t_n]} = v_1 \times \Delta t_1 + v_2 \times \Delta t_2 + v_3 \times \Delta t_3 + \ldots\ldots + v_n \times \Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \times \Delta t_i$$

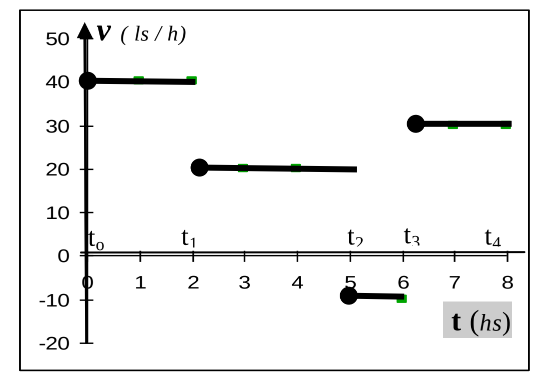
Observación 1: $\Delta V[a\,;b] = V(b) - V(a) \Rightarrow V(b) = \Delta V[a;b] + V(a)$.

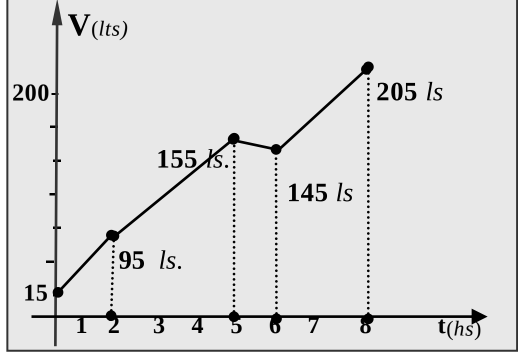
Ejemplo: si en el problema **2** se agrega el dato **V(0) = 15,** se puede hallar **V(8).**

$V(8) = \Delta V_{[0;8]} + V(0) \Rightarrow V(8) = 190 + 15 = 205 \Rightarrow V(8) = 205$ *(ls.)*

Observación 2: si v es ***cte a tramos*** entonces se puede ***reconstruir*** la función **V** tal que $V' = v$ pues en cada I_i donde v es **cte**, $V = V_i(t)$ con $V_i(t)$ ***función lineal***.

Ejercicio: para el problema 2, hallar y graficar **V** tal que $V' = v$.

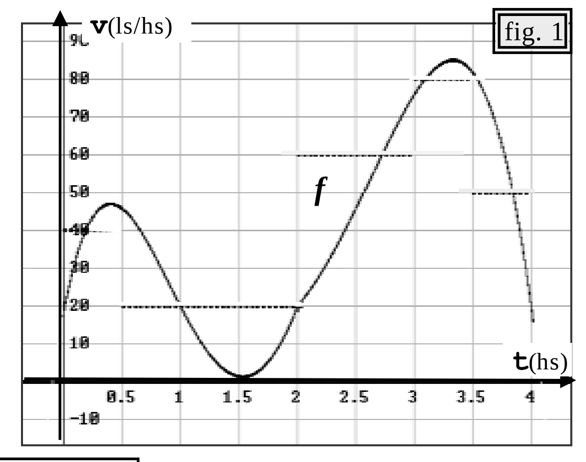




(C) CASO DESCONOCIDO

Cálculo de la *"variación de volumen"* para *"velocidad variable con continuidad"*

En la generalidad de los procesos físicos los cambios no son tan bruscos, a "saltos" como en el ejemplo anterior, sino que se desarrollan en forma continua. Así, lo natural es que si una función $v = f(t)$ representa una ***razón de cambio*** o ***velocidad***, entonces f sea continua. El gráfico continuo adjunto es más representativo de la ***velocidad*** con que varía el volumen de agua dentro del tanque, que uno *escalonado*, como en el ejemplo anterior.



En este caso: ***¿cómo obtenemos* ΔV, *volumen acumulado en 4 hs.?***

> Y este es, en esencia, el problema que resuelve el cálculo integral:
> "***cálculo de la <u>variación total</u> debida a un proceso de cambio cuando la velocidad del mismo varía con continuidad***"

El primer paso para resolver este problema es "simplificarlo":

☞ ***¿Con que fin?***: llevarlo al caso conocido; aquí, al de velocidad constante a tramos.

☞ ***¿Cómo ?***: reemplazando el dato, f continua en **I = [a;b]** , por una función constante a tramos a la que llamamos **función escalera**: f_{esc} .(**)

☞ ***¿Qué logramos?***: construida la f_{esc} y aplicada a la misma la fórmula hallada en (**B**), logramos una *aproximación* del **ΔV** buscado.

(**) **Construcción de la** $f_{esc.}$; ***¿ancho y alto del "escalón(i)" de la "escalera"?:***

a) ***" ancho(i)"*** → resulta de dividir **I** (intervalo dato) en ***n*** subintervalos (→ I_i).

b) ***"altura(i)"*** → resulta de elegir un $c_i \in I_i$, calcular $f(c_i)$ y tomar este valor como altura del ***escalón(i)*** → $altura_{(i)} = f(c_i)$.

Observaciones :

- La división de **I = [a;b]** en subintervalos se hace en ***"forma arbitraria"*** ; es decir, ***"n"*** puede ser cualquier ***"nro natural"***. De hecho, esta división se logra dando ***"n+1"*** puntos arbitrarios de **I** con la sola condición de que se tomen en forma creciente , que el primero y el último coincidan con los extremos de **I**.

  → $t_o \equiv a < t_1 < t_2 < \ldots\ldots\ldots < t_{n-1} < t_n \equiv b$

  → $I_i = [t_{i-1}; t_i]$ ⇒ $ancho_{(i)}$ = longitud $I_i = \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

- Los c_i también se eligen en ***"forma arbitraria"*** (uno y sólo uno por cada **Ii**).

Calculo de una aproximación de ΔV para f de la fig.1

1º) Construimos una f_{esc} (fig. 2)

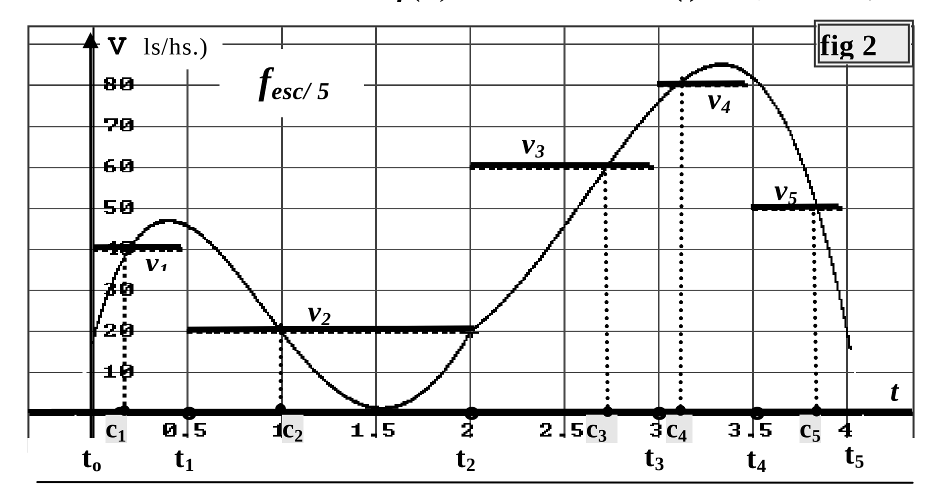
a) ***ancho escalón*** → dividimos **I** = [0; 4] en **n** subintervalos $I_i = [t_{i-1}; t_i]$

***EJ: n = 5** → $\{ t_o \equiv 0 ;\ t_1 = 0.5 ;\ t_2 = 2 ;\ t_3 = 3 ;\ t_4 = 3.5 ;\ t_5 \equiv 4 \}$

→ $I_i = [t_{i-1}; t_i]$; $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, i = **1, 2, 3, 4, 5 .**

b) ***alto del escalón*** → elegimos un c_i en $\mathbf{I}_i$, $i = 1, ..., 5$;

→ calculamos $f(c_i) = v_i$. Hacemos $v(t) = v_i$; $\forall t \in \mathbf{I}_i$.



Ej: $c_1 \in \mathbf{I}_1 = [0; 0.5]$; $v_1 = f(c_1) = 40$ → $f_{esc.}(t) = 40$; $\forall t \in \mathbf{I}_1$ y $\Delta t_1 = 0.5$

$c_2 \in \mathbf{I}_2 = [0.5; 2]$; $v_2 = f(c_2) = 20$ → $f_{esc.}(t) = 20$; $\forall t \in \mathbf{I}_2$ y $\Delta t_2 = 1.5$

$c_3 \in \mathbf{I}_3 = [2; 3]$; $v_3 = f(c_3) = 60$ → $f_{esc.}(t) = 60$; $\forall t \in \mathbf{I}_3$ y $\Delta t_3 = 1$

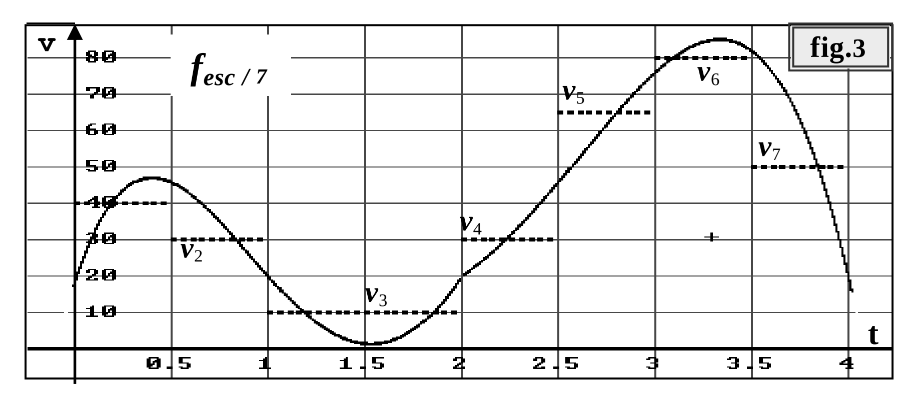
$c_4 \in \mathbf{I}_4 = [3; 3.5]$; $v_4 = f(c_4) = 80$ → $f_{esc.}(t) = 80$; $\forall t \in \mathbf{I}_4$ y $\Delta t_4 = 0.5$

$c_5 \in \mathbf{I}_5 = [3.5; 4]$; $v_5 = f(c_5) = 50$ → $f_{esc.}(t) = 50$; $\forall t \in \mathbf{I}_5$ y $\Delta t_5 = 0.5$

2º) **<u>Calculamos</u>**: $\Delta V(f_{esc}) = \sum_{i=1}^{5} v_i \times \Delta t_i \Rightarrow \Delta V(f_{esc}) = 175$ (verificar)

3º) **<u>Concluimos</u>**: $\Delta V_{[0;4]} \cong \Delta V(f_{esc}) \Rightarrow$ $\boxed{\Delta V_{[0:4]} \cong 175 \ (lts.)}$

☞ Para **n =7** obtenemos otra f_{esc} (**fig 3**) cuyos escalones son “menos anchos” , “más finos” que en la (**fig 2**). Vemos que esta f_{esc} se “ajuste mejor” al ***graf f*** .



Calculando $\Delta V(f_{esc})$ para la f_{esc} de la **fig. 3**:

obtenemos: $\Delta V(f_{esc\,/\,7}) = \sum_{i=1}^{7} v_i \times \Delta t_i \Rightarrow \Delta V(f_{esc\,/\,7}) = 157,5$ (verificar)

<u>Concluimos</u>: $\Delta V_{[0;4]} \cong \Delta V(f_{esc\,/\,7}) \Rightarrow$ $\boxed{\Delta V_{[0:4]} \cong 157{,}5 \ (lts.)}$

☞ El hecho que la f_{esc} correspondiente a **n =7** se “ajuste mejor” al ***graf f*** que la construida con **n = 5** induce a suponer que la aproximación obtenida con **n =7** tiene que ser “mejor” que

la correspondiente a **n = 5** *;* en otras palabras, que **157, 5** debe estar más próximo al **verdadero valor** de $\Delta V_{[0;4]}$, que **175**.

⌧ Así, el problema de hallar la "***variación total***" cuando la velocidad es ***"continua"*** queda ligado al de las funciones escaleras a través del siguiente interrogante:

> ***¿ podrán construirse funciones escaleras que permitan aproximar cada vez mejor y tanto como se quiera la " variación total " resultado de un proceso que se desarrolla a velocidad*** $v = f(t)$ ***con f continua ?***

Antes de investigar esta cuestión, reforzamos algunos conceptos e ideas:

Definición 1: llamamos ***función escalera*** a cualquier función ***constante a tramos***.

Reflexión:
Existen infinitas formas de construir funciones escalera (basta cambiar ancho y alto del "escalón"). En definitiva, existen infinitas formas de aproximar el resultado buscado. Así, el problema que se presenta ahora es determinar el "carácter" de estas aproximaciones, si realmente mejoran al afinar el ancho de los escalones; y, si lo hacen, ir por más, tratar de establecer que "comportamiento" tienen los sucesivos valores que se van obteniendo. Particularmente, determinar si tienen un "comportamiento definido", se acercan tanto como se quiera a un "único número". (en otras palabras, determinar que pasa con el límite de estas aproximaciones cuando el "ancho de los escalones" tiende a cero).

Definición 2: ***región escalonada***

Dada una función escalera, llamamos ***región escalonada*** a la región **R** que resulta de unir los rectángulos determinados por la ***graf. f*** y el ***eje x.***

Ejemplo: (f_{esc} *fig. 4* = f_{esc} *fig. 2*)

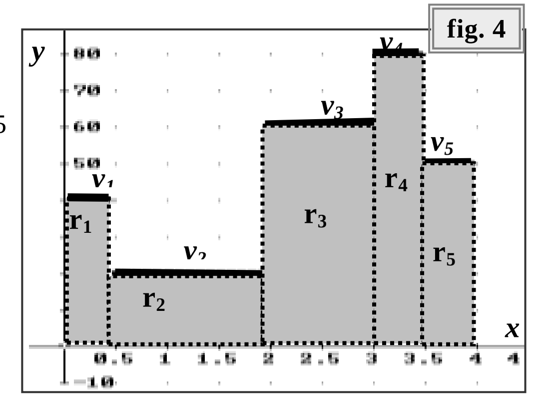
Sea ***f*** definida por la gráfica de la *fig 4.*

Luego: $\mathbf{R} = \bigcup_{i=1}^{5} \mathbf{r_i} = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2 \cup \mathbf{r}_3 \cup \mathbf{r}_4 \cup \mathbf{r}_5$

Curiosidad: **¿área de R ??**

$$\textbf{área R} = \sum_{i=1}^{5} \textbf{área } \mathbf{r_i} = 175 \quad \text{(verificar)}$$

Casualidad?: $\Delta V(f_{esc}\ \textit{fig. 2}) = 175$



5.3 El problema y su contexto

5.3.1 Relación entre el cálculo de la "variación total" y el cálculo de "áreas"

En el párrafo 2 para aproximar ΔV usamos una f_{esc} (fig.2), luego vimos que tal función define una región escalonada (**R**-fig.4). Calculada el **área de R** observamos que aun cuando ambos problemas son de naturaleza muy distinta (uno físico, el otro geométrico), se resuelven a través del mismo **"proceso de cálculo".**

Área de *r* *:*

En cada $\mathbf{I}_i$ donde ***f*** es cte.

h (alt.) = $f(c_i)$ (= 20)

b (base) = $\Delta \mathbf{t_i}$ (= 1.5)

f
h = 20 = v
r_i
c_i
t

Variación de volumen:

En cada $\mathbf{I}_i$ donde ***f*** es cte:

v (vel. en $\mathbf{I}_i$) = $f(c_i)$ (= 20)

(tpo de proceso) = $\Delta \mathbf{t_i}$ (= 1.5)

área r_i = h x Δt_i = 30 **$\Delta V_{[I_i]}$ = v x Δt_i = 30**

área r_i = $f(c_i)$ x Δt_i **$\Delta V_{[I_i]}$ = $f(c_i)$ x Δt_i**

área r_i = $f(c_i)$ x Δt_i = $\Delta V_{[I_i]}$

f

Idem: si ***f*** representa la intensidad de una fuerza aplicada sobre un cuerpo, entonces:

área r_i = $f(c_i)$ x Δt_i = $W_{[I_i]}$ (→trabajo en I_i)

Conclusión: superficie del rectángulo (**h** = cte), variación de volumen para **v** = cte y trabajo para ***f*** = cte , se **calculan** de la misma forma.

Nota: por uso y costumbre es habitual referirse a estos resultados con expresiones como:

≺ ***la variación de volumen en [a; b] es "igual" al área bajo la graf f*** ≻ **; ó,**

≺ ***el trabajo realizado por f en [a; b] es "igual" al área bajo la graf f*** ≻

Cabe observar que en estas oraciones el término "*igual*" está usado en "*sentido amplio*"; que esto, de no tenerse en cuenta, puede generar equívocos, puede llevar a "confundir" el "concepto" (por ejemplo: *trabajo*) con su "forma de cálculo". Hacemos algunas reflexiones al respecto.

▸ Lo correcto en un problema en el que intervienen magnitudes es que la **respuesta** incluya **"medida" y "unidad"**. Así, en el caso de la variación de volumen, el trabajo para ***f*** constante o la superficie del rectángulo, las **respuestas** son **30 ls, 30 joule** o **30 cm^2** (por ej.); las cuales, y claramente, no son "iguales" **(30 ls.** de agua no es "lo mismo" que **30 cm^2** de tela). Lo que se quiere remarcar aquí es que el hecho de que la **medida** de dos "cosas" se calcule de igual forma no hace a la "esencia" de estas cosas; esto es, **no implica** que sean **la misma cosa**.

▸ Entonces: ¿porqué el uso de estas expresiones?. Porque cuando una comunidad de trabajo hace suyo un concepto, lo **asimila (*)**, todos en ella entienden de que se habla aun cuando no se lo haga con precisión. Así, se aceptan ciertos *deslizamientos* del lenguaje ya que los mismos alivianan la comunicación sin grandes riesgos en cuanto a que se desvirtúe su esencia.

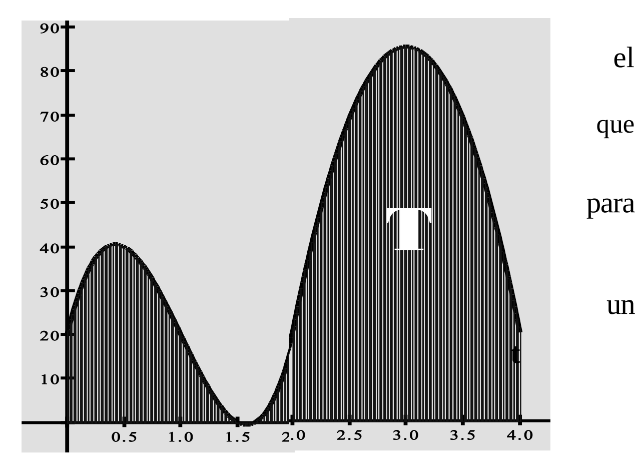
(*) Asimilar: comprender lo que se aprende, incorporarlo en forma efectiva y significativa a los conocimientos previos. Así, y por ejemplo, haber asimilado el concepto de "trabajo" permite interpretar correctamente la expresión "el trabajo realizado por **f** es **igual** al área bajo la **graf. f** " ; entender que lo que la misma dice es que aún cuando "trabajo" y "área de una figura" no son la misma "cosa", tienen **algo, una parte de sí, donde se reconocen iguales**. En este caso, este **algo** donde se reconocen **iguales** es el **proceso matemático** por el cual se **calcula su medida** .

5.3.2 Resolución de Problemas y "pasaje de contexto"

Dada la función ***f*** *(positiva)* de la fig.1, la ***graf f*** determina con el ***eje x*** una región (**T**).

El contorno superior de esta región es ***"curvo"*** ; y esto plantea un problema para el cálculo del **área T**. (problema que, como dijimos en la introducción, es del "tipo" de los que resuelve la integral)

Lo antes visto indica que el *proceso* a seguir para hallar valores *aproximados* del **área T** es el mismo que el requerido para hallar valores *aproximados* de la **variación de volumen** en un tanque donde entra o sale agua a una velocidad ***v*** = ***f***(t).



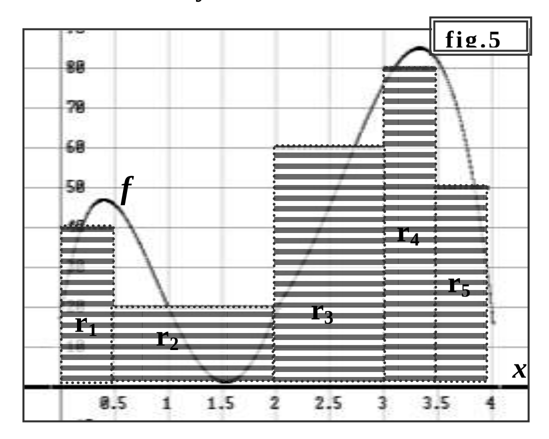
<u>Ejemplos</u>: aproximamos ***f*** por distintas funciones escaleras y concluimos:

a) Dada **R** , región escalonada de la fig.5 correspondiente a la $f_{esc/5}$; tenemos:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{i=1}^{5} \mathbf{r_i} = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2 \cup \mathbf{r}_3 \cup \mathbf{r}_4 \cup \mathbf{r}_5$$

$$a(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{a(r_i)} = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{h_i \times \Delta t_i = 175}$$

$$\mathbf{a(R) \approx a(T) \quad \Rightarrow \quad a(T) \approx 175} \ .$$

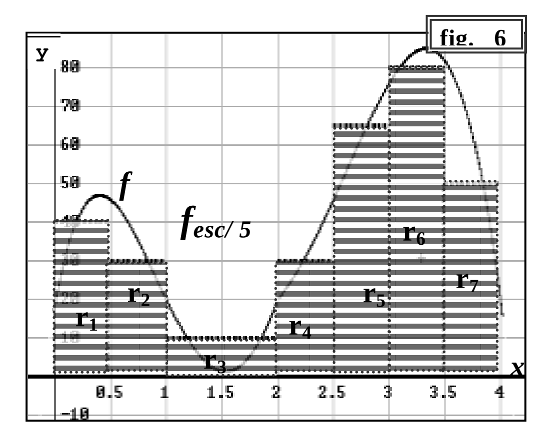


b) Dada **R** , región escalonada de la fig.6 correspondiente a la $f_{esc/7}$; tenemos:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{i=1}^{7} \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2 \cup \mathbf{r}_3 \ldots\ldots \cup \mathbf{r}_7$$

$$\mathbf{a\,(R)} = \sum_{i=1}^{7} \mathbf{a(r_i)} = \sum_{i=1}^{7} \mathbf{h_i \times \Delta t_i = 157,\,5}$$

$$\mathbf{a(R) \approx a(T) \quad \Rightarrow \quad a(T) \approx 157{,}5} \ .$$



<u>Observación 1</u>: de los gráficos podemos "***ver***" que la región escalonada **R** formada por la función escalera más "***fina***" ($f_{esc/7}$) brinda una mejor aproximación del **área T** que la de la región **R** de escalones mas "***anchos***" (la determinada por $f_{esc/5}$).
Estos ejemplos muestran como trabajar en el contexto geométrico permite ***visualizar*** mejor el ***carácter*** de las ***distintas aproximaciones***. En particular, ***ver*** que es factible construir funciones escaleras cuyo comportamiento sea el conveniente al objetivo propuesto**; o sea, que permitan acercarnos más y más, al "área T" (<u>incógnita</u>)**.

$f_{esc/7}$

<u>Observación 2</u>: el hecho observado tiene una <u>aplicación práctica</u> al momento de resolver problemas que aún cuando de <u>distinta naturaleza</u> al del "cálculo del área" basan su resolución en el mismo proceso matemático que este último. Entre ellos y como vimos: el cálculo de la "variación total" debida a un proceso cuya velocidad describe la curva, del "trabajo" requerido para mover un cuerpo por una fuerza cuya intensidad describe la curva, etc. En particular este hecho habilita una muy poderosa herramienta de la Matemática: "el pasaje del problema del <u>contexto original</u> a <u>otro contexto</u> donde la resolución <u>se facilita</u>". En el caso que nos ocupa, **"**el pasaje del problema del <u>contexto original</u> al <u>contexto geométrico</u>" (donde, y según mostramos, la "visualización" del problema facilita su resolución).

Cabe aclarar que para un proceso de cambio relativo a un fenómeno físico *<u>la interpretación del resultado</u>* ***<u>depende</u>*** *<u>de la **f** del caso</u>*; no es la misma si ***f*** indica una *velocidad* de disolución que si indica la *velocidad* de un móvil . Por ejemplo,

→ si $v = x'$ es la velocidad (*constante*) de un móvil en una trayectoria rectilínea, entonces
área **r** = *altura* x *base* ↔ *velocidad* x **Δt = Δx (= <u>desplazamiento</u>** del móvil en ese **Δt)**

→si $v = m'$ es la velocidad (*constante*) de disolución de un soluto (***m***) en un solvente; entonces
área **r** = *altura* x *base* ↔ *velocidad* x **Δt = Δm** (= **<u>masa disuelta</u>** en ese **Δt**).

<u>Observación 3</u>: concluimos así que resuelto el problema del área para una región de contorno curvo, automáticamente tenemos resuelto cualquier otro problema relativo a razones de cambio variables. Luego, y en razón de esto, nos abocamos al problema del ***"cálculo del área de regiones planas con contornos curvos"*** ; hacemos esto teniendo en cuenta lo que podríamos llamar la idea fuerza del Cálculo Integral:

> ***" el área debajo de una curva C gráfica de una función , se puede aproximar por rectángulos cada vez más delgados y esta aproximación se puede hacer tan exacta como se quiera".***

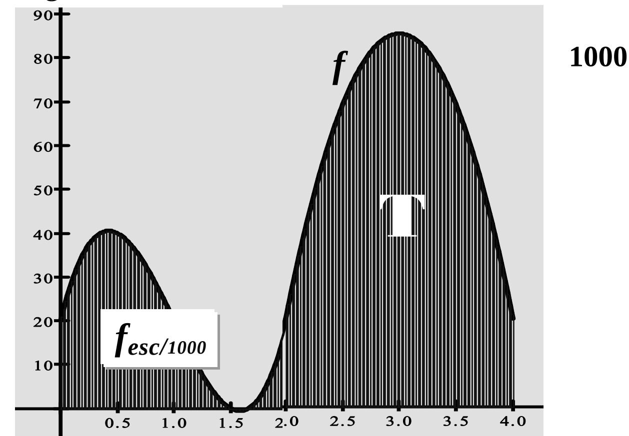
☞El importante avance tecnológico habido en las últimas décadas permite hoy día calcular rápida y efectivamente aproximaciones del verdadero valor del área bajo la curva; "mejorar" estas aproximaciones con sólo tomar **"n"** cada vez más grandes.

Así, y por ej., acudiendo a un utilitario podemos proponer una función escalera con "escalones" **(tomando n =1000),** la que, como "*vemos*" permite obtener una muy buena aproximación del área **T.**

(al graficar la función escalera con el utilitario, podemos "*ver*" que la misma prácticamente se confunde con la gráfica de f).

área T $\cong$ **a (R)** $_{(n = 1000)}$

área T $\cong \sum_{i=1}^{1000} v_i \times \Delta t_i$ **= 162,133**



1000

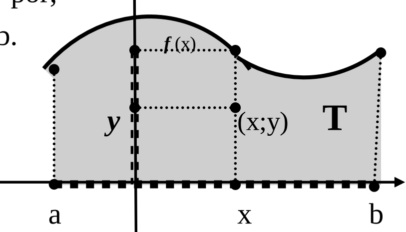
5.4 Area de Regiones Planas

Comenzamos a trabajar a partir de la región de contornos curvos más sencilla que encontramos; o sea, a partir de una región particular a la que damos el nombre de "*trapezoide*". Luego, y a partir de los resultados hallados en el caso particular, resolvemos el caso general.

TRAPEZOIDE :

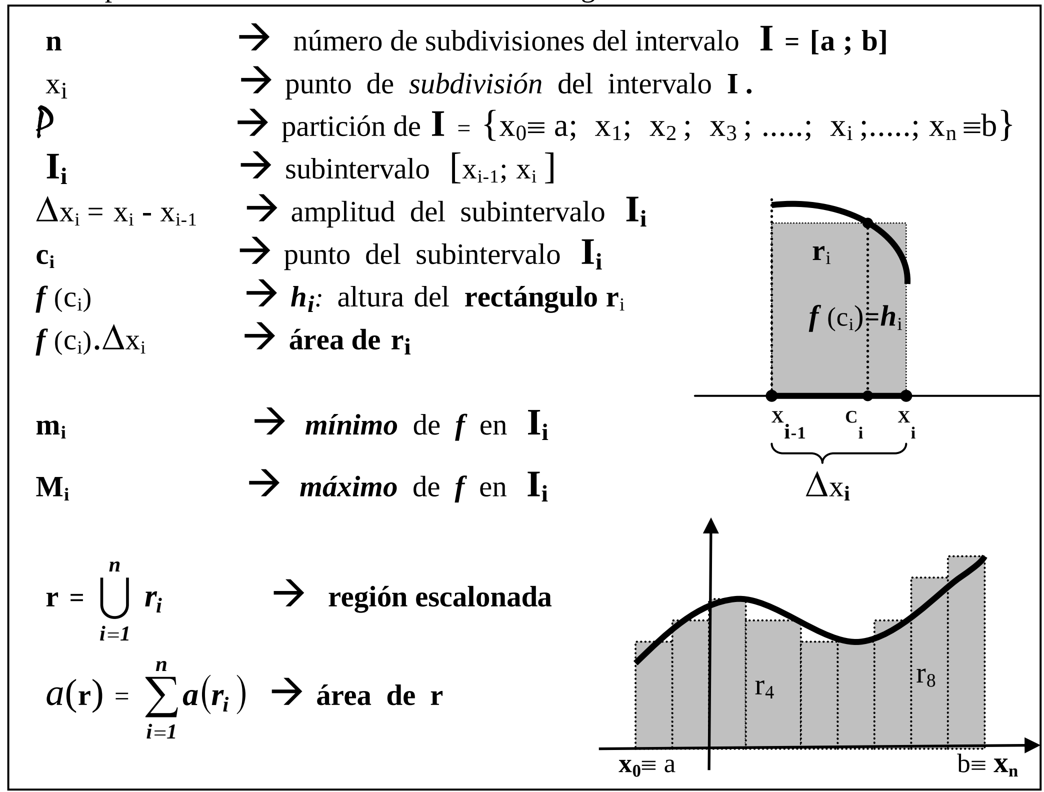
Dada f : [a; b] → R ; f ***<u>definida positiva</u>*** ,
llamamos trapezoide **T** a la figura plana limitada por,
la gráfica de f , el eje x y las rectas x = a , x = b.

$$T = \{ (x,y) \, / \, a \leq x \leq b \, ; \; 0 \leq y \leq f(x) \}$$



Históricamente, es Arquímedes quien desarrolla un método para el cálculo del área de regiones con contornos curvos, el conocido como "*método de exhausción*". El mismo consiste, en esencia, en sustituir la curva original por funciones escaleras "*especiales*".

En la explicación de este método usaremos las siguientes notaciones:



n	→ número de subdivisiones del intervalo $\mathbf{I} = [a\,;\,b]$
x_i	→ punto de *subdivisión* del intervalo **I** .
$\wp$	→ partición de $\mathbf{I} = \{x_0 \equiv a;\ x_1;\ x_2;\ x_3; \ldots;\ x_i; \ldots;\ x_n \equiv b\}$
$\mathbf{I_i}$	→ subintervalo $[x_{i-1};\, x_i]$
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	→ amplitud del subintervalo $\mathbf{I_i}$
$\mathbf{c_i}$	→ punto del subintervalo $\mathbf{I_i}$
$f(c_i)$	→ h_i: altura del **rectángulo** $\mathbf{r}_i$
$f(c_i).\Delta x_i$	→ **área de** $\mathbf{r_i}$
$\mathbf{m_i}$	→ ***mínimo*** de f en $\mathbf{I_i}$
$\mathbf{M_i}$	→ ***máximo*** de f en $\mathbf{I_i}$
$\mathbf{r} = \bigcup_{i=1}^{n} r_i$	→ **región escalonada**
$a(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} a(r_i)$	→ **área de r**

Dado **T**, definido por f en $\mathbf{I} = [a;\, b]$, hallar el área de **T** por el método de exhausción requiere: (*ver ejemplo en el APENDICE, pag. 381*)

1er paso) Dar una *equipartición* (partición de **I** en n subintervalos de igual amplitud)

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\ ;\ \forall i$$

2do paso**)** Construir dos funciones escaleras *"especiales"* :

a) $f_{esc\ inf.}$ → toda por debajo del ***graf f*** ($h_i = m_i =$ ***mín. f en*** $\mathbf{I}_i$)

b) $f_{esc\ sup.}$ → toda por arriba del ***graf f*** ($h_i = M_i =$ ***Max. f en*** $\mathbf{I}_i$) .

3er paso) Obtener las dos regiones escalonadas definidas por $f_{esc\ inf.}$ y $f_{esc\ sup.}$,

a) $\mathbf{r}_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} r_i$ → *región escalonada inferior.* → $\mathbf{r}_{[n]} \subseteq \mathbf{T}$

b) $\mathbf{R}_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ → *región escalonada superior.* → $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{R}_{[n]}$

4to paso) Repetir los pasos anteriores para distintos valores de n y con $n \to +\infty$; generar dos *sucesiones* de regiones escalonadas, $\mathbf{r}_{[n]}$ y $\mathbf{R}_{[n]}$; tales que:

$$r[n] \subseteq T \subseteq R[n]\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

luego, si **T** fuera *medible*, por propiedades geométricas:

$$\text{área}\ \mathbf{r}_{[n]} \le a(T) \le \text{área}\ \mathbf{R}_{[n]}\ ;\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

n	$\mathbf{r}_{[n]} \rightarrow a_n = \text{área } \mathbf{r}_{[n]}$	$\leq a(T) \leq$	$A_n = \text{área } \mathbf{R}_{[n]} \leftarrow \mathbf{R}_{[n]}$
2	$\mathbf{r}_{[2]} = r_1 \bigcup r_2 \rightarrow a_2 = \text{área } \mathbf{r}_{[2]}$	$\vdots$	$A_2 = \text{área } \mathbf{R}_{[2]} \leftarrow \mathbf{R}_{[2]} = R_1 \bigcup R_2$
3	$\mathbf{r}_{[3]} = \bigcup_{i=1}^{3} r_i \rightarrow a_3 = \text{área } \mathbf{r}_{[3]}$	$\vdots$	$A_3 = \text{área } \mathbf{R}_{[3]} \leftarrow \mathbf{R}_{[3]} = \bigcup_{i=1}^{3} R_i$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

5to paso) Analizar el comportamiento de la sucesión de valores formadas,

a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; a_6 ; a_7 ;.........., a_n ,......(sucesión creciente, acotada superiormente).

A_2 ; A_3 ; A_4 ; A_5 ; A_6 ; A_7 ......, A_n , ... (sucesión decreciente, acotada inferiormente).

Calcular el límite para $n \rightarrow \infty$ de ambas sucesiones (los cuales existen según un resultado básico del Cálculo): $a_n \rightarrow L_1$ para $n \rightarrow \infty$; $A_n \rightarrow L_2$ para $n \rightarrow \infty$.

6to paso) <u>**CONCLUIR**</u>

$$\text{si} \quad L_1 = L_2 = L \quad \Rightarrow \quad T \text{ es medible} \quad y \quad a(T) = L$$
$$\text{si} \quad L_1 \neq L_2 \quad \Rightarrow \quad T \text{ no es medible, no existe } a(T)$$

<u>Notas</u>:

⌧ Muy pocas veces el método de exhausción puede aplicarse hasta el último paso y hallar el valor exacto del área. En el ejemplo del apéndice (**T** trapezoide determinado por $f(x) = x^2$ en [0;1]) el método puede ser aplicado con éxito debido a las características de f .
Lo que en este caso posibilita la ejecución del método hasta el final es que:

- $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $\mathbf{I}$=[0;1]. Esto facilita el **cálculo** del área de las regiones escalonadas (inf. y sup.) pues *máximo y mínimo absoluto* de f en $\mathbf{I}_i$ se producen, respectivamente, en el extremo superior e inferior de $\mathbf{I}_i = [x_{i-1}; x_i]$. Particularmente, esto permite "generalizar" el cálculo de dichas áreas:

$$a_n = \text{área } r_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3 . (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2);$$

$$A_n = \text{área } R_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3 . (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2).$$

- por otro lado, como se conoce una fórmula para "***la suma de los cuadrados de los k primeros números naturales***":

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6};$$

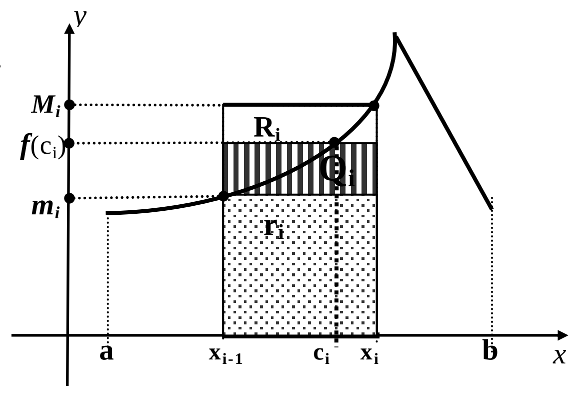
esto permite reducir la expresión generalizada de las áreas a una fórmula a la que se puede *calcular el límite*; obtener así, y finalmente, el valor del área buscada.

⌧ Los factores que posibilitan la aplicación del método de exhausción en el ejemplo son muy específicos y propios de la función del ejemplo; luego, es fácil ver que el método de exhausción no resulta aplicable en general.

Método alternativo para el cálculo del área de un trapezoide definido por una función continua (y positiva)

La región **T** cuya área se quiere calcular se aproxima por una **región escalonada Q** en la que los subrectángulos $\mathbf{Q}_i$ tienen su altura igual al valor de la función en un punto ***cualquiera*** del subintervalo $\mathbf{I}_i$; o sea, tal que $h_i = f(c_i)$ con $c_i \in \mathbf{I}_i$.

Luego, $\mathbf{Q} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{Q}_i \Rightarrow$ área **Q** $\cong$ área **T** .



Por otro lado f continua en $\mathbf{I}_i$ implica:

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i \quad ; \forall i$$

$$m_i \Delta x_i \leq f(c_i)\, \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \quad ; \forall i$$

$$\mathbf{a(r_i)} \leq \mathbf{a(Q_i)} \leq \mathbf{a(R_i)} \quad ; \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a(r_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a(R_i)$$

$$\textit{área}\ \mathbf{r}_{[n]} \leq \textit{área}\ \mathbf{Q}_{[n]} \leq \textit{área}\ \mathbf{R}_{[n]} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

y tenemos entonces que la sucesión originada por ***área*** $\mathbf{Q}_{[n]}$ queda "*encajada*" entre las originadas por ***área*** $\mathbf{r}_{[n]}$ y ***área*** $\mathbf{R}_{[n]}$. Concluimos así que el comportamiento de $a\mathbf{Q}_{[n]}$ para $n \to \infty$ depende del comportamiento de ***área*** $\mathbf{r}_{[n]}$ y ***área*** $\mathbf{R}_{[n]}$ para $n \to \infty$; sucesiones que, según vimos, tienen límite para $n \to \infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a\, r_{[n]} = L_1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a\, R_{[n]} = L_2 \end{array}\right\}$$

si $L_1 = L_2 = L \Rightarrow$ *T es medible y* $a(T) = L$
si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ *T no es medible, no existe* $a(T)$

Por otro lado: $* \quad L_1 = L_2 = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a\, Q_{[n]} = L$

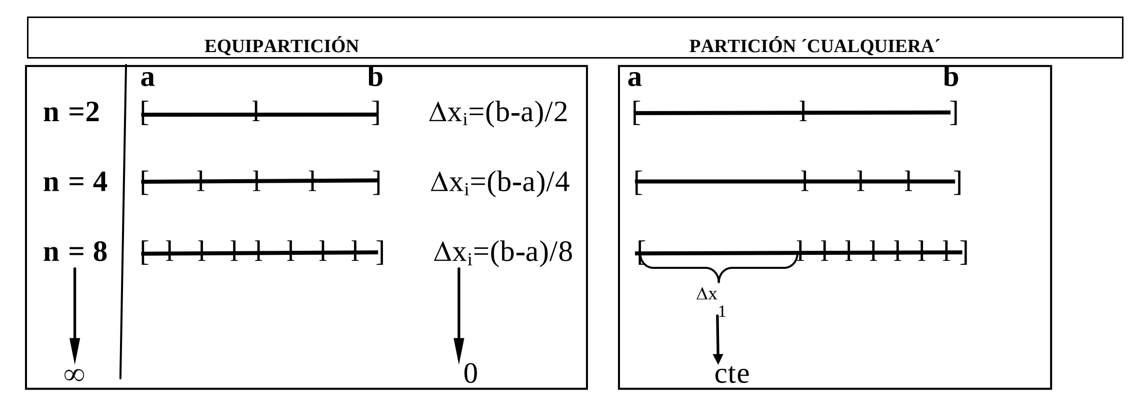
Concluimos así que: $L_1 = L_2 = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a\, Q_{[n]} = a(T)$

El método puede generalizarse más aún ya que en este caso no es necesario tomar “equiparticiones”. En tal caso debemos cuidar el planteo del límite.

- En el caso de una “equipartición”, $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$, y se tiene que:

  * $n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta x_i \to 0; \quad \forall\ i$

- Para una partición “cualquiera” : * $n \to \infty$ ***no implica*** $\Delta x_i \to 0; \quad \forall\ i$.



Luego, para particiones cualesquiera, hacerlas cada vez más ***´finas´*** requiere pedir que los $\Delta x_i \to 0, \forall i$; equivalentemente, que para $n \to \infty$ el $\max\limits_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i \to 0$

Estamos así en condiciones de definir **“área de un trapezoide”**

DEFINICIÓN:

Si existe **L,** resultado del proceso de aproximación por regiones escalonadas, decimos que **T** es medible y **L** su medida.
A **L** lo llamamos ***área del trapezoide*** e indicamos ***a* (T)** .

O sea,

$$a(T) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i \right]$$

RESUMEN: área de un trapezoide T para *f* definida positiva en I = [a ; b]

<u>Proceso de búsqueda y/o aproximación del</u> *a* (T):

1) Damos una partición de "***n* puntos cualesquiera**" del intervalo **I.**

Determinamos ***n*** subintervalos I_i , de amplitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Seleccionamos un c_i en cada subintervalo I_i .

Construimos $Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$; con Q_i rectángulos de altura $f(c_i)$ y base Δx_i .

2) Calculamos las aproximaciones parciales (***áreas parciales***):

$$a(Q_i) = f(c_i) \times \Delta x_i$$

3) Calculamos la aproximación total (***suma de las áreas parciales***):

$$a\, Q_{[n]} = \sum_{i=1}^{n} a(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i$$

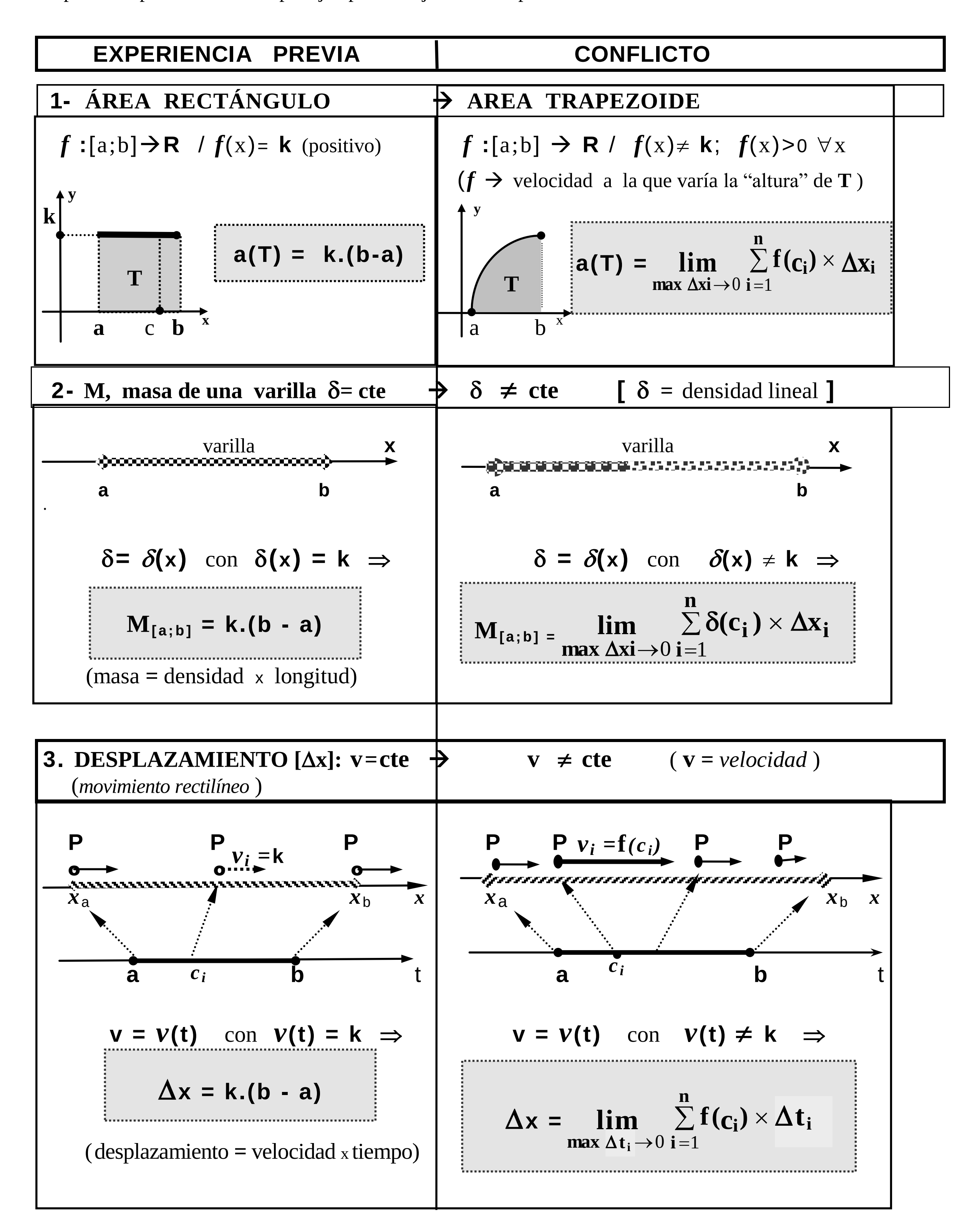
4) Estudiamos el comportamiento de las aproximaciones obtenidas ($\sum f(c_i) \times \Delta x_i$).

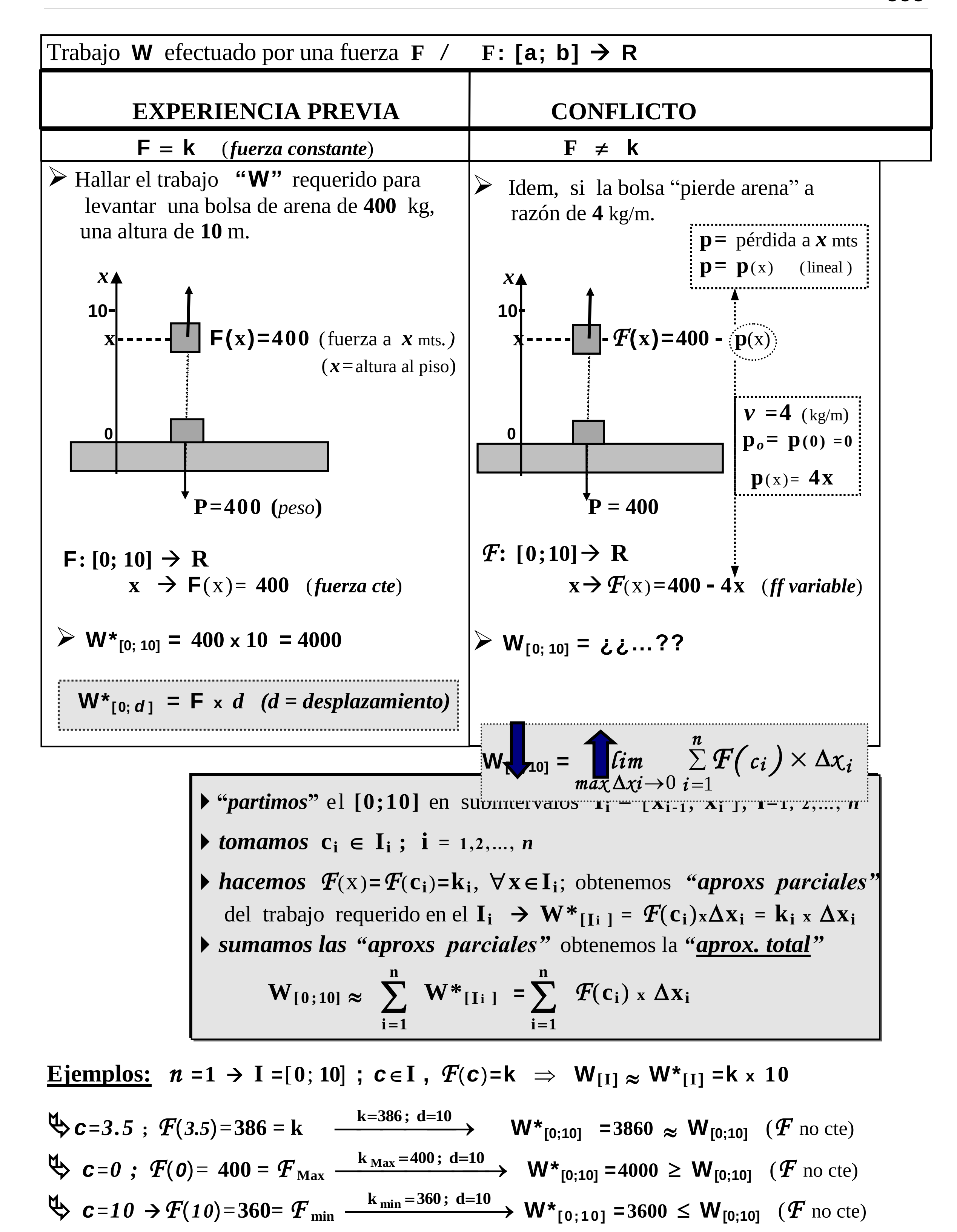
Si existe un número ***L*** al que las sumas se acercan tanto como se quiera cuando el máx $\Delta x_i \to 0$ y para todas las elecciones posibles de los c_i , decimos que,

- $\lim_{max\, \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i \right] = L$ (***L*** puede existir o no existir)
- ***área*** **(T) =** ***L***

5.5 Problemas relativos a razones de cambio "variables"

Resuelto el problema del cálculo de áreas de figuras con contornos curvos, queda resuelto el problema del cálculo de la "variación total" de algo que "cambia" a velocidad " variable". Quedan resueltos también otros importantes problemas como por ejemplo: trabajo realizado por una fuerza "variable". Resumiendo:





Trabajo **W** efectuado por una fuerza **F** / **F: [a; b] → R**

EXPERIENCIA PREVIA	**CONFLICTO**
F = k (*fuerza constante*)	**F ≠ k**

Experiencia previa

- Hallar el trabajo **"W"** requerido para levantar una bolsa de arena de **400** kg, una altura de **10** m.

F(x)=400 (fuerza a *x* mts.) (*x*=altura al piso)

F: [0; 10] → R
x → **F**(x)= **400** (*fuerza cte*)

- $W^*_{[0;\,10]} = 400 \times 10 = 4000$

$W^*_{[0;\,d]} = F \times d$ (*d = desplazamiento*)

Conflicto

- Idem, si la bolsa "pierde arena" a razón de **4** kg/m.

$\mathcal{F}(x)=400 - p(x)$

$\mathcal{F}$: **[0;10] → R**
$x \to \mathcal{F}(x)=400 - 4x$ (*ff variable*)

- $W_{[0;\,10]}$ = ¿¿…??

$$W_{[0;10]} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}(c_i) \times \Delta x_i$$

- "*partimos*" el **[0;10]** en subintervalos $I_i = [x_{i-1};\, x_i]$, i=1, 2,…, *n*
- *tomamos* $c_i \in I_i$; i = 1,2,…, *n*
- *hacemos* $\mathcal{F}(x)=\mathcal{F}(c_i)=k_i,\ \forall x \in I_i$; obtenemos *"aprox parciales"* del trabajo requerido en el $I_i \to W^*_{[I_i]} = \mathcal{F}(c_i)\times\Delta x_i = k_i \times \Delta x_i$
- *sumamos las "aprox parciales"* obtenemos la *"aprox. total"*

$$W_{[0;10]} \approx \sum_{i=1}^{n} W^*_{[I_i]} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}(c_i) \times \Delta x_i$$

Ejemplos: $n=1 \to I=[0;\,10]$; $c \in I$, $\mathcal{F}(c)=k \Rightarrow W_{[I]} \approx W^*_{[I]} = k \times 10$

↳ $c=3.5$; $\mathcal{F}(3.5)=386=k \xrightarrow{k=386;\ d=10} W^*_{[0;10]} = 3860 \approx W_{[0;10]}$ ($\mathcal{F}$ no cte)

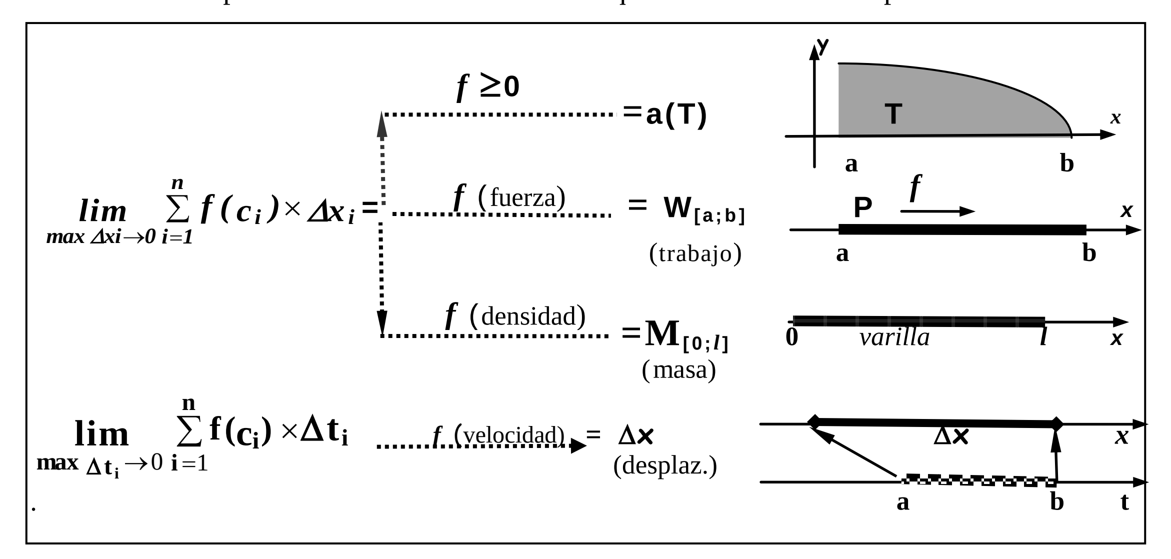
↳ $c=0$; $\mathcal{F}(0)= 400 = \mathcal{F}_{Max} \xrightarrow{k_{Max}=400;\ d=10} W^*_{[0;10]} = 4000 \geq W_{[0;10]}$ ($\mathcal{F}$ no cte)

↳ $c=10 \to \mathcal{F}(10)=360= \mathcal{F}_{min} \xrightarrow{k_{min}=360;\ d=10} W^*_{[0;10]} = 3600 \leq W_{[0;10]}$ ($\mathcal{F}$ no cte)

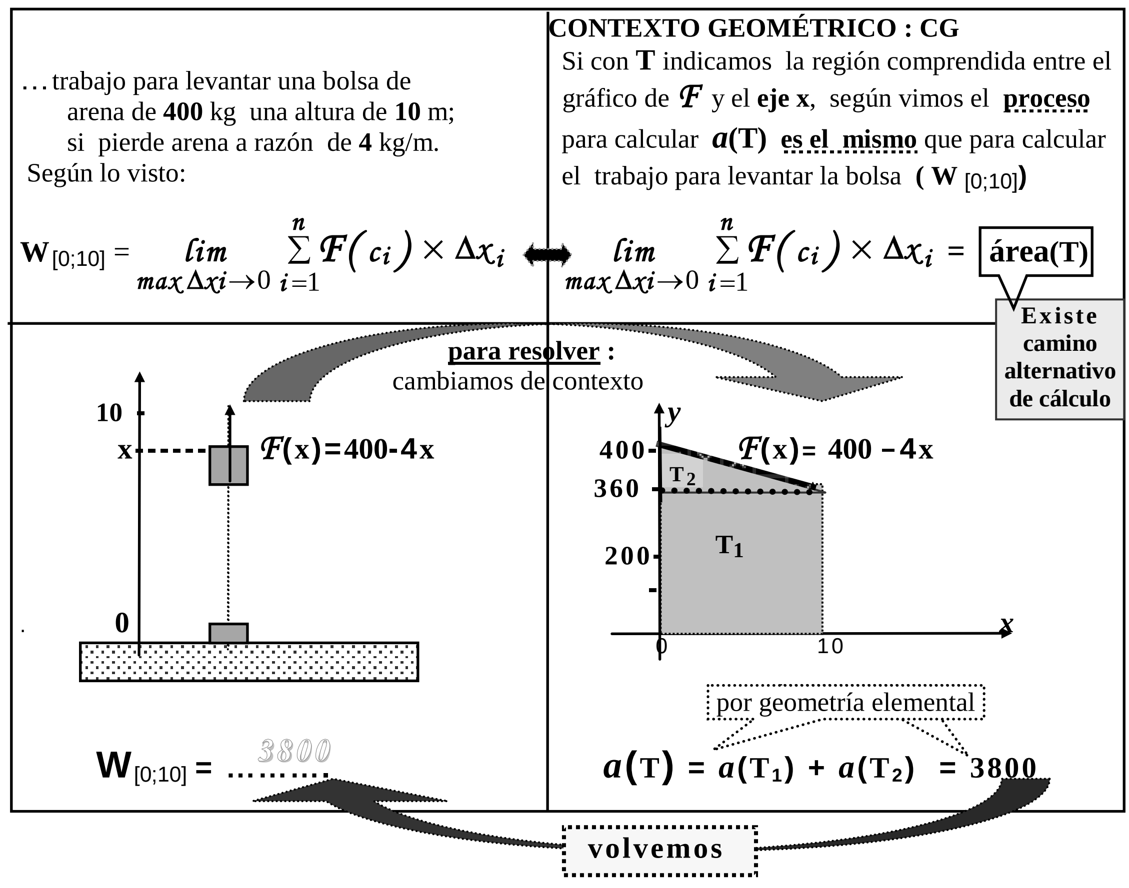
Observación: $3600 \leq W_{[0;10]} \leq 4000$

En este caso podemos dar cota superior e inferior del valor buscado; o sea, un intervalo donde con seguridad se halla el **"verdadero valor"** de $W_{[0;10]}$. Y esto no es poco cuando no se conoce (o es muy complicada) la expresión matemática que permite calcular dicho valor.

Conclusión: la interpretación del resultado de un proceso de "aproximación por sumas" depende del carácter de la función que se somete a dicho proceso. Así:



¿Resolvemos el problema del trabajo realizado por una fuerza no constante ?



ANÁLISIS DEL RESULTADO

- En el caso considerado podemos **"evitar"** el cálculo del límite a través de "**recodificar**" el problema; o sea, de "**trasladarlo a otro contexto"** (el **geométrico**) donde disponemos de herramientas más accesibles para resolverlo.

- **¿otras herramientas?:** fórmulas de cálculo de área de la geometría elemental (rectángulo, triángulo). Obviamente el traslado del problema al contexto geométrico sirve en este caso porque el trapezoide determinado por la función $\mathcal{F}$, intensidad de la fuerza, no tiene contornos curvos sino rectos, disponemos por lo tanto de fórmulas conocidas para el cálculo del área de la región que delimita $\mathcal{F}$.

- **¿ resulta este recurso accesible cualquier sea la función de la fuerza ?** Evidentemente no, ya que, salvo para el círculo, la geometría elemental no provee fórmulas para el cálculo de áreas de regiones con contornos curvos.

- **¿cómo se procede si no se puede acudir a la geometría básica? → ¡¡ problema !!**

Problema del que nos ocupamos a partir de ahora. Así, en lo que sigue, nos dedicamos a la búsqueda y determinación de técnicas algebraicas simples para el cálculo del límite de sumas. (***¡¡ que existen!!*** **,** y para muchas funciones aunque no para todas.)

5.6 La Integral

En párrafos anteriores hemos visto como problemas totalmente distintos terminan por resolverse a través de la misma expresión, el siguiente "*límite de sumas*":

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i \right)$$

Dada la importancia de este límite; su dificultad de cálculo, nos abocamos a su estudio al efecto de hallar un **camino alternativo** para calcular su valor. Para ello trabajamos con una función genérica ***f*** prescindiendo de cualquier tipo de interpretación geométrica o física que se pueda dar y comenzamos aclarando el significado de los términos a usar.

- Dada **f**: [a; b] → R, llamamos:

Partición del [a;b]: $\mathcal{P} = \{x_0 ;\ x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_i;\ldots;\ x_n\}$

al conjunto de "n+1" puntos del intervalo [a ; b]; tal que el primero coincide con "a" , el último con "b" y verifican: $a \equiv x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_i \le \ldots \le x_n \equiv b$

- Cada partición determina ***n*** subintervalos $\mathbf{I}_i = [x_{i-1};\ x_i]$ de amplitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Entre los ***n*** subintervalos hay uno que es el de mayor longitud.

Norma de la Partición : $/\mathcal{P}/$

La "norma de la partición" es la longitud del subintervalo de mayor longitud.

O sea : $/\mathcal{P}/ = \max \Delta x_i$; $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

- Dada la función y la partición se selecciona un punto **"c_i"** en cada subintervalo al efecto de construir la función escalera. A este conjunto de puntos lo llamamos:

Selección de puntos compatible con $\mathcal{P}$: $Q = \{c_1;\ c_2;\ c_3;\ \ldots;\ c_i;\ldots;\ c_n\}$ tal que $\mathbf{c_i} \in \mathbf{I_i}$

<u>Proceso de Integración</u>: construcción y búsqueda del "límite de sumas".

El proceso consta de cuatro etapas:

1. ***<u>Subdivisión del problema</u>*** (o construcción de la ***función escalera,*** f_{esc}).

Este paso consiste en:

* partir el intervalo [a; b] $\Rightarrow$ dar $\mathcal{P}$, partición del [a; b] .

* fijar, en cada subintervalo $\mathbf{I}_i$, la altura del "escalón" de la f_{esc}

$\Rightarrow$ dar Q, selección de puntos compatible con $\mathcal{P}$.

2. **<u>Cálculo de las *aproximaciones parciales*</u>**: calculo de los "n" productos: $\mathbf{f(c_i)\,.\,\Delta x_i}$.

3. **<u>Cálculo de la aproximación *TOTAL*</u>**:

suma de las ***aproximaciones parciales***: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$.

Estas sumas se conocen con el nombre de "SUMAS de RIEMANN" y con el símbolo:

$$\mathbf{S}(\mathbf{f},\mathcal{P},Q) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$$

4. ***<u>Cálculo del límite de las Sumas de Riemann para</u>*** $/\mathcal{P}/ \to \mathbf{0}$.

Estudio del comportamiento de las Sumas de Riemann a medida que se "afina" la partición; o sea, a medida que los escalones se hacen cada vez "más cortos".

En definitiva, calculo: $\lim\limits_{\langle P\rangle\to 0} S(f;P;Q)$. (límite que puede o no, existir)

Definición 1: FUNCIÓN INTEGRABLE

Dada f : [a; b]→ R; decimos que f es integrable en [a; b] si y sólo si existe un número **"L"** tal que para $/\mathcal{P}/\to 0$, las correspondientes sumas de Riemann $\mathbf{S}(f,\mathcal{P},Q)$, se acercan tanto como se quiera al número **L ,** cualquiera sea la selección Q considerada.

Si esto último sucede decimos que: $\lim\limits_{|P|\to 0} S(f;P;Q) = \mathbf{L}$

Definición 2 : INTEGRAL

Si existe $\mathbf{L} = \lim\limits_{|P|\to 0} S(f;P;Q)$ a este número

- **<u>lo llamamos</u> :** integral de f en [a;b]
- **<u>lo indicamos</u> :** $\int_a^b f(x)\cdot dx$

O sea : $$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\times\Delta x_i$$

Observaciones:

a) "a" y "b" se llaman extremo inferior y superior de integración, respectivamente. En la definición 2, "a" y "b" son los extremos del intervalo dominio **f**, luego, **a < b** .

b) El concepto de integral se amplia definiendo el símbolo para el caso de otra relación entre los extremos de integración; o sea, para los siguientes casos:

Definición 3 : Si **a > b;** entonces : $\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$

Definición 4 : Si **a = b;** entonces : $\int_a^a f(x)\cdot dx = 0$

c) Para **f** ≥ 0 en [a; b], definimos: $a\,(T) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i \right];$

luego, por la ***definicion 2***: $a\,(T) = \int_a^b f(x)\cdot dx$.

NOTA: *Definido el concepto de integral como el "límite de sumas" cabe preguntarse bajo que condiciones existirá finito este límite de sumas; o sea, "la integral". Existen teoremas que dan respuesta a esta pregunta (teoremas que sólo enunciamos).*

TEOREMA: ***f*** continua en [a; b] ⇒ ***f*** integrable en [a; b].

TEOREMA: ***f*** seccionalmente continua en [a; b] ⇒ ***f*** integrable en [a; b].

Nota: *f* seccionalmente continua en [a; b] ⇔ tiene un *nro finito* de discontinuidades de *salto finito* en [a; b]. *Ejemplo*: *las funciones escalera*.

5.7 Propiedades de la Integral

En todos los caso *f* y *g* son funciones integrables en el intervalo en que se plantea la integral.

(I₁) $\int_a^b k.f(x).dx = k\cdot\int_a^b f(x).dx$; donde k es cualquier constante.

(I₂) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\cdot dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$

(I₃) $\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$;

sin importar el orden entre ***a , b* y *c.***

(I₄) $\int_a^b f(x).dx \leq \int_a^b g(x).dx$; si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$

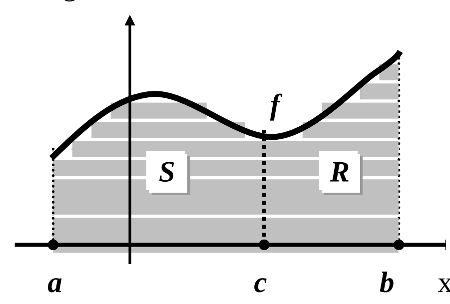
(I₅) $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b k\cdot dx = k.(b-a)$; si $f(x) = k$, $\forall x \in [a,b]$

Observaciones:

a) $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ se pueden reunir en una sola propiedad que se llama *propiedad de linealidad* :

$$\int_a^b \left[k_1 . f(x) + k_2 . g(x)\right] \cdot dx \; = \; k_1 \int_a^b f(x).dx \; + k_2 \int_a^b g(x).dx$$

b) $\mathbf{I}_3$, para el caso de ***f*** ***definida positiva*** y $a < c < b$, admite la siguiente interpretación geométrica

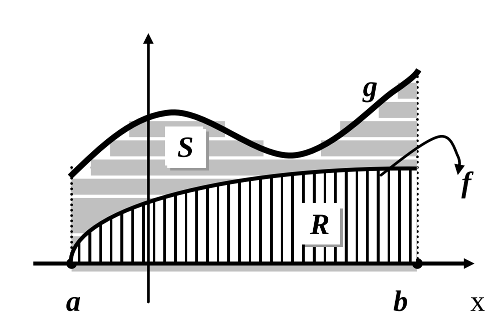


Si $\mathbf{T} = S \cup R$.

Entonces: $\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$

equivale a: **a (T) = a (*S*) + a (*R*)** .

c) $\mathbf{I}_4$, para *f* y *g* *definidas positivas,* admite la siguiente interpretación geométrica:



Si $S = \{ (x, y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; 0 \leq y \leq g(x) \}$
$R = \{ (x, y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; 0 \leq y \leq f(x) \}$

y , $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

Entonces: $R \subseteq S$ y $\mathbf{a}(R) \leq \mathbf{a}(S)$

y se verifica $\mathbf{I}_4$:

$$\int_a^b f(x).dx \; \leq \; \int_a^b g(x).dx$$

d) La propiedad $\mathbf{I}_5$ se prueba fácilmente teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \mathbf{long de} \; [a,b] = b - a$

$$\int_a^b k \cdot dx = \lim_{IPI \to 0} \sum_{i=1}^{n} (k) \cdot \Delta x_i = \lim_{IPI \to 0} \left[(k) \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \right] = \lim_{IPI \to 0} \left[(k) \cdot (b - a) \right] = k.(b - a)$$

5.8 Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

- Dada f función continua en [a; b], existe al menos un $c \in (a; b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c).(b-a).$$

- Demostración:

f continua en [a; b]. Luego, por el teorema de Weierstrass, admite máximo y mínimo absoluto en [a; b]; o sea, existen x_m y x_M en [a; b] tales que:

$$f(x_m) = m_a \quad \text{y} \quad f(x_M) = M_a$$

$$\text{y}; \quad m_a \leq f(x) \leq M_a \;; \quad \forall x \in [a,b]$$

Luego, por I_4: $\displaystyle\int_a^b m_a \cdot dx \leq \int_a^b f(x)\cdot dx \leq \int_a^b M_a \cdot dx$

por I_5: $\displaystyle m_a.(b-a) \leq \int_a^b f(x)\cdot dx \leq M_a(b-a)$

Dividiendo por, $(b-a)$ (con $b-a>0$ dado que $b>a$) tenemos entonces que:

$$m_a \leq \frac{\int_a^b f(x)\cdot dx}{b-a} \leq M_a$$

***equivalentemente*:** $f(x_m) \leq k \leq f(x_M)$

Finalmente, por el teorema del valor ***intermedio*** aplicado al intervalo $[x_m ; x_M]$ (ó $[x_M ; x_m]$) tenemos que existe $c \in (x_m ; x_M) \subseteq (a; b)$ tal que $f(c) = k$; o sea que:

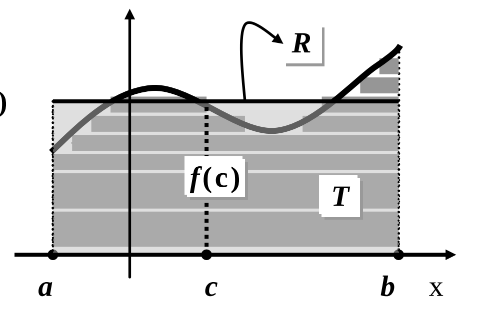
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\cdot dx}{b-a} \quad ; \quad \text{con } c \in (a;b)$$

***equivalentemente*:** $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c).(b-a)$; con $c \in (a;b)$. *q.e.d.*

***<u>Observaciones</u>*:**

1) El teorema es válido también en el caso de $a \geq b$ (ejercicio).

2) En el caso de una f ***definida positiva*** en $[a; b]$, el teorema admite una interpretación geométrica: "existe un punto "$c \in (a;b)$" para el cual el área del rectángulo de altura $f(c)$ y ancho $(b-a)$ es igual al área bajo la curva gráfico de f.



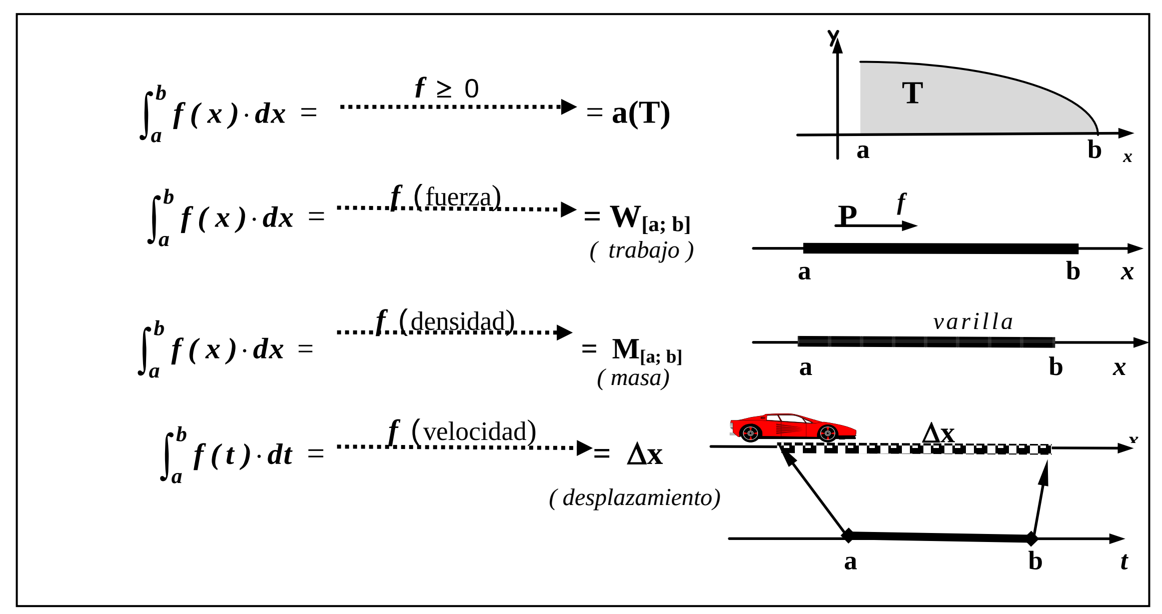
$$a(T) = \int_a^b f(x).dx$$

$$a(R) = f(c).(b-a)$$

Luego, por el teorema: $a(T) = a(R)$

5. 9 Problemas que resuelve "LA INTEGRAL"

Por definición $\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i$. Luego, la integral resuelve todos aquellos problemas que, según vimos, resuelven por medio de "límite de sumas".



<u>**Observaciones**</u>:

1) En el Apéndice al final del Capítulo se calcula el área de una figura plana a partir del correspondiente "límite de sumas" y con el método históricamente conocido como "método de <u>exhausción</u>" . Se calcula el área de **T,** trapezoide determinado por **f** (x) = x^2 en [0;1].

Se demuestra que $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i = 1/3$. En otras palabras que **a(T) = 1/ 3 .**

Como con la nueva notación, **a (T) =** $\int_0^1 x^2\, dx$; <u>**concluimos así que:**</u> $\int_0^1 x^2\, dx = 1/3$.

2) Si **Δx** indica el <u>desplazamiento de un móvil a velocidad variable</u>, si la <u>velocidad</u> es conocida y la variable independiente el <u>tiempo</u> , **v = f (t)= t** ^{2} en [0; 1], entonces:

$$\Delta x_{[0;1]} = \int_0^1 t^2\, dt \;\Rightarrow\; \Delta x_{[0;1]} = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta t_i$$

Es fácil ver que el "límite" resultante es "igual" al planteado para el cálculo del **área (T)** con **f**(x) = x^2. (sólo difiere en la letra usada para representar la "variable independiente").

Cómo $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta t_i = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i = 1/3 \;\Rightarrow\; \int_0^1 t^2\, dt = \int_0^1 x^2\, dx = 1/3$

Vemos entonces que el objetivo del <u>**diferencial**</u> (dx , dt , u otro) en el símbolo integral es señalar la letra que corresponde a la <u>**variable independiente de f**</u> Así :

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^b f(t)\cdot dt = \int_a^b f(z)\cdot dz \longrightarrow$$

El resultado sólo depende de:
- ☞ **la función integrando (f) ;**
- ☞ **del intervalo de integración; o sea, de "a" y "b".**

- $\int_0^1 x^2\cdot dx = \int_0^1 t^2\cdot dt = \int_0^1 z^2\cdot dz = 1/3.$
- $\int_0^1 x^2\, dx \neq \int_0^1 t^2\, dx = t^2$ (prop. I_5)

5.10 Cálculo de la integral: $\int_a^b f(x)\,dx$

INTEGRADORA

b → $\int_a^{[...]} f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} S(f;P_{[a;b]};Q) = ...$ → L ?

Ejemplo: dada **f (x) = x²** ; ¿cómo calculamos $\int_0^1 f(x)dx$?

1 → $\int_0^{[...]} x^2\,dx = \lim_{|P|\to 0} S(f;P_{[0;1]};Q) = ...$ → L = 1/3

En el APENDICE se muestra el cálculo **por definición** de $\int_0^1 x^2 dx$

→En este caso las características de la función integrando (x^2, creciente en [0;1]) hacen posible el cálculo del correspondiente "límite de sumas" ; por ende, el cálculo de la integral "por definición". Pero, y en general, este límite es prácticamente imposible calcular.

→Así, nuestro objetivo en lo que sigue es la búsqueda de un camino "alternativo" para el "cálculo de integrales" ; o sea, de un camino que permita "obviar" el "límite de sumas".

PROBLEMA: hallar un camino alternativo al de la definición para el cálculo de integrales.

PLAN DE TRABAJO: como venimos haciendo hasta aquí, primero procedemos a analizar el **caso simple** con el objetivo de hallar **pistas** que permitan **reformular el problema** en **otros términos**; en particular, términos tales que faciliten su resolución. Hecho esto, procedemos luego a resolver el **problema reformulado**.

Análisis de un caso simple: $f(t) = t$; $D_f = [0; b]$

Objetivo: cálculo $\int_0^x t\,dt$, $x \in [0; b]$

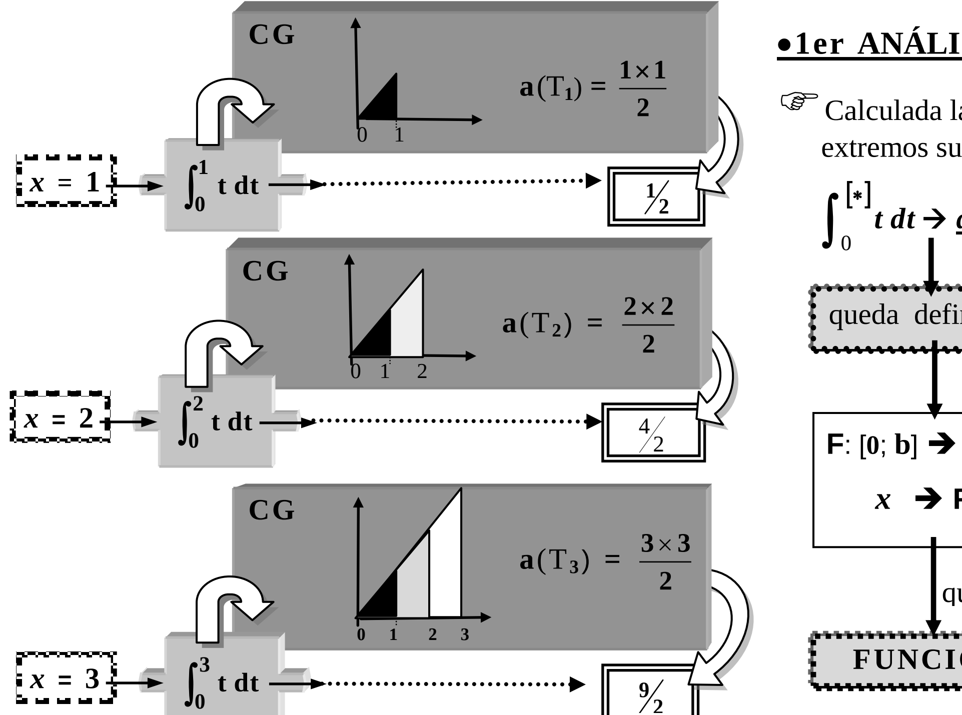
☒ En general, y al efecto de **reformular** un problema, una estrategia efectiva es la de **trasladar** el problema a **otro contexto** en el que se facilite la acción.
En este caso, al ser **f** positiva en su dominio, el traslado al **Contexto Geométrico** (**CG**) permite reformular el cálculo de la integral en término de **áreas**.

- $f(t) \geq 0$ en [0; b]
- **T** (trapezoide asociado a **f**) = ***triángulo***.
- $\int_0^x t\,dt$ = área (T)

Así, para calcular $\int_0^x t\,dt$, tenemos un camino alternativo: **calcular el área de T**,

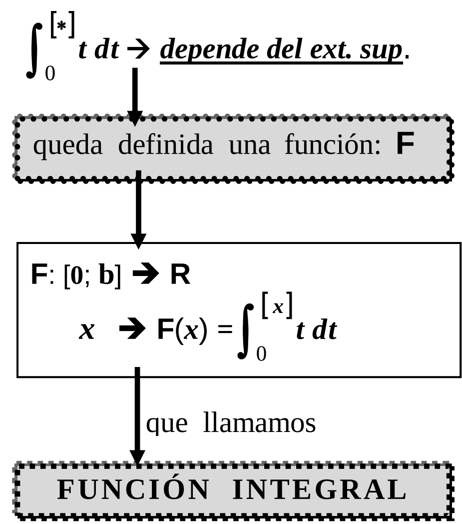
trapezoide determinado por el ***graf f***, el ***eje t*** y la ***recta*** **t = *x*.**
Investigamos este camino en busca de pistas que ayuden a nuestro objetivo; pero, y fundamentalmente, de aquellas que permitan generalizar el proceso.

1ro) Calculamos $\int_0^x t\,dt$ para distintos *x*´s en **[0;b]** trasladando el problema al **CG .**



•1er ANÁLISIS:

☞ Calculada la integral para distintos extremos superiores vemos que;



NOTA:
Se puede demostrar que toda f integrable en [a; b], define una "Función Integral".

Definición 1: FUNCIÓN INTEGRAL

Dada **f** integrable en [a; b] llamamos **función integral** a la función **F** tal que:

- $F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$
- **Dom.F = Dom. f = [a; b]**

Se vislumbra así **otro camino** para el cálculo de integrales: **el cálculo de F(*x*).**

Pero…, $F(x) = \int_a^x f(t).\,dt$ y $\int_a^x f(t).\,dt = \lim_{|P|\to 0} S(f\,;P_{[a;x]};Q)$

O sea, y hasta aquí, el cálculo del "limite de sumas" sigue siendo "inevitable" ….
¿Qué hacemos? , ¿abandonamos este camino o persistimos en busca de pistas?...
Retomamos la exploración del caso simple, quizás resten cosas por descubrir….

En particular analizamos la existencia de algún patrón en la formación de las **F(x)**.

$x = 1 \rightarrow F(1) = \int_0^1 t\,dt = 1/2 = \frac{1^2}{2}$

$x = 2 \rightarrow F(2) = \int_0^2 t\,dt = 4/2 = \frac{2^2}{2}$

$x = 3 \rightarrow F(3) = \int_0^3 t\,dt = 9/2 = \frac{3^2}{2}$

....

$x = x_o \rightarrow F(x_o) = \int_0^{[x_o]} t\,dt = \frac{x_o^2}{2}$

Conclusión: si $P(x) = \frac{x^2}{2}$; tenemos que:

***)** $F(x) = P(x)$, $\forall x \in [0;b]$

***)** **P** es una **función elemental** (*)

(*) **función elemental**: función cuyas imágenes se obtienen a partir de un número finito de operaciones algebraicas básicas ($\pm$; x ; $\div$; $\sqrt{\ }$) entre funciones "*conocidas*".
Ejs: potencias, polinomios, cociente de polimonios, raices , x^2 + sen x , etc.

Observaciones:

→ La complejidad de **F,** función integral asociada a una integral, radica en que **por definición**, **no es** una **función elemental:** su cálculo trasciende los métodos del álgebra. (calcular un límite requiere un número infinito de operaciones).

→ Por otro lado, sabemos que las funciones admiten distintos registros de representación (algebraico, gráfico, numérico y verbal) y que, dentro de un mismo registro, es posible el proceso de "conversión" ; o sea, de reescribirla de otra forma pero dentro del mismo registro.

• 2do ANÁLISIS:

1) Para el caso simple investigado, el cambio de contexto (del analítico al geométrico) permite hallar una **función elemental**, **P,** tal que $F(x) = P(x)$, $\forall x \in [0; b]$.

En definitiva, **calcular la integral** por medio de una **función elemental .**

$$\int_0^x t.\,dt = F(x) ; \quad F(x) = P(x) ; \quad P(x) = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x t.\,dt = \frac{x^2}{2}$$

2) Dado que las funciones admiten distintas formas de ser representadas, hemos hallado un camino distinto al de la definición para calcular integrales: hallar, de ser posible, una función elemental (**P**) que coincida con la función integral (**F**) asociada a la integral.

En tal caso: $\int_a^x f(t).\,dt = P(x)$ (y obviamos el "límite de sumas" !!! ..)

Y este hecho señala la posibilidad de **reformular** el problema original.

PROBLEMA REFORMULADO (1):

Dada $F(x) = \int_a^x f(t).\,dt$, **Dom F = [a; b]**

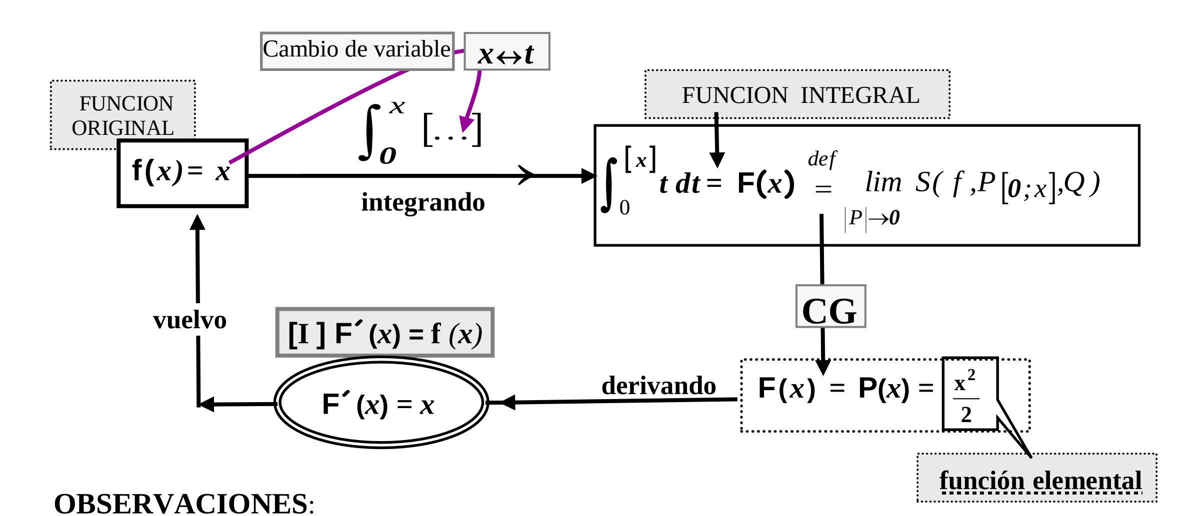
hallar P , función elemental tal que $F(x) = P(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

3) En el caso simple investigado, lo que permite hallar la función elemental **P / P = F** es el traslado del problema del contexto analítico al geométrico**.** Pero es fácil ver que esta estrategia no se puede aplicar a cualquier función pues hasta ahora , salvo para el círculo, no disponemos de fórmulas para el cálculo del área de regiones con contornos curvos. Luego, trasladar el problema al Contexto Geométrico no es una alternativa válida para una **f** genérica. En lo que sigue, investigamos la existencia de **otro contexto** al que trasladar el problema y en el cual se simplifique su resolución. En particular…,
retomamos la exploración del caso simple, quizás resten cosas por descubrir….

• 3er ANÁLISIS: (Caso Simple: $f(t) = t$; $D_f = [0; b]$)

Expresada **F** por medio de la función elemental **P** ($F(x) = P(x) = \frac{x^2}{2}$, $\forall\, x \in [0;b]$), procedemos a **derivar F** , observar que resulta de esta operación. Y descubrimos …. ,

que la derivada de la Función Integral es, ¡ la función original ! → $F'(x) = f(x)$.



OBSERVACIONES:

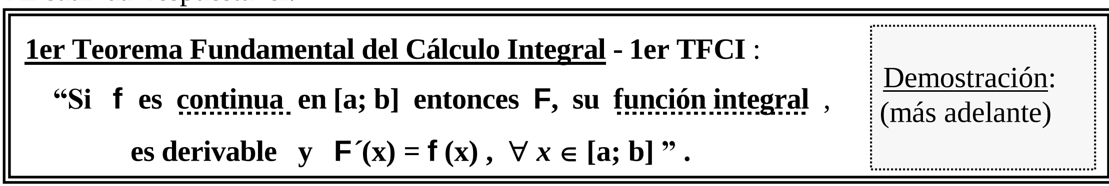
1) Descubrimos que **F** (función integral para el caso simple), actúa a modo de **puente** entre el **cálculo integral** y el **cálculo diferencial**; es decir, **establece un nexo entre ambos contextos** determinando un circuito donde quedan relacionadas las dos herramientas más poderosas del cálculo: la **Integral** y la **Derivada**.
En razón de ello a este circuito lo llamamos, **"circuito ID "** (**I**ntegro-**D**iferencial**).**

2) La existencia de este circuito sugiere la existencia de otro camino a explorar: el traslado del problema al **contexto** del **Cálculo Diferencial** (siempre y cuando esto sea posible). Si observamos el circuito detectamos que esta posibilidad está condicionada a la existencia de la igualdad **[I] (derivada de la Función Integral igual a la Función Original).**

Tenemos así el:

I: Primer interrogante fundamental:
Cualquiera sea la f de partida, ¿siempre será $F'(x) = f(x)$?

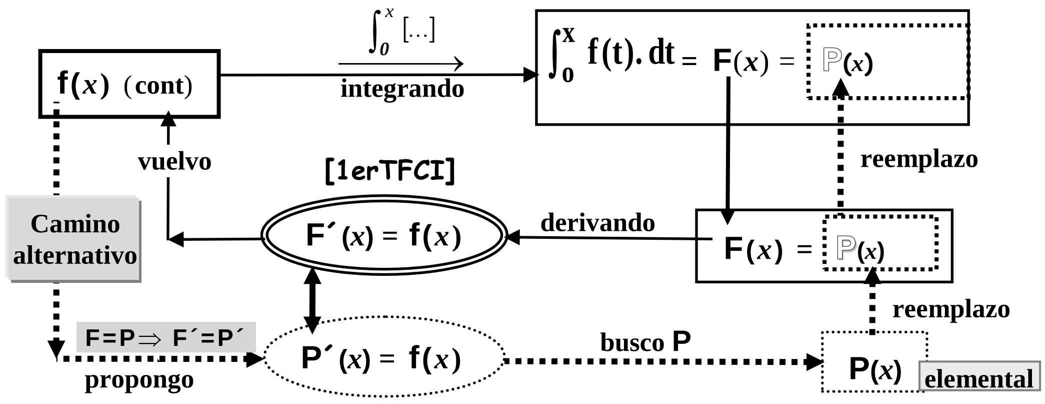
Al cual da respuesta el:


1er Teorema Fundamental del Cálculo Integral - 1er TFCI :

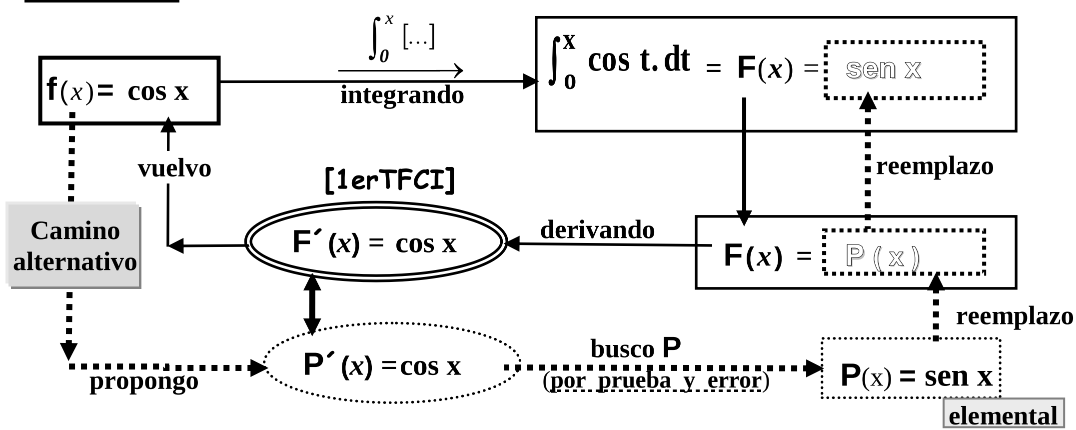
"Si f es continua en [a; b] entonces F, su función integral ,
es derivable y $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a; b]$ " .

Demostración:
(más adelante)

CONCLUSIÓN: si **f,** la función original, es continua en el intervalo, el circuito se forma. Luego, procedemos a explorarlo; en particular a investigar si se puede recorrer **al revés.**
O sea, **asumir que existe P** (elemental) tal que **P = F** y **buscar P**.
¿Cómo?: recordando que si dos funciones son iguales, sus derivadas lo son **(P´ = F´)**



EJEMPLO:



Momento de Reflexión: trasladar el problema al contexto del **Calculo Diferencial** permite reformular el mismo en término de derivadas (reformulación (2)) .

PROBLEMA (original): **f : [a;b] → R ;**

↳ **hallar un camino alternativo para el cálculo de la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ con x∈[a; b]**

PROBLEMA REFORMULADO (1): **f : [a; b] → R ; f continua en [a;b]**

↳ **hallar una función elemental P tal que P = F con F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$; x∈[a;b]**

PROBLEMA REFORMULADO (2): f : [a;b] → R ; f continua en [a; b]

↳ **hallar una función elemental P tal que P´(x) = f (x) , ∀ x ∈ [a; b]**

NOTA: en este punto vemos que la existencia o no de una función elemental **P** tal que **P´ = f** es determinante para el cálculo de la integral por un camino alternativo. Luego, dado su importancia, damos un nombre a esta función y estudiamos sus propiedades.

Observación: **P´ = f** implica que **f** "proviene" de **P** ; en otras palabras, que **P** está "antes" que **f** .

Definición 2: **PRIMITIVA (o ANTIDERIVADA)**

P es una **primitiva** de **f** en [a; b] si y solo si $P'(x) = f(x)$; $\forall x \in [a; b]$.

Finalmente el problema original (calculo de la integral) queda reformulado así:

PROBLEMA REFORMULADO (3):

↳ **dada f continua en [a; b] hallar P, primitiva elemental de f .**

Ejemplos:

a) si $f(x) = x$; una primitiva de **f** es $P(x) = x^2/2$; [$P'(x) = x$ → ***verifica***]

b) si $f(x) = \cos x$; una primitiva de **f** es $P(x) = \operatorname{sen} x$; [$P'(x) = \cos x$ → ***verifica***]

c) si $f(x) = 1$; una primitiva de **f** es $P(x) = x$; [$P'(x) = 1$ → ***verifica***]

Notas:

1.- Derivada en los extremos del intervalo:
el concepto de derivada lo hemos presentado y definido para puntos interiores a un intervalo. Luego, cabe aclarar que las derivadas en los extremos, **P´(a)** y **P´(b),** se definen de la misma forma solo que reemplazando "límite" por "límite lateral" para $x \to a^+$ y $x \to b^-$ respectivamente

2.- Las primitivas de los ejs. las hallamos por el método de **prueba y error**; o sea, a partir de **proponer** una función y **probar** si verifica lo buscado. Si no verifica se detecta el error, *se* corrige y se vuelve a probar. Y así hasta encontrar la primitiva elemental de **f** (si existe). Este método es el único posible para las funciones elementales básicas; no así para las demás. Así, otro objetivo del cálculo integral es hallar métodos efectivos para el cálculo de primitivas.

3.- No siempre existe **P**, primitiva elemental de **f** ; aún para **f** continua. **Ej**: $f(x) = e^{-x^2}$.

4.- Por el 1er TFCI, si f es continua en [a;b] y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ **su función integral entonces** $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$. **Luego: F es una primitiva de f .**

PROPIEDADES DE LAS PRIMITIVAS

Teorema I-Pr: Si una función tiene una primitiva P, entonces tiene infinitas ($P + k$, $k \in R$)

Demostración:

- Sea P primitiva de f → $P'(x) = f(x)$
- Dada $G(x) = P(x) + k$, $k \in R$ → $G'(x) = [P(x) + k]' = P'(x) + (k)' = f(x)$
- Luego, $G = P + k$ es primitiva de f . (q.e.d)

Teorema II-Pr: Dos primitivas de **f** difieren en una constante; o sea, $G(x) - P(x) = k$

Demostración:

- P primitiva de f ⇒ $P'(x) = f(x)$
- G primitiva de f ⇒ $G'(x) = f(x)$
- Sea $H(x) = G(x) - P(x)$; $\forall x \in [a; b]$

$H'(x) = [G(x) - P(x)]' = G'(x) - P'(x) = f(x) - f(x) = 0$; $\forall x \in [a; b]$.

Luego, $H'(x) = 0$; $\forall x \in [a; b]$ ⇒ $H(x) = k$; $\forall x \in [a; b]$.

- **Conclusión**: $G(x) - P(x) = k$ ó $G(x) = P(x) + k$; $\forall x \in [a; b]$. (q.e.d)

Observación: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de **f**. Luego, por el Teo II-Pr, si **P** es otra primitiva de **f,** entonces existe $k \in R$ tal que **F(x) = P(x) + k** ; $\forall x \in [a; b]$.

Teorema III-Pr:

Si **P** y **G** son dos primitivas de **f** en [a; b] y existe $x_o \in [a; b]$ tal que $G(x_o) = P(x_o)$ entonces $G(x) = P(x)$; $\forall x \in [a; b]$.

- **P** y **G** primitivas de **f** en [a; b] $\Rightarrow$ **G(x) – P(x) = k** ; $\forall x \in [a; b]$ **(Teo II-Pr)** luego, para $x_o \in [a; b]$ tenemos: $G(x_o) - P(x_o) = k$
- Por hipótesis: $G(x_o) = P(x_o) \Rightarrow G(x_o) - P(x_o) = 0 \Rightarrow k = 0$

Conclusión: **G(x) – P(x) = 0 ;** $\forall x \in [a; b] \Rightarrow$ **G(x) = P(x)**; $\forall x \in [a; b]$. (q.e.d)

• 4to ANÁLISIS:

Descubierto el hecho de que si existe una primitiva **P** de **f** entonces existen infinitas **(P + k)**, se nos plantea un problema en cuanto al recorrido al revés del circuito **ID**: la primitiva que hallamos por prueba y error , ¿será la que coincide con **F**, la función integral asociada a **f ?**

• Por definición de igualdad de funciones, sabemos que:

F = P $\Leftrightarrow$ **Dom P = Dom F = [a; b]** y **F(x) = P(x)** $\forall x \in [a; b]$.

PROBLEMA ENGORROSO: averiguar si **F = P** requiere calcular **F(x),** $\forall x \in [a;b]$ y este es justamente el problema que estamos tratando de resolver !!!: cómo calcular **F(x)** por un camino alternativo al de la definición de **F** ("limite de sumas") .

☞ Por definición podemos calcular **F** en único punto: **el extremo inferior de la integral** .

$$\text{Si } F(x) = \int_a^x f(t).\,dt,\ \forall x \in [a; b] \xrightarrow{\text{por def.}} F(a) = \int_a^a f(t).\,dt = 0.$$

Luego, para averiguar si **F= P,** **no podemos** usar la definición de igualdad de funciones.

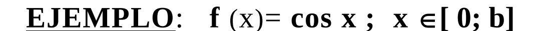
☞ Y aquí es donde el **Teorema III-Pr** nos rescata de esta engorrosa situación !!!
F y **P** son primitivas de **f** ; luego, y según este teorema, si existe $x_o \in [a; b]$ tal que $F(x_o) = P(x_o)$ entonces $F(x) = P(x)$; $\forall x \in [a; b]$. O sea, para decidir si **F** = **P** basta **comparar las funciones en un único punto**, **y esto sí lo podemos hacer!!!...**

Conclusiones: si f : [a; b] → R ; $F(x) = \int_a^x f(t).\,dt$; **P** primitiva elemental de **f .**

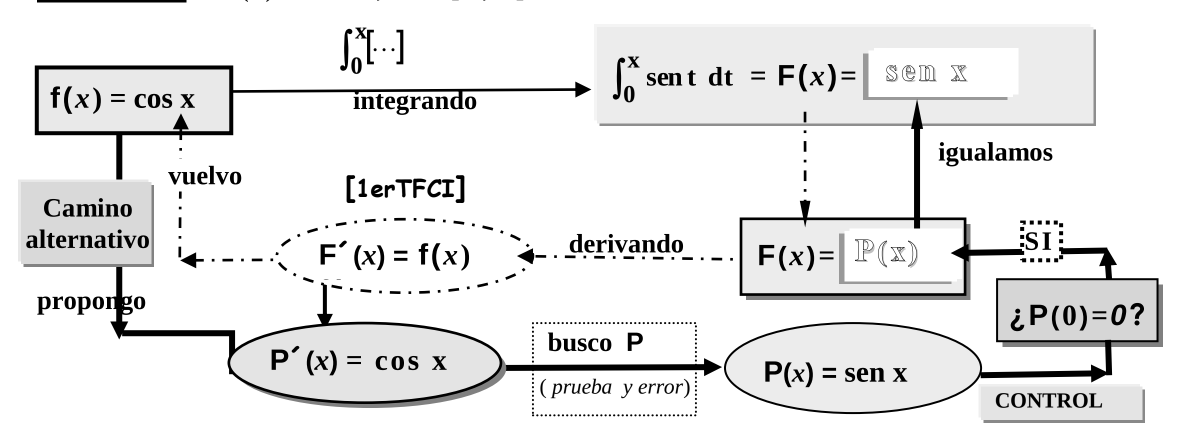
1) **P = F** $\Leftrightarrow$ **P(a) = F(a)** $\Leftrightarrow$ **P(a) = 0.**

2) Si en el circuito **ID** introducimos un CONTROL al efecto de determinar si **P = F,** tenemos "casi" resuelto el problema del calculo de integrales.

CONTROL
¿ P(a) = 0?
→ SI $\Rightarrow$ F = P $\Rightarrow$ $\int_a^x f(t).\,dt = P(x)$; $\forall x \in [a; b]$
→ NO $\Rightarrow$ P ≠ F $\Rightarrow$??????



EJEMPLO: **f** (x)= **cos x ;** **x** $\in$**[0; b]**

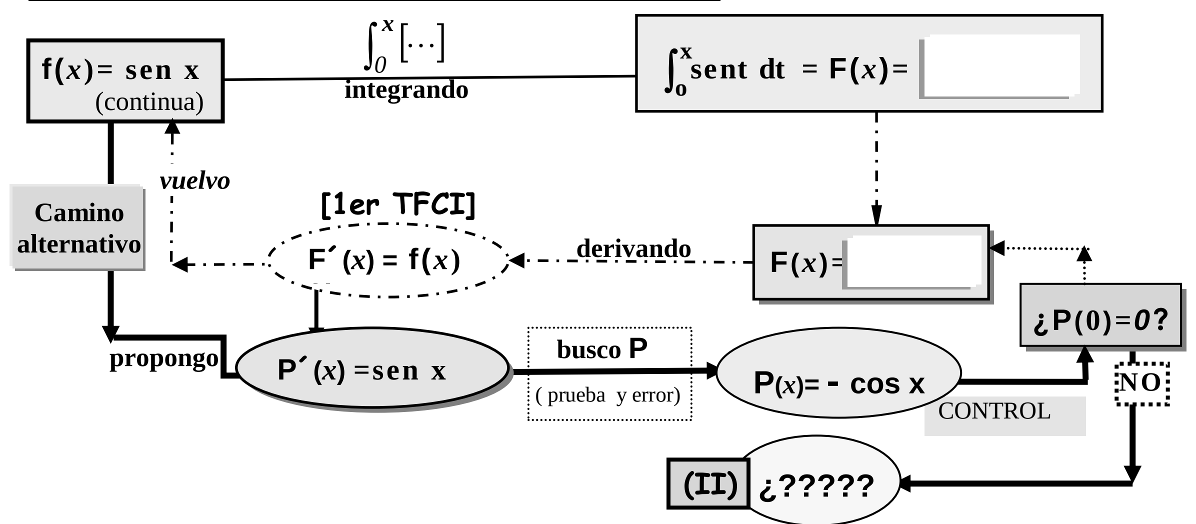


CONCLUSIÓN:

$\Rightarrow \int_0^x \cos t \, dt = \operatorname{sen} x$

- $x = \pi/2 \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$
- $x = \pi \rightarrow \int_0^{\pi} \cos t \, dt = \operatorname{sen} \pi = 0$
- $x = 2 \rightarrow \int_0^{2} \cos t \, dt = \operatorname{sen} 2$

….. exploramos el circuito ID para otra función



(II) ¿tenemos alternativa?: SI, proponer otra primitiva. ¿CUAL?

- Por **Teo I - Pr** → si existe **una primitiva** **(P)** entonces hay **infinitas** .
- Por **Teo II - Pr** → **dos primitivas difieren en una constante;**

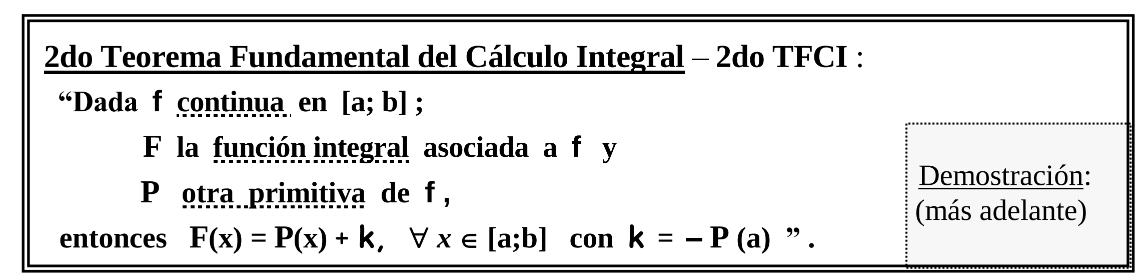
Luego; si **P** $\neq$ **F** ; buscamos **otra primitiva** **G,** tal que **F(x) = G(x)** **(G(x)= P(x) + k)**

Y tenemos así el:

Segundo interrogante fundamental: dada **F**(x) = $\int_a^x$ **f(t) dt** y **P** otra primitiva de **f** :

“ el k$\in$R tal que F(x) = P(x) + k , $\forall\, x \in$**[a; b], ¿se puede determinar fácilmente?”**

Al cual da respuesta el:



2do Teorema Fundamental del Cálculo Integral – **2do TFCI** :

"Dada f continua en [a; b] ;

F la función integral asociada a f y

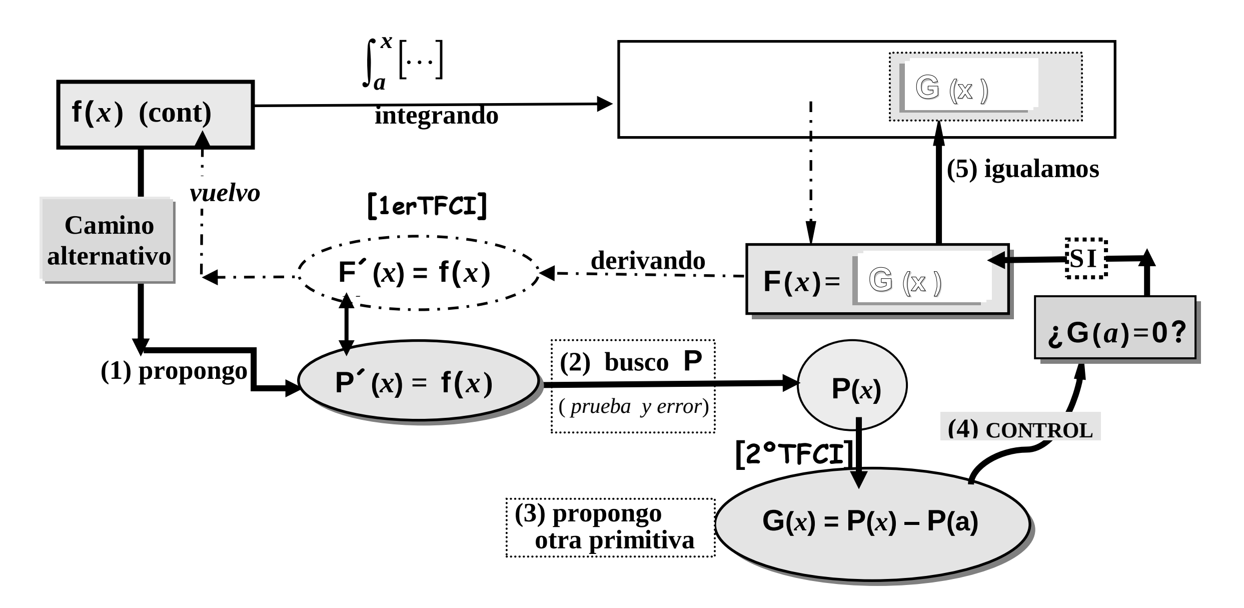
P otra primitiva de f ,

entonces F(x) = P(x) + k, ∀ $x \in$ [a;b] con k = – P (a) " .

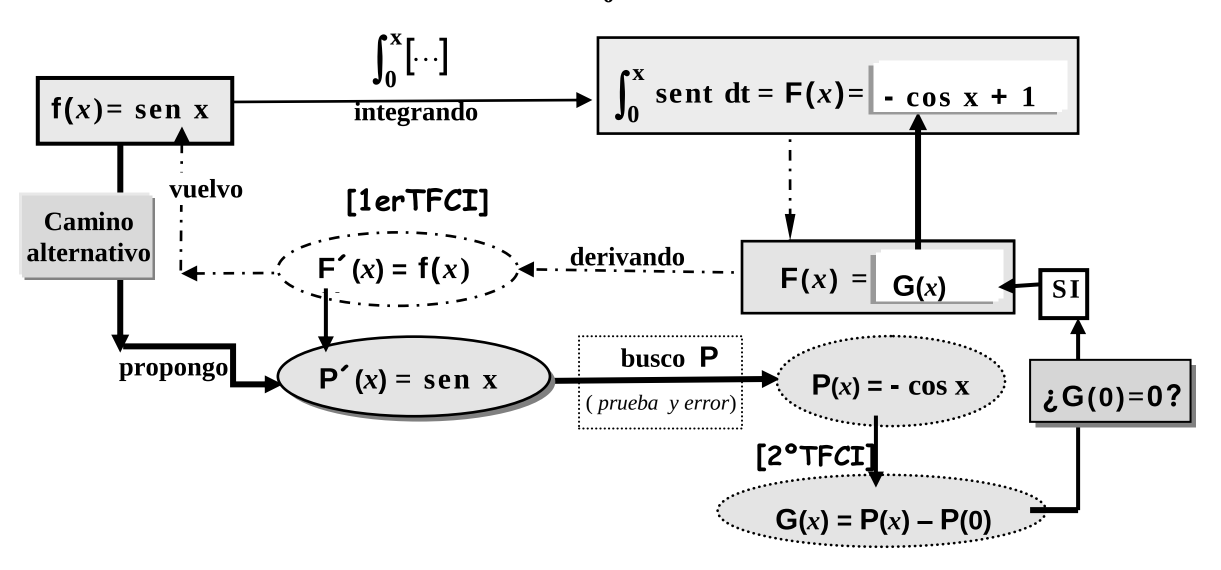
Demostración:
(más adelante)

Este teorema permite ajustar el circuito ID de modo que permita calcular integrales de funciones continuas, **f** , toda vez que **encontremos al menos una primitiva** $\mathbf{P_{(elem)}}$ de **f.**

CONCLUSIÓN: **f** continua en el intervalo y admite primitiva (*elem.*) el circuito queda:



Ejemplo: usemos el circuito para calcular $\int_0^x \mathbf{sent\ dt}$

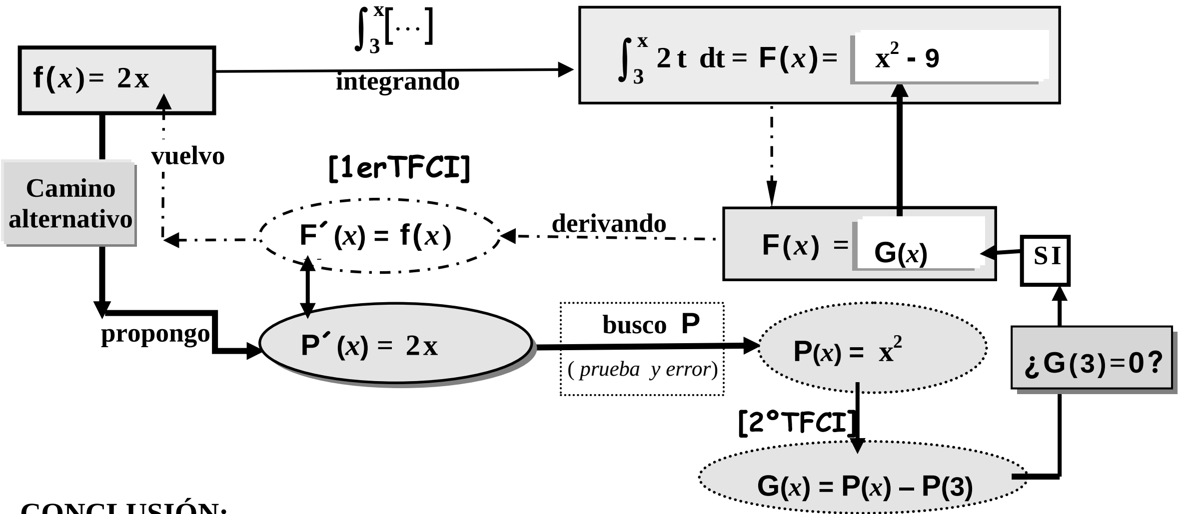


CONCLUSIÓN:

$\int_0^x \text{sent } dt = -\cos x + 1 \Rightarrow$

- $x = \pi/2 \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } t\, dt = -\cos(\pi/2) + 1 = 1$
- $x = \pi \rightarrow \int_0^{\pi} \text{sen } t\, dt = -\cos(\pi) + 1 = 2$
- $x = 2 \rightarrow \int_0^{2} \text{sen } t\, dt = -\cos(2) + 1$

Ejemplo: dada **f**(x) = **2x** , **D**f = **[3; 7]** usemos el circuito para calcular $\int_3^x f(t)\,dt$, $x \in [3; 7]$



CONCLUSIÓN:

$\int_3^x 2t\, dt = x^2 - 9 \Rightarrow$

- $\int_3^5 2t\, dt = 5^2 - 9 = 16$
- $\int_3^4 2t\, dt = 4^2 - 9 = 7$

⌧ Resumiendo el trabajo hecho tenemos un:

Proceso alternativo para el cálculo de $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$

1) Proponer $P'(x) = f(x)$

2) Hallar (*si existe*) **P**, una primitiva elemental de **f** .

3) Plantear todas las primitivas que difieren de **P** en una constante: $P(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

4) Hallar **k** de modo que $F(x) = P(x) + k$ → (2° TFCI) → $k = -P(a)$

5) Volver a $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$;

reemplazar **F** por la primitiva elemental obtenida en (4); concluir

una fórmula elemental para calcular la integral: $\int_a^x f(t)\,dt = P(x) - P(a)$.

En lo que sigue nos dedicamos a validar este proceso; o sea, a demostrar todas las cuestiones que hacen a la circulación del circuito ID tanto en forma *directa* como *al revés*.

5.11 Relación entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral

• En párrafos anteriores vimos los fundamentos del Cálculo Integral, su aparición como una rama independiente de la matemática la cual, entre otras cosas, resuelve el problema del cálculo del área de regiones de contornos curvos, permite determinar el "efecto total" o "acumulado" en un proceso de cambio con velocidad no constante.
• Vimos también la necesidad de buscar métodos alternativos al de la "definición de integral" para posibilitar el "cálculo de integrales"; como esta búsqueda contribuye tanto al hallazgo de importantes resultados teóricos como al descubrimiento de que el Cálculo Integral se podía trabajar como Cálculo Diferencial "al revés". La detección de este hecho tiene consecuencias prácticas transcendentes pues es el que finalmente permite hallar "métodos alternativos" para el "cálculo de integrales" .
• Cabe mencionar que aún cuando lo útil de este hecho en su momento (y aún hoy), el desarrollo de nuevas tecnologías y como consecuencia de ello de los "métodos numéricos", ha permitido volver la mirada al cálculo por definición de la integral. Y este hecho tiene su ventaja ya que permite abordar el cálculo de integrales de cualquier tipo de función, cosa que no siempre es posible con el Cálculo Integral pensado como Cálculo Diferencial "al revés".

☞ Una de las cuestiones que vimos al investigar el circuito ID, fue que variando el ***extremo superior*** de la integral generábamos una función, la ***función integral.***

Definición 1: (**FUNCIÓN INTEGRAL**)

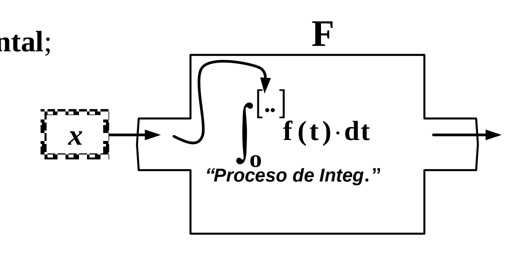
Dada **f** integrable en [a; b] llamamos **función integral** a la función **F** tal que:

➢ **Ley F:** $F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$

➢ **Dom.F = Dom. f = [a; b]**

Observaciones:

1.- Por definición, **F no es una función elemental**; su cálculo requiere el cálculo del "límite de sumas de Riemann"; o sea, una operación que trasciende los métodos del álgebra y que, salvo casos muy puntuales como el de **f** (x) = x^2, resulta imposible de realizar.



2.- Para ciertas funciones, bajo ciertas condiciones y trasladado el problema al contexto geométrico, pudimos calcular **F(x)** para algunos valores de x'_s y luego, por inducción, expresar la ley de **F** por una **fórmula "elemental"** .

Así, dada **f(x) = x** calculamos **F(x)** = $\int_0^{[x]} t\cdot dt$ para distintos valores de x'_s y concluimos,

$$x \rightarrow F(x) = \lim_{|P|\to 0} S(f, P_{[0;x]}, Q) = L = x^2/2 \rightarrow F(x) = x^2/2$$

Luego, derivamos **F ,** obtuvimos **F´(x) = f(x)**; o sea, descubrimos que la derivada de la función integral nos volvía a la función original. Este hecho crucial nos lleva al,

<u>Primer Interrogante Fundamental</u>: "cualquiera sea f , ¿siempre será F´ (*x*) = f (*x*) ? "

La respuesta a este interrogante la dio el **1er TFCI** , el que demostramos a continuación:

<u>1er TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL</u>.

Sea f continua en [a; b] y $\mathbf{F(x)} = \int_a^x f(t)\cdot dt$ la función integral que ella genera.

Entonces, **F** es derivable en [a; b] y $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a\,;b]$.

Demostración:

a) Dado $x_o \in (a\,;b)$ nos proponemos analizar la existencia de $F'(x_o)$.

$$F'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_o+h)-F(x_o)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\cdot dt - \int_a^{x_0} f(t)\cdot dt}{h} =$$

$$\underset{prop.(I_3)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x_0} f(t)\cdot dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\cdot dt - \int_a^{x_0} f(t)\cdot dt}{h} =$$

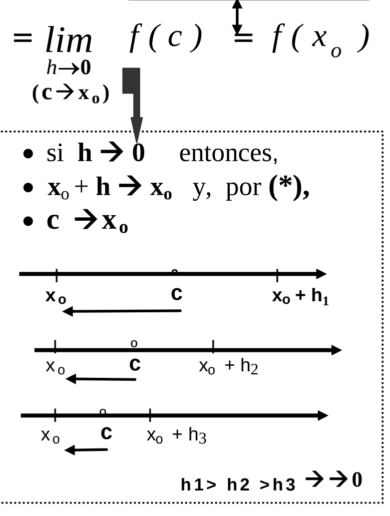
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\cdot dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c)\cdot h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\(c\to x_o)}} f(c) = f(x_o)$$

[*f* continua en x_o]

Por **TVMCI** (Teo. Valor Medio del Calc. Int.) existe $c \in [x_o;\, x_o+h]$ (*) (h > 0) (ó $[x_o+h\,;\, x_o]$) (h<0)

tal que:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\cdot dt = f(c).[(x_o+h)-x_o] = f(c).h$$



b) Si $x_o = a$ ó $x_o = b$.

La prueba es la misma sólo hay que tomar, $h \to 0^-$ ó $h\to 0^+$, según sea $x_o = a$ ó $x_o = b$.

Conclusión: como x_o es genérico hemos probado que: $F'(x) = f(x)$; $\forall\, x \in [a;\, b]$.

(q.e.d)

☞ Otra de las cuestiones que vimos fue que para recorrer el circuito **ID** "al revés" dada **f** debíamos buscar **P** tal que **P´ = f .** A esta **P** le dimos un nombre: **primitiva de f** .

Definición 2: (Primitiva ó antiderivada de una función)

P es una primitiva de f en [a; b] si y sólo si P´(x) = f (x) ; ∀x ∈ [a;b].

☞ Vimos también las siguientes propiedades de "primitivas" (pags. 366 -367):

Teorema I-Pr: Si **f** tiene una "primitiva" **P**, entonces tiene infinitas (**P +** ***k*** **,** ***k*****∈R**)

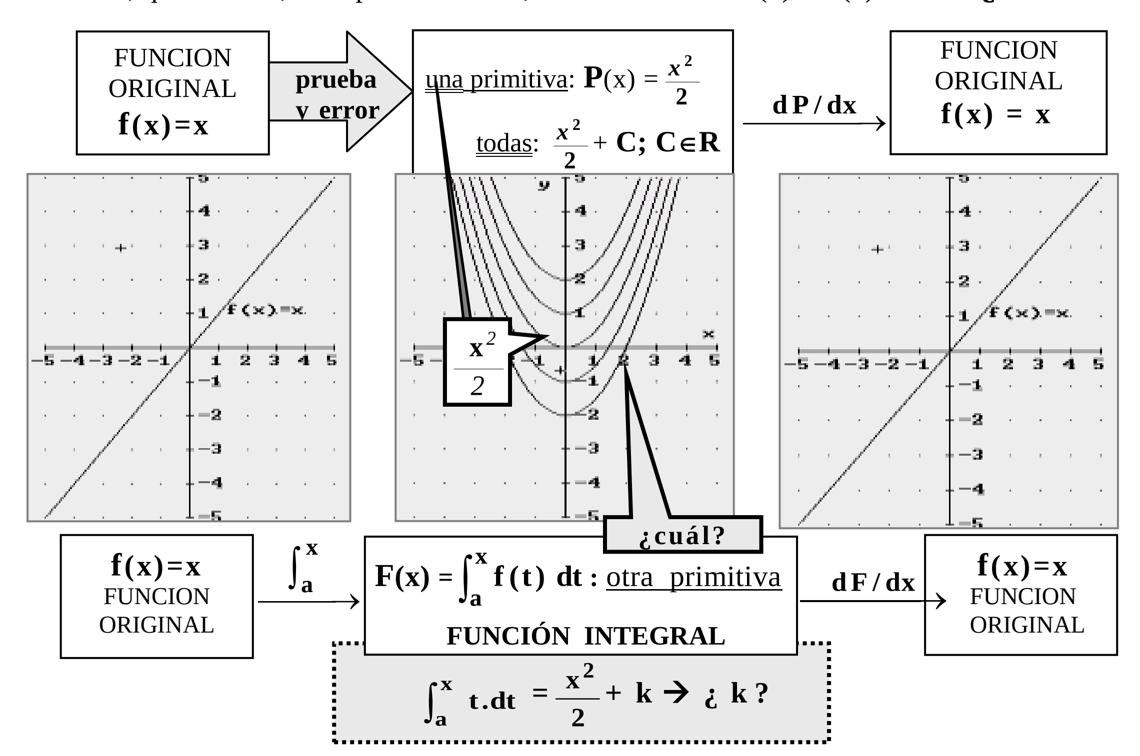
Teorema II-Pr: Dos primitivas de **f** difieren en una constante: **G (x) –P (x) = k**

Teorema III-Pr: Si **P** y **G** son dos primitivas de **f** en [a;b] y existe x_o **∈[a; b]** tal que **G**(x_o) **= P**(x_o) entonces **G**(x) **= P**(x) ; ∀ x ∈ **[a; b].**

De estas propiedades concluimos:

☞Por **1erTFCI**: **f** continua en **[a; b]** y F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ ⇒ **F´(x) = f (x) ,** ∀ x ∈ **[a; b]**.
O sea, **F**, **la función integral** , **es una** **primitiva** **de f en [a;b] .**

☞Por **Teo II-Pr** : dos primitivas de **f** difieren en una "constante".
O sea, que dada **P**, otra primitiva de **f** , existe **k∈R** / **F**(x) = **P**(x)+ **k** → **¿ k ?**



☞ Retomando el problema surge el **Segundo Interrogante Fundamental:**

"**dadas f continua en [a ; b] ; F(**x**) =** $\int_a^x f(t)\,dt$ y **P otra primitiva de f** ;

el valor de k tal que F(x**) = P(**x**) + k ,** ∀ x **∈[a ; b] , ¿ se puede hallar ? ".**

Interrogante que resuelve el **2ºTFCI.**

5.12 Relación entre función integral y primitiva

2do TEOREMA FUNDAMENTAL del CÁLCULO INTEGRAL - (2ºTFCI)

Hipótesis: Dadas: **f** función continua en [a ; b]
P primitiva cualquiera de **f** en [a ; b]
F función integral asociada a **f** : $\mathbf{F(x)} = \int_a^x \mathbf{f(t).dt}$;

Tesis: para cada $x \in [a ; b]$ se tiene que: **F(x) = P(x) – P(a)** ;

o sea que: $$\int_a^x f(t).dt = P(x) - P(a)$$

Demostración:

» Por hipótesis → **P** primitiva de **f** .
» Por **1ºTFCI** → **F** primitiva de **f** .
» Luego, por **teorema II Pr.**, **F** y **P** difieren en una constante → **F**(x) = **P**(x) + **C**
» O sea → $\int_a^x f(t).dt = P(x) + C \quad \forall x \in [a ; b] \quad (*)$
» Si $x = a$ → $\int_a^a f(t).dt = P(a) + C$
$0 = P(a) + C$ $\Rightarrow$ **C = - P(a)**
» Reemplazando en (*) → $\int_a^x f(t).dt = P(x) - P(a). \quad \forall x \in [a ; b]$ **(q.e.d)**

- **Corolario**: **REGLA de BARROW**

En el **2ºTFCI**; si **x =b** → $$\int_a^b f(t).dt = P(b) - P(a) = P(t)\Big|_a^b$$

- El **2ºTFCI** prueba que **k = - P**(a); o sea, resuelve el último interrogante planteado en relación al circuito ID a la vez que muestra que en el cálculo de la integral también interviene el extremo inferior de la integral (**a**) .

En el ejemplo de la pág. anterior: $\int_a^x t.dt = \frac{x^2}{2} + C$ →(2ºTFCI) $C = -\frac{a^2}{2}$

y finalmente: $\int_a^x t.dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. (ej: a=3 → $\int_3^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}$)

En definitiva, si por algún medio obtenemos una **primitiva elemental de f**, el cálculo de **la integral**, con la aplicación de la **Regla de Barrow**, se reduce a una **simple resta**. Con el hallazgo de esta regla hemos entonces concluido exitosamente (será así?) la búsqueda de un camino alternativo para el cálculo de la integral.

Ejemplo: $$\int_0^6 15.t^2\,dt = P(6) - P(0) \underset{(P(t)=5.t^3)}{=} 5.6^3 - 5.0^3 = 1080$$

¿Hemos resuelto *exitosamente* nuestro problema? ; ¿podemos, por ej., calcular $\int_1^{10} \ln x\, dx$?

Evidentemente resulta prácticamente imposible hallar **P,** primitiva de **f** (x)**= ln x**, por "prueba y error"; por ende, aplicar Barrow y calcular la integral. Vemos así que la aplicación de la potente regla que acabamos da hallar (la de Barrow) queda supeditada al hallazgo de al menos una primitiva elemental y que esto, salvo algunos casos simples, no es algo que se pueda hacer por "prueba y error" Surge así la necesidad de hallar "métodos" más eficaces para la búsqueda de primitivas. En el párrafo que sigue nos abocamos a esta cuestión e introducimos para ello un nuevo concepto el cual facilita el trabajo "metódico" que nos proponemos para esta instancia.

5.13 El concepto de "integral indefinida"

Vimos que si f admite una primitiva, admite infinitas**;** luego, tenemos un conjunto de primitivas.

Conjunto de Primitivas de f $= \{ P(x) + C \ / \ C \in \mathbb{R} \text{ y } P'(x) = f(x) \}$.

A este conjunto le damos un nombre y un símbolo al efecto de facilitar su obtención.

Definición (INTEGRAL INDEFINIDA)

Al **Conjunto de Primitivas de f**,

* lo llamamos: **Integral Indefinida** ,

* lo indicamos con el símbolo: $\int f(x)\, dx$.

O sea, $\int f(x)\, dx = P(x) + C$; **P** primitiva de f y $C \in \mathbb{R}$ (**C = cte de integración**)

5.13.1 Tabla De "*Integrales*"*(Primitivas)* Inmediatas

NOTAS:

1) El uso y costumbre ha impuesto el término "integral" para referirse a la "integral indefinida" de f . Esto sin dudas crea importantes confusiones pues el mismo término se usa para dos conceptos distintos: la *integral indefinida* (primitivas de f) y la *integral de* f en **[a; b]** ("límite de Sumas de Riemann de f en **[a; b]**). El dominio de ambos conceptos es indispensable entonces para usar este término en el modo y forma que corresponda según el contexto de trabajo.

2) El primer recurso del que disponemos para hallar "integrales indefinidas" ó "primitivas" es el de prueba y error. Con este método, y recurriendo a la tabla de derivadas, hallamos las primitivas de las funciones prototípicas básicas con las que construimos la Tabla de Integrales "inmediatas". El resto de las primitivas se encuentran a partir de esta tabla y con el recurso de "técnicas de integración" que se construyen apoyándose en las "técnicas de derivación".

• Integrales "inmediatas":

1) $\int x^{\alpha} . dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ ; \ \alpha \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x} . dx = \ln/x/ + C$

3) $\int sen.x \ .dx = -cos.x + C$

4) $\int cos.x \ .dx = sen.x + C$

5) $\int \frac{1}{\cos^2 x}.dx = tg(x) + C$

6) $\int e^x .dx = e^x + C$

7) $\int \frac{1}{1+x^2}.dx = arctg(x) + C$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = arcsen(x) + C$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = -arc.cos(x) + C$

5.13.2 Técnicas de "integración" ó de "búsqueda de primitiva":

Existen distintas técnicas que permiten buscar primitivas "con método". Veremos sólo algunas de ellas y, dado su carácter, las veremos directamente en la práctica. Los métodos que vamos a ver y usar son:

I) *método de integración por descomposición*

II) *método de integración por sustitución*

III) *método de integración por partes*

IV) *método de integración por desarrollo en fracciones simples*

5.13.3 Propiedades de la integral indefinida

II-1) Si f y g admiten primitivas en un intervalo **I** , entonces "$f \pm g$" también admite primitiva en **I** y vale: $\int \langle f(x) \pm g(x) \rangle.dx = \int f(x).dx \pm \int g(x).dx$

II-2) Si f admite primitiva en un intervalo **I**, $k \in \Re$; entonces " **k.** f " también admite primitiva en **I** y vale: $\int k.f(x).dx = k \cdot \int f(x).dx$

II-3) $(\int f(x).dx)' = f(x)$

Por definición: $\int f(x).dx = P(x) + C$ con $P'(x) = f(x)$;

entonces $(\int f(x).dx)' = (P(x) + C)' = P'(x) = f(x)$ **(q.e.d.)**

II-4) $\int f'(x).dx = f(x) + C$

Por definición: $\int f'(x).dx = P(x) + C$, con P primitiva de f .

Como $f(x)$ es obviamente una primitiva de $f'(x)$, entonces $P(x) = f(x)$. **(q.e.d.)**

5.13.4 Notas:

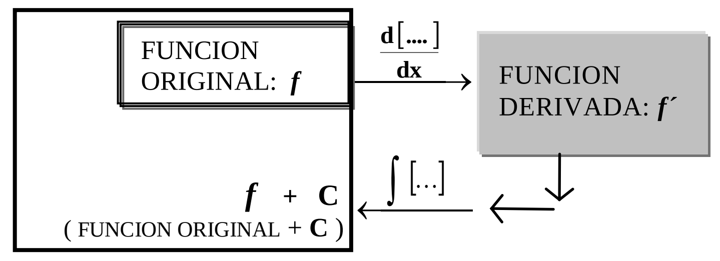
a) II-1 y II-2 se resumen en una sola condición, llamada propiedad de linealidad .

$$\int \langle k_1 . f(x) + k_2 . g(x) \rangle . dx = k_1 . \int f(x).dx + k_2 . \int g(x).dx$$

b) Cabe señalar que II-3 muestra que al aplicar los dos procesos uno a continuación del otro (integración y derivación) <u>*comenzando por el de " integración"*</u> volvemos a la función original.

Esto puede hacernos pensar que ambos procesos son "*inversos uno del otro*".

Sin embargo II-4 muestra que si hacemos lo mismo, pero <u>*comenzando por la derivación*</u> volvemos a "<u>*mucho más*</u>" que la función original pues, debido a la constante de integración, volvemos a un conjunto infinito de funciones (f + **C, C**$\in$**R**).



Luego, y en rigor, "integración" y "diferenciación" no son procesos inversos uno de otro. (aplicados uno a continuación del otro, no siempre se vuelve al punto de partida: al "integrar" una "derivada" recuperamos mucho más que la función original).

Y este hecho tiene consecuencias prácticas que vemos a continuación a través de un ejemplo**.**

Ejemplo: *Se comienza a llenar un tanque con agua que sale de una canilla a una velocidad* v(t) = **3** t^2 , [v] = lts./h.. *Si el tanque tiene* ***6 ls*** *al inicio, y una capacidad de* ***70 lts****.* ¿Cuánto tarda en llenarse ?

» <u>**Datos**</u>: *velocidad del proceso* → v(t) = **3** t^2
volumen inicial = **6** (ls) ; *capacidad del tanque:* **70** (ls)

» <u>**Incógnita**</u>: t_f = instante *final* ó instante en que el tanque se llena.

Si introducimos la variable **V =** ***volumen de agua en el tanque en cada instante t*** ;
* podemos reescribir la incógnita de manera más "*operativa*" → t_f / **V** (t_f) = **70**.
* descubrir la existencia de una *incógnita oculta*: **V** = ***V*(t)**, (función que rige el proceso)

» <u>**Resolución**</u>

El problema, reformulado según el análisis previo, queda:
"conocida v, *velocidad* a la que se desarrolla el proceso (v = V'),
hallar **V**=V(t), función que *rige el proceso*" ;

Concluimos así que el problema consiste en hallar la función de la que <u>***proviene***</u> v ; en definitiva, en hallar "***la primitiva de v".***

$v = 3t^2 \xrightarrow{\text{prueba y error}}$ **P**(t) = t^3 ; **P** primitiva cualquiera de v, **¿será** V **?** .

Por **Teor.II Pr.** : $V(t) = P(t) + C \Rightarrow V(t) = t^3 + C$ → **¿ *C* ?**

- Aquí apreciamos el rol de la cte de integración C, que es otra incógnita del problema y tan importante que si no hay algún dato que permita calcularla, ***no podemos resolver el problema.***

En este caso, tenemos ese dato: $V(0) = 6$.

Así : $V(t) = t^3 + C \Rightarrow V(0) = 0 + C \Rightarrow C = 6$.

Finalmente obtenemos V : $V(t) = t^3 + 6$

y hallamos t_f : $V(t) = 70 \Rightarrow t^3 + 6 = 70 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow$ el tanque tarda **4 hs**. en llenarse.

Observamos así que al derivar se *pierden* datos (se pierde V_o, lo que es consistente con la realidad pues la velocidad de entrada del agua *no depende* del volumen inicial). Y así, este hecho que por

un lado *valida el modelo*, por otro, ocasiona un problema a la hora de ***reconstruir V*** a partir de su derivada ***v.***



(*) *Obtenemos una **familia de funciones** entre las cuales **una** de entre todas ellas es la función de la que partimos. Para **rescatar** la de partida se hace necesario tener algún **dato adicional** para, a partir de él, determinar el valor de la constante y, por ende, la función original .*

En este punto resulta conveniente detenerse y reflexionar acerca de los conceptos vistos.

❶ ***Integral* e *Integral Indefinida son dos conceptos distintos.***

(*) ***La integral***, $\int_a^b \mathbf{f(x)\cdot dx}$, se calcula sobre un intervalo y su resultado es ***un número***.

(*) La integral indefinida, $\int \mathbf{f(x)dx}$, refiere al cálculo de primitivas de **f** y su resultado es un ***conjunto de funciones***: $\int \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{P}(x) + \mathbf{C} \quad / \quad \mathbf{P'}(x) = \mathbf{f}(x)$

(*) La conexión entre ellas se establece en el **2ºTFCI** (regla de Barrow).

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\cdot dx} = \mathbf{P(x)}\Big|_a^b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \mathbf{f(x)\cdot dx} = \left\langle \int \mathbf{f(t)\,dt} \right\rangle \Big|_a^b$$

❷ **La regla de Barrow**,
¿resuelve el problema del cálculo de la integral para toda función f ?

Ya hemos dicho que no, pues ***no siempre existe primitiva "elemental " de f .***
Resulta claro entonces que si no existe primitiva elemental, volvemos a foja cero ya que no podemos expresar la función integral a través de una "***fórmula elemental***", obviar así el cálculo del límite de sumas. Cabe aclarar que cuando decimos que no existe primitiva elemental, ello no obedece al hecho de que no se conoce un método para hallarla, sino a que tal método *no existe* por razones intrínsecas a la naturaleza misma de la función.

Ej: la función $\mathbf{f}(x)=\mathbf{e}^{x^2}$ no admite primitiva elemental; o sea, no exis**te** $\mathbf{P_{(elem.)}} \ / \ \mathbf{P'} = \mathbf{f}$

Luego, y por ej.; dada $\int_0^3 \mathbf{e}^{x^2}\,\mathbf{dx}$ no existe $\mathbf{P_{(elemental)}} \ / \int_0^3 \mathbf{e}^{x^2}\,\mathbf{dx} = \mathbf{P(3) - P(0)}$

→ **¿Implica esto que la** $\int_0^3 \mathbf{e}^{x^2}\,\mathbf{dx}$ **<u>no existe</u> ?.**

→ **No,** $\mathbf{f}(x) = \mathbf{e}^{x^2}$ es continua, por ende integrable. O sea, $\int_0^3 \mathbf{e}^{x^2}\,\mathbf{dx} = \mathbf{L} \in \mathbf{R}$.

Lo que <u>no existe</u> es un método sencillo para calcular **"L"**

Lo mismo pasa con otras funciones como por ejemplo: $\mathbf{sen\,(x^2)}$; $\frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{x}}$; $\frac{\mathbf{sen\,x}}{\mathbf{x}}$

¿Cómo evaluamos la integral en el caso que no existe primitiva elemental ?

En este caso no podemos dar el valor "*exacto*" de la integral pero podemos dar "*estimaciones*" del mismo tan buenas como queramos. Y podemos hacer esto de distintas formas:

- ***<u>Acudiendo a la definición de integral</u>***:

Por definición la integral es el "límite de Sumas de Riemann".
Si por alguna propiedad de la función integrando podemos asegurar que el límite existe sabemos entonces que las "Sumas de Riemann" se acercan tanto como quieran a dicho

valor. Luego, dichas sumas proporcionan un valioso instrumento para calcular valores "***aproximados***" de la integral; valores que serán tanto mejores cuanto mayor sea **"n"**, la cantidad de sumandos que se tomen.

$$\int_0^3 e^{x^2} dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} e^{c_i^2} \cdot \Delta x_i \quad \Rightarrow \quad \int_0^3 e^{x^2} dx \approx \sum_{i=1}^{n} e^{c_i^2} \cdot \Delta x_i$$

• ***<u>Aproximando la función por otra función "integrable" (polinomios de Taylor)</u>***

O sea, otra forma de obtener un valor aproximar de la integral es a partir de:

1) aproximar primero la función integrando **f** por un conveniente polinomio de Taylor ,

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{e^{x^2}} \xrightarrow{\text{pol.de.Taylor}} \mathbf{p_4(x) = 1 + x^2 + x^4 / 4}$$

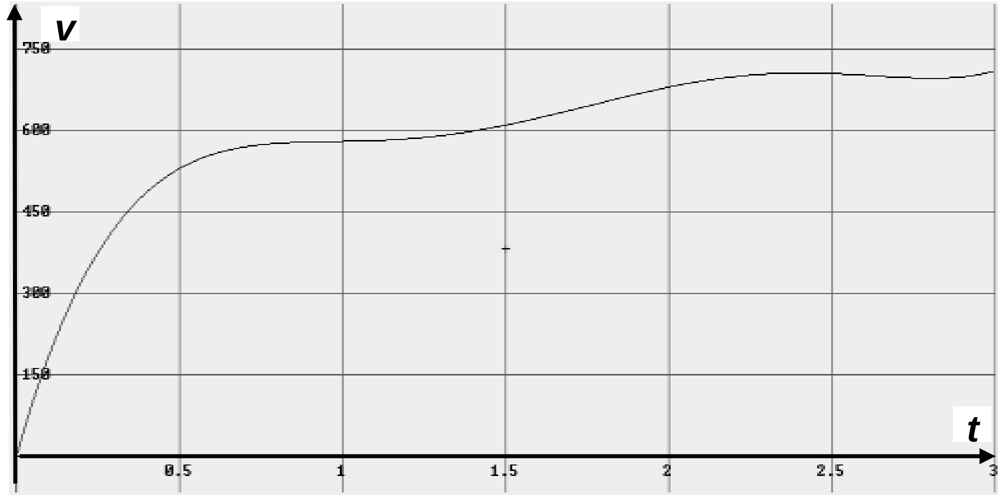
$$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + x^4 / 4$$

2) integrar luego el polinomio de Taylor .

$$\int_0^3 e^{x^2} dx \approx \int_0^3 \left(1 + x^2 + x^4 / 2\right) \cdot dx = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^3 = 36{,}3$$

❸ Evidentemente tampoco podremos utilizar la Regla de Barrow cuando la función integrando venga dada por un gráfico o una tabla de valores. En estos casos, lo único que podemos hacer es dar aproximaciones de la integral, y hacer esto a través de "*Sumas de Riemann*" convenientemente construidas a partir de los datos que se tengan.

Ejemplo:
La gráfica adjunta muestra el registro de la tasa de "disolución" (en mg/hs.) de un soluto en un solvente, durante las 3 primeras horas de puestos ambos en contacto.



Se pide: hallar una aproximación de la masa disuelta al cabo de las 3 hs .

→ **<u>función del proceso</u>**: ***m* = *masa de soluto disuelta al instante "t".***
m = m(t)

→ ***<u>dato</u> : gráf. v ; v = velocidad de disolución del soluto en el solvente.***
v = m´(t)

→ ***<u>incógnita:</u>*** **Δm** = ***"variación de masa"*** en el solvente, en 3 hs.
Δm = m(3) – m(0)

→ ***resolución:*** $\Delta m = \int_0^3 m'(t).dt$

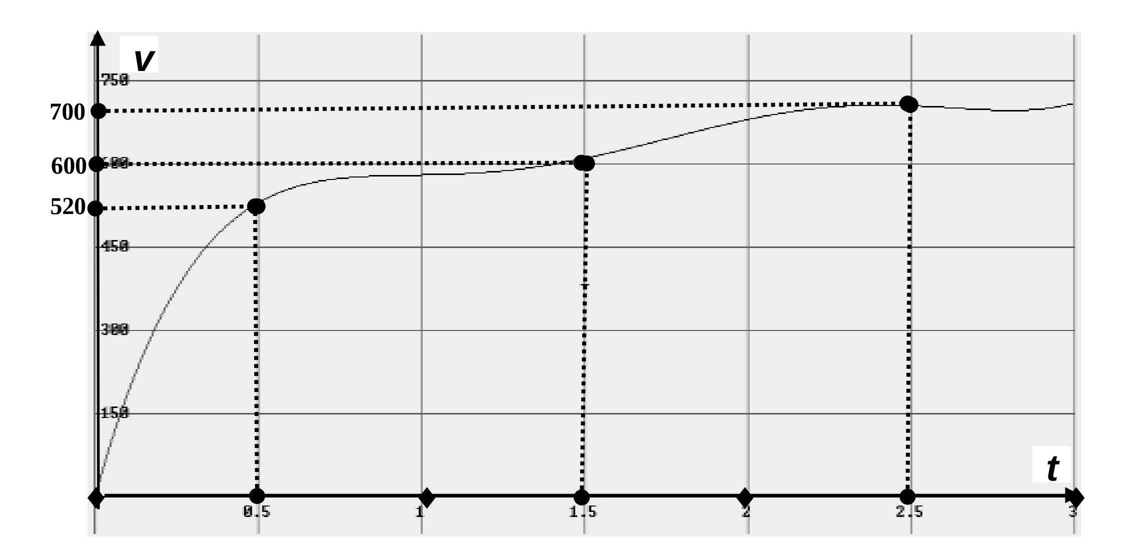
$$\Delta m = \int_0^3 v(t).dt \approx \sum_{i=1}^{3} v(c_i).\Delta t_i$$

- **Partición del [0;3]:** $\mathcal{P} = \{0 ; 1; 2; 3\}$; $\Delta t_i = 1$
- **Selección de puntos compatible con $\mathcal{P}$:** $Q = \{c_1 = 0.5 ; c_2 = 1.5; c_3 = 2.5\}$
- **Cálculo de la aproximación *TOTAL*:** $\sum_{i=1}^{3} v(c_i).\Delta t_i$

$$\sum_{i=1}^{3} v(c_i).\Delta t_i = \sum_{i=1}^{3} v(c_i) = v(0.5) + v(1.5) + v(2.5)$$

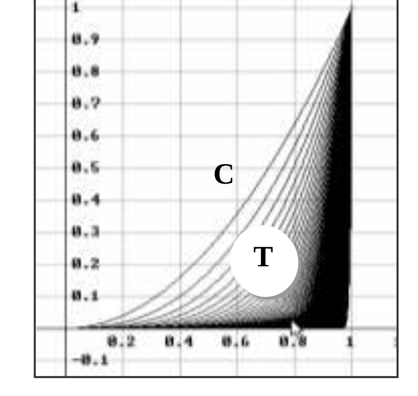
$$\approx 520 + 600 + 700 = 1820$$

→ **Rta:** la masa disuelta al cabo de las 3 hs es de, aproximadamente, **1820 mg.**



5.14 Apéndice

Cálculo, por el *método de exhausción*, del área de T, trapezoide determinado por $f(x) = x^2$ en $I = [0; 1]$.



1• Comenzamos calculando para $n = 4$.

2• Seguimos con $n = 8\,;\ 16\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots;$

3• Para cada n, tomamos: $\Delta x_i = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$, $\forall i$

4 • Construimos Sumas de Riemann (Inferior y Superior):

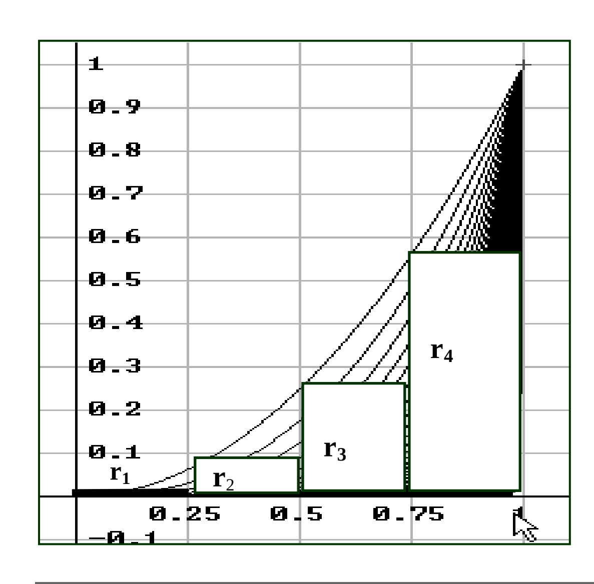
* **SR(*inf*)** $\rightarrow c_i \in I_i \ /\ f(c_i) = m_i =$ ***mínimo*** de f en I_i → altura del r_i

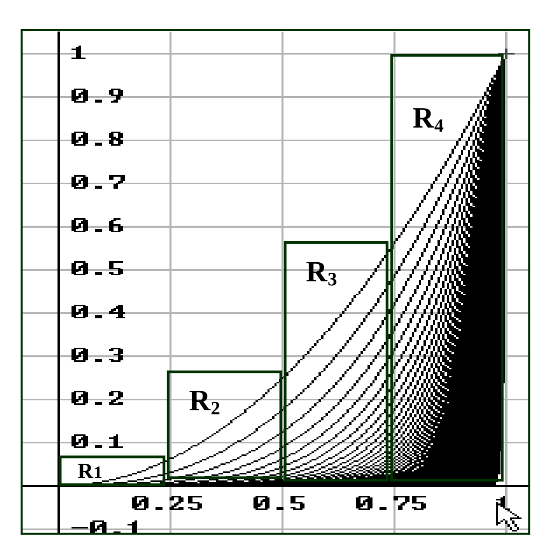
$$r_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} r_i \quad \text{(región escalonada inferior)}\ ; \quad a(r_i) = m_i \times \frac{1}{n}$$

* **SR(*sup*)** $\rightarrow c_i \in I_i \ /\ f(c_i) = M_i =$ ***máximo*** de f en I_i → altura del R_i

$$R_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \quad \text{(región escalonada superior)}\ ; \quad a(R_i) = M_i \times \frac{1}{n}$$

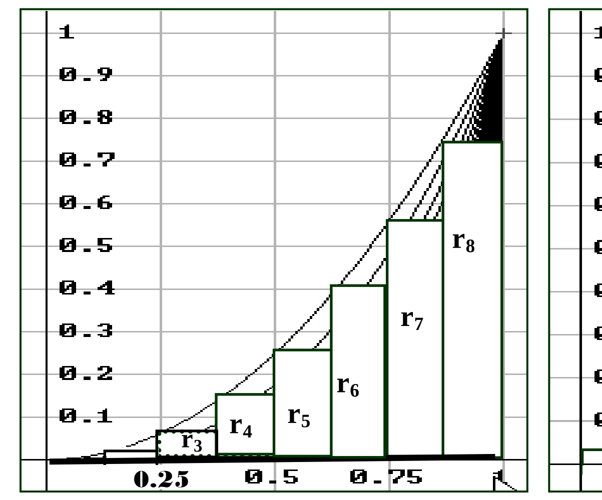
➢**[n=4]**→ **4Ii** ; $\Delta x_i = ¼$; $x_i = x_{i-1} + ¼$; $x_o \equiv 0$ $\Rightarrow$ $P = \{x_o \equiv 0;\ 1/4;\ 2/4;\ 3/4;\ x_4 \equiv 1\}$

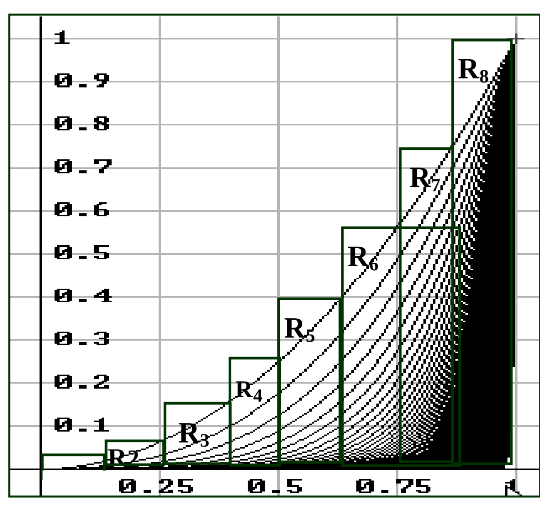




$r_{[4]}$ = región escalonada inferior	(n = 4)	$R_{[4]}$ = región escalonada superior
$a\ r_{[4]} = \sum_{i=1}^{4} a(r_i) = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot \frac{1}{4} = 0.22$		$a\ R_{[4]} = \sum_{i=1}^{4} a(R_i) = \sum_{i=1}^{4} M_i \cdot \frac{1}{4} = 0.47$

➢ $[n=8] \to 8\,\mathbf{I}i$; $\Delta x_i = 1/8 \Rightarrow x_i = x_{i-1} + 1/8 \Rightarrow P = \{x_o \equiv 0;\ 1/8;\ 2/8;\ 3/8; \ldots;\ x_8 \equiv 1\}$.





r $_{[8]}$ = región escalonada inferior ($n = 8$) **R** $_{[8]}$ = región escalonada superior

$a\ \mathbf{r}_{[8]} = \sum_{i=1}^{8} a(r_i) = 0.27$ $a\ \mathbf{R}_{[8]} = \sum_{i=1}^{8} a(R_i) = 0.39$

➢ En ambos casos (**n** = **4; 8**) *vemos* que: $r[n] \subseteq T \subseteq R[n]$

➢ que, si **T** fuera "medible" : $a\ r_{[n]} \le a(T) \le a\ R_{[n]}$.

➢ Vamos entonces al ***4to*** y ***5to paso*** del proceso; es decir, a ordenar el cálculo de modo que si existe algún "**patrón**" en la formación de los términos de la sucesión , este se haga "**visible**".

Repetimos el proceso tanto como sea necesario hasta hallar un *patrón* de formación

n	Δx_i	$ar[n] = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i \times \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} m_i \leq$	$a(T)$	$\leq aR[n] = \sum_{i=1}^{n}\left(M_i \times \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} M_i$
4	¼	¼ . $[(1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2]$ $(¼)^3.(1^2 + 2^2 + 3^2) = 0.22 \leq$	$a(T)$	¼ . $[(1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2 + (4/4)^2]$ $\leq 0.46 = (¼)^3.(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$
8	⅛	⅛ .$[(1/8)^2 + (2/8)^2 + ...+(7/8)^2]$ $(⅛)^3.(1^2+2^2 + 3^2+.....+7^2) = 0.27 \leq$	$a(T)$	⅛ .$[(1/8)^2 +(2/8)^2+.....+(7/8)^2 + (8/8)^2]$ $\leq 0.39 = (⅛)^3.(1^2 + 2^2 + ...+ 7^2 + 8^2)$
16	1/16	.... $\left(\frac{1}{16}\right)^3.(1^2 + 2^2 +......+ 15^2) = 0.30 \leq$	$a(T)$	.... $\leq 0.34 = \left(\frac{1}{16}\right)^3.(1^2+2^2 +.....+15^2+16^2)$
...	...	....	...	....
n	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{1}{n}\right).\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2 +......+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$ $\left(\frac{1}{n}\right)^3.(1^2 + 2^2 + 3^2+..... + (n-1)^2)$ $\left(\frac{1}{n}\right)^3.\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$ (*) $\leq$	$a(T)$	$\left(\frac{1}{n}\right).\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+......+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$ $\left(\frac{1}{n}\right)^3.(1^2 + 2^2 + 3^2 +..... + (n-1)^2+ n^2)$ $\leq \left(\frac{1}{n}\right)^3.\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ (*)

(*) resultado obtenido al aplicar la siguiente fórmula:
$$1^2 + 2^2 + 3^2 +..........+ k^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$$

- El trabajo realizado permite:

a) ***Expresar*** el área de cada región por medio de una ***"fórmula elemental"***:

* área región escalonada inferior → $a\,r_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3.\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$

* área región escalonada superior → $a\,R_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3.\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

b) ***Observar*** que se generan ***dos funciones***, $a(n) = a\,r_{[n]}$ y $A(n) = a\,R_{[n]}$; ambas con dominio en los naturales.

Al conjunto imagen de una función con dominio en **N**, se lo llama ***sucesión***; así, vemos que al variar ***n***, con $n \to +\infty$, se originan dos ***sucesiones:***

* la correspondiente a las áreas de las regiones escalonadas inferiores: $\{ a\, r_{[n]} \}_{n\in N}$

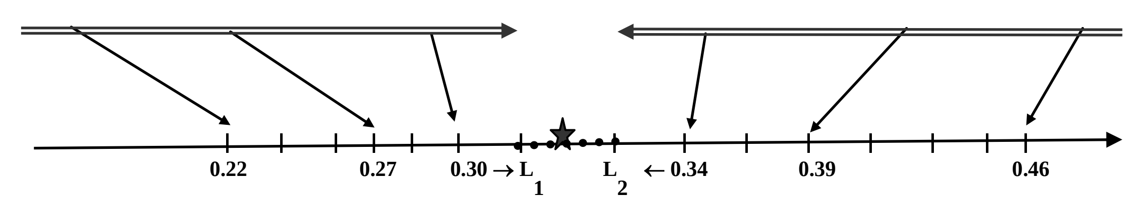
* la correspondiente a las áreas de las regiones escalonadas superiores: $\{a\, R_{[n]}\}_{n\in N}$

c) ***Comprobar*** que al afinarse la partición la sucesión dada por $\{ a\, r_{[n]} \}_{n\in N}$, ***crece***; mientras que la determinada por $\{ a\, R_{[n]} \}_{n\in N}$, ***decrece***.

Además, para todo n siempre resulta $a\, r_{[n]}$ menor que $a\, R_{[n]}$.

$$a\, r_{[4]} \leq \ldots\ldots \leq a\, r_{[8]} \leq \ldots\ldots \leq a\, r_{[16]} \leq \ldots\ldots \leq a\, R_{[16]} \leq \ldots\ldots \leq a\, R_{[8]} \leq \ldots\ldots \leq a\, R_{[4]}$$

0.22 ≤…..... ≤ 0.27 ≤…........ ≤ 0.30 ≤ .... ≤ 0.34 ≤ .... ≤ 0.39 ≤ .... ≤ 0.46



Observaciones:

Se puede probar que $a\, r_{[n]}$ está ***acotada superiormente*** y que $a\, R_{[n]}$ está ***acotada inferiormente***; que esto implica (según un resultado básico del Cálculo) que ambas tienen límite para $n \to \infty$ Así:

- para $n \to \infty$; $a\, r_{[n]} \to L_1$
- para $n \to \infty$; $a\, R_{[n]} \to L_2$

Luego:

si $L_1 = L_2 = L \Rightarrow$	T es medible y $a(T) = L$
si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$	T no es medible, no existe $a(T)$

En el ejemplo tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} a\, r_{[n]} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} \right] = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a\, R_{[n]} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \right] = \frac{1}{3}$$

O sea, $L_1 = L_2 = \frac{1}{3}$.

Conclusión: **T** es medible y $a(T) = \frac{1}{3}$

5.15 Ejercicios

	▶ ***Dom**. f* = **I** tal que **I** =[***a*** **;** ***b***] ▶ $\mathcal{P}$ → partición de **I;** $\mathcal{P}$ = { $x_0 \equiv$ ***a***; x_1; x_2 ; x_3 ; .....; x_i ;.....; $x_n \equiv$ ***b***} ▶ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ → amplitud del subintervalo $I_i = [\, x_{i-1} ; x_i \,]$. ▶ c_i → punto del subintervalo I_i ▶ ***Q*** → selección de ptos compatibles con $\mathcal{P}$; ***Q*** = {c_1; c_2; c_3; .....; c_i ;.....; c_n } ▶ $S(f ; \mathcal{P} ; Q)$ → **SUMA de RIEMANN** ; $S(f ; \mathcal{P} ; Q) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$
INTEGRAL *(de una función en un intervalo)*	***Definición***: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lvert \mathcal{P} \rvert \to 0} S(f ; \mathcal{P} ; Q)$ (cuando el límite existe)

1) Para la función ***f*** *(graf)* adjunta se pide:

a) dadas $\mathcal{P}$ y ***Q*** en **I** = [**0** ; **3**] ;

$\mathcal{P}$ = { **0** ; *1* ; *2* ; **3** }

Q = { ½ ; 3/2 ; 5/2 }.

controlar que ***Q*** sea compatible con $\mathcal{P}$

y, leyendo del graf., calcular $S(f; \mathcal{P} ; Q)$.

Indicar que representa el valor obtenido.

b) dar una aproximación por defecto

de $I = \int_0^3 f(x)\,dx$, tomando **n =6** .

Sug*: tomar c_i tal que $f(c_i) \approx$ **min *f en* I_i*

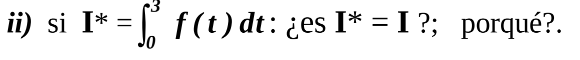
c) dar una aproximación por exceso

de $I = \int_0^3 f(x)\,dx$, tomando **n =6**

Sug*: tomar c_i tal que $f(c_i) \approx$ **máx *f en* I_i*

d) para $I = \int_0^3 f(x)\,dx$;

i) dar una cota inferior y otra superior de **I**.



ii) si $I^* = \int_0^3 f(t)\,dt$: ¿es **I*** = **I** ?; porqué?.

iii) si $I^{**} = \int_0^3 f(t)\,dx$: ¿es **I**** = **I** ?; porqué?. (*Sug*: calcular **I**** aplicando prop_S de integ_S)

e) En el proceso de llenado/vaciado de un tanque indicamos con ***V*** al *volumen de agua en el tanque* y con ***v***, a la *velocidad de variación de* ***V*** *en el tanque*. ([t]= hs ; [***V***]= ls. ; [***v***] = ls./h).

Si ***V*** = **V**(t), V_o =10 y ***v*** = $f_{(graf)}$, entonces :

i) $f_{(graf)}$, ¿es el gráfico de **V**´(t)?; **V**, ¿es una primitiva de ***v*** ?, porqué?.

ii) ¿ $\Delta V_{(3\ hs)}$ = **V(3) – V(0)**?. Aquí, ¿se puede calcular $\Delta V_{(3)}$ con esta diferencia?; porqué**?**

iii) Dar una estimación del "*resultado* ó *efecto total*" del proceso de cambio dentro del tanque al cabo de 3 horas de haberse iniciado el mismo.

iv) Si me informan que $\int_0^3 f(t)\,dt = -2{,}25$, ¿puedo calcular **V(3)**? **,** ¿es **V(3) =** ***7,75*** ?

f) En el *proceso* relativo al movimiento de una partícula P sobre una recta, indicamos con

x = posición de P sobre la recta y v = velocidad de P. ([x]= ms., [t]= hs.)

Si $x = \mathbf{x}(t)$, $x_0 = 1$ y $v = f_{(graf)}$, entonces :

i) $f_{(graf)}$, ¿es el gráfico de $\mathbf{x}'(t)$? ; **x** , ¿es una primitiva de v ?, porqué?.

ii) ¿$\Delta \mathbf{x}_{(3\ hs)} = \mathbf{x}(3) - \mathbf{x}(0)$?. Aquí, ¿se puede calcular $\Delta \mathbf{x}_{(3)}$ con esta diferencia?; porqué? **.**

iii) dar una estimación del "*desplazamiento total de P* " al cabo de 3 horas de haberse iniciado el movimiento.

iv) si me informan que $\int_0^3 f(t)\,dt = -2{,}25$ **;** ¿puedo calcular **x(3)**?, ¿es **x(3) = - 1,25**?

v) Realizar un bosquejo de la trayectoria de P durante las 3 primeras horas de movimiento.

g) Si me informan que $\mathbf{P}(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - 9\frac{t^2}{2} + 9t$ es una primitiva de $f_{(graf)}$, explicar porque este dato permite: i) dar la ley de $f_{(graf)}$ por medio una fórmula. Obtenerla.

ii) calcular con exactitud el valor de $\mathbf{I} = \int_0^3 f(t)\,dt$. Calcularlo.

iii) dar la ley de **V** (t) por una fórmula. Darla.

iv) dar la ley de **x** (t) por una fórmula. Darla.

Primitiva *(de una función en un intervalo)*	***Definición*:** dada f definida en $\mathbf{I} = [a\ ;\ b]$; **P** es una primitiva de f en **I** ⇔ $\mathbf{P}'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{I}$. ***Las primitiva son*** → ***una herramienta para el cálculo de integrales***. dada f continua en **I**, si f admite primitiva elemental **P** en **I** , entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \mathbf{P}(b) - \mathbf{P}(a)$ (Regla de Barrow). ***Las primitiva son*** → ***una herramienta para el cálculo del resultado o efecto total de un proceso de cambio a v ≠ cte*** $f = P' \rightarrow \int_a^b P'(x).dx = \mathbf{P}(b) - \mathbf{P}(a) = \Delta \mathbf{P}_{[a;\ b]}$

2) **a)** Cada una de las funciones "g" de la columna **(II)** es "*primitiva*" de alguna función "h"
de la columna **(I)**. Se pide unir cada función de la columna **(I)** con su primitiva.

(I)	(II)
1) h (x) = $3\,sen\,x - \frac{\cos x}{2}$	**a)** g (x) = $4\,e^{2x}$
2) h (x) = ½ + sen x . cos x	**b)** g(x) = **-** (3 cos x +1/2 sen x)
3) h (x) = $\frac{x-2}{x-3}$	**c)** g (x) = ln(x-3) – ln (x-2) + 5
4) h (x) = $8\,e^{2x}$	**d)** g (x) = 3 sen x + 1/2 cos x
5) h (x) = $\frac{1}{x^2-5x+6}$	**e)** g(x) = ½ .x - ¼ .cos (2x) + 3
6) h (x) = $3\cos x - \frac{sen\,x}{2}$	**f)** g(x) = ln (x-3) + x + π

b) En cada caso que esto sea posible, calcular $\int_0^{\pi} h(x)\,dx$ aplicando la Regla de Barrow .

* Conocer o saber obtener ***primitivas*** de una función ***f*** continua en un intervalo **I =** [a;b], permite
transformar el cálculo de ***la integral***, $\int_a^b f(x)\,dx$, en una simple resta (regla de Barrow).

En lo que sigue, y dado la utilidad de esta herramienta, trabajamos sobre el concepto de "primitiva"

3) Verificar por el método más simple las siguientes afirmaciones. Dar luego tres primitivas de ***f*** .

a) **P**(x) = ½ .x - ¼ .sen (2x) + 3 es una primitiva de ***f*** (x) = $sen^2\,x$, en todo **I**

b) **P**(x) = ln ($1 + \frac{1}{2-x}$) es una primitiva de ***f*** (x) = $\frac{1}{x^2-5x+6}$, en todo **I** tal que 2 ; 3 $\notin$ **I**.

c) **P**(x) = ln |x| es una primitiva de ***f*** (x) = $\frac{1}{x}$; en todo **I** tal que **0** $\notin$ **I**.

d) **P**(x) = $\frac{1}{a}\,arctg\,(\frac{x}{a})$ es una primitiva de ***f*** (x) = $\frac{1}{a^2+x^2}$, en todo **I** y $\forall\, a \neq 0$.

e) **P**(x) = $\frac{a^2}{2}\,arcsen\,(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}(x\,.\sqrt{a^2-x^2})$ es una primitiva de ***f*** (x) = $\sqrt{a^2-x^2}$,
$\forall\, a \neq 0$ y para todo **I** $\subseteq$ [-|*a*| ; |*a*|]

4) Hallar por prueba y error la primitiva **F** de ***f*** que satisface la condición que se indica. Verificar.

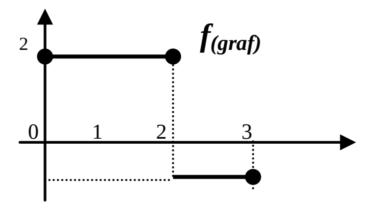
a) ***f*** (x) = $5\,x^4 - 3\,x^2$; **F**(0) = 4

b) $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$; **F**(1) = 0

c) $f(t) = e^t + \text{sen } t$; **F**(0) = -2

d) $f = f_{(graf)}$ adjunta ; **F**(0) = 1

F continua en [0; 3].



5) Hallar por prueba y error ***g*** si se sabe que:

a) $g'(x) = ½ \sqrt{x} \cdot x^{-1}$; $g(4) = 5$

b) $g'(x) = 1/x$; $x < 0$; $g(-1) = 5$

c) $g'(x) = x^2 + x + \frac{1}{6}$; $g(1) = 1$

d) $g''(x) = 2x + 1$; $g'(0) = \frac{1}{6}$ y $g(1) = 0$

e) $x = g(t)$ y ***g*** es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta con *aceleración constante*, $a = 5$ (m/seg²), velocidad inicial v_o y posición inicial x_o .

f) $x = g(t)$ y ***g*** es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta con

aceleración $a = t + 5$ (m/seg²), velocidad inicial $v_o = -6$ (m/seg) y posición inicial $x_o = 9$ (ms.)

* *CÁLCULO de PRIMITIVAS de f* → *P / P´= f*

En lo que sigue procedemos a sistematizar el cálculo de primitivas. Para ello vamos a:

1º) Construir una tabla de primitivas "inmediatas" (aquellas que se obtienen por "prueba y error")

2º) Estudiar métodos para obtener primitivas, cuando las mismas no sean "inmediatas". Estos son:

I) *Descomposición*

II) *Sustitución:* (II-a) Directa; (II-b) Inversa.

III) *Integración por Partes*

IV) *Descomposición en Fracciones Simples*

INTEGRAL "*Indefinida*".	***Definición*:** $\int f(x)\,dx = P(x) + C \quad / C \in \mathbb{R}$, **P** primitiva de ***f*** . (o sea, *símbolo* usado para indicar *todas* las *primitivas* de ***f***)

TABLA de INTEGRALES INDEFINIDAS "Inmediatas"

* Completar la siguiente "tabla" procediendo por "prueba y error":

$f(x)$	P(x)	$\int f(x)\,dx = P(x) + C$
1	(x)	$\int dx = x + C$
x^{α} ; $\alpha \neq -1$		
$\frac{1}{x}$		
e^{x}		
a^{x} (a >0)		
sen x		
cos x		
$\frac{1}{\cos^2 x}$		
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\frac{1}{1+x^2}$	(arc tg x)	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ = arc tg x + C

Método I : ***Descomposición*** → $\int [a.f(x) + b.g(x)]\,dx = a\int f(x).dx + b\int g(x).dx$

3) Resolver usando el método de descomposición y la tabla de integrales inmediatas.

a) $\int (5x^4 + 12x^2)\,dx$

b) $\int \left[(x-2)^2 + 4x - 3\right].dx$

c) $\int \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2}.dx$

d) $\int \left[\sqrt[5]{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right].dx$

e) $\int \sqrt{x}.(x - \sqrt{x} + 1).dx$

f) $\int (3 \text{ sen } x - \frac{\cos x}{2}).\,dx$

g) $\int \frac{3x.sen^2 x - (1 - \cos^2 x)}{sen^2 x}.dx$

i) $\int (1 + tg^2 x)\,dx$

j) $\int \frac{(1 - \cos x).(1 + \cos x)}{senx}.dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3.e^x + 2.x + e}{x^3}.dx$

l) $\int e^x (1 + 2\,e^{-x})\,.dx$

m) $\int \frac{x^2 + t^2}{x^2}.dx$

n) $\int \frac{x^2 + t^2}{x^2}.dt$

o) $\int \frac{sen\,x}{x}.\left(x + \frac{t.x}{sen\,x}\right).dx$

Método II : *Sustitución*

II-a) ***Directa:***

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx \underbrace{=}_{\substack{g(x)=u \\ g'(x)dx=du}} \int f(u)\,du \underbrace{=}_{\substack{P \text{ tal que} \\ P'(u)=f(u)}} P(u)+C = P(g(x))+C$$

Calcular :

1) *a)* $\int \frac{1}{x+3}\,dx$ *b)* $\int \frac{1}{x-5}\,dx$

2) *a)* $\int \frac{1}{2x+3}\,dx$ *b)* $\int \frac{1}{-4x-5}\,dx$

3) *a)* $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1}\,dx$ *b)* $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x}\,dx$

4) *a)* $\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\,dx$ *b)* $\int \frac{1}{25+x^2}\,dx$

5) *a)* $\int 2.e^{2.x+3}\,dx$ *b)* $\int -5.e^{1-5x}\,.dx$

6) *a)* $\int e^{sen.x}\cos x\,dx$ *b)* $\int e^{x^2+3}.2x\,.dx$

7) *a)* $\int \cos(x^3).3x^2\,dx$ *b)* $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}.dx$

8) *a)* $\int (x^2+3x)^5(2x+3)\,dx$ *b)* $\int \frac{(\ln x)^2}{x}.dx$

9) *a)* $\int \frac{5.x^4+12x^3}{x^5+3x^4-5}.dx$ *b)* $\int \frac{1}{x.\ln x}.dx$

Tabla Integrales "Semi-Inmediatas"
$\int \frac{1}{x+b}\,dx =$
$\int \frac{1}{ax+b}\,dx =$
p : polinomio $\int \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx =$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx =$
$\int e^{m.x+h}.dx =$
$\int e^{g(x)}.g'(x).dx =$
$\int \cos(g(x)).g'(x).dx =$
$\int (g(x))^{\alpha}.g'(x).dx =$
$\int \frac{g'(x)}{g(x)}.dx =$

5) **A)** Calcular usando el método de sustitución directa o tablas de integrales *(inmed.* ó *semi-inmediata)*. Verificar los resultados obtenidos mediante derivación.

a) $\int (x^2+6x-2)^{20}(x+3)\,dx$

b) $\int (2x-4)^{-5}\,dx$

c) $\int e^{-5x}.dx$

d) $\int e^{x^3}.x^2\,.dx$

e) $\int x\,e^{1-5x^2}\,.dx$

h) $\int \frac{e^x}{1+e^x}.dx$

i) $\int \frac{x^5+4x^3+x}{x^6+6x^4+3x^2+2}.dx$

j) $\int \cos^2 x\ \ sen\,x\,dx$

k) $\int \cos^3 x\,dx$

l) $\int \frac{1-\ln x}{x.\ln x}.dx$

f) $\int \cos x \ \ sen\ x\ dx$ **m)**

$\int [\cos(2x) + x.\cos(x^2). + \cos(x-2)]dx$

g) $\int \sqrt{9-3x}\ dx$ **n)** $\int sen^2 x\ dx$ (aplicar: $sen^2 x$ = 2 - 2

cos(2x))

B) Para las f del item **(A)** calcular $\int_0^{\pi} f(x).dx$ aplicando la *Regla de Barrow*, en cada caso que ello sea posible.

C) El "método de sustitución" consiste esencialmente en un "cambio de variable". Así, para calcular una ***integral*** (*´definida´*) con este método, no es necesario *volver* a la variable original. Verificar la validez de la siguiente fórmula para el cambio de variable en la ***integral*** (*´definida´*) suponiendo que se conoce ***P ,*** una primitiva de ***f*** .

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x).dx \underbrace{=}_{g(x)=u} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u).du = P(g(b)) - P(g(a)).$$

* Calcular de esta forma: $\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{sen\ x\ \ \cos x.dx}$; $\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{sen(2x-\pi).dx}$;

$\int_0^{\pi/2} \frac{\boldsymbol{\cos u}}{\boldsymbol{sen^2 u - 4\,sen\ u + 4}}\boldsymbol{.du}$; $\int_0^1 \frac{\boldsymbol{x^5 + 4x^3 + x}}{\boldsymbol{x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 2}}\boldsymbol{.dx}$ **.**

D) Verificar que las siguientes integrales ***no se pueden calcular*** por ***sustitución directa*** .

$\int \sqrt{4-x^2}\ \boldsymbol{dx}$; $\int \frac{1}{x^2-1}\boldsymbol{.dx}$; $\int \frac{\boldsymbol{sen\ x}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{.dx}$; $\int \boldsymbol{e^{x^2}\,dx}$

Método II: *Sustitución*

II-b) ***Inversa:***

$$\int f(x).dx \underbrace{=}_{\substack{x=k(t)\\ dx=k'(t)dt}} \int f(k(t))k'(t)dt \underbrace{=}_{\substack{P\ tal\ que\\ P'=(f\circ k).k'}} P(t)+C=P(k^{-1}(x))+C$$

* *¿Qué condiciones deben darse para poder realizar una "sustitución inversa" ?.*

6) A) Establecer un intervalo donde la integral indicada exista. Calcular luego la integral usando
el método de sustitución inversa. Verificar los resultados obtenidos mediante derivación.

a) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$; $x = 2$ sen t (dato : $\int \cos^2 t\, .\, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4}\, .\, \text{sen}(2t)$)

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, .\, dx$; $x =$ sen t

c) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, .\, dx$; $x = 3$ sen t

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.dx$; $x =$ sen t (dato : $\int \text{sen}^2 t\, .\, dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4}\, .\, \text{sen}(2t)$)

B) En este caso tampoco es necesario *volver* a la variable original para calcular la integral (´*definida*´) aplicando Barrow ya que, supuesto que se conoce ***P ,*** una primitiva de ($f_o\, k$). k' vale la siguiente fórmula para el cambio de variable por sust. inversa ($x = k(t)$)

$$\int_a^b f(x).dx \underbrace{=}_{\substack{x=k(t)\\ \to\ t=k^{-1}(x)\\ c=k^{-1}(a)\\ d=k^{-1}(b)}} \int_c^d f(k(t)).k'(t).dt = P(d)-P(c).$$

* Calcular de esta forma: $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,.dx$; $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx$; $\int_{-0,5}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

* Justificar la siguiente igualdad con un argumento "geométrico":

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = 2.\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

C) Verificar que las siguientes integrales ***no se pueden calcular*** por ***sustitución*** (ni directa ,
ni inversa):

$\int x\ \text{sen}\ x\ dx$; $\int \frac{1}{x^2-1}.dx$; $\int \frac{\text{sen}\ x}{x}.dx$; $\int e^{x^2} dx$

<u>Método III</u> : ***<u>Integración por Partes</u>*** $\int u.dv = u.v - \int v.du$

8) **A)** Calcular usando el método de descomposición y la tabla de integrales inmediatas ó semi-inmed.

Verificar los resultados obtenidos mediante derivación

a) $\int x\, e^{x}\, dx$

b) $\int x^2 e^{x}\, dx$

c) $\int x\, e^{2x}\, dx$

d) $\int x .\text{sen}\, x\, dx$

e) $\int x^2 .\cos x\, dx$

f) $\int x .\cos^3 x\, dx$

g) $\int e^x \text{sen}\, x\, dx$

h) $\int x. \sqrt{x+4}\, dx$

p) $\int \cos^2 x\, dx$

q) $\int \text{sen}^2 (x-1)\, dx$

r) $\int \cos(\ln x)\, dx$

s) $\int \ln x\, dx$

t) $\int x. \ln^2 x\, dx$

u) $\int x^2. \ln x\, dx$

v) $\int \text{arcsen}\, x\, dx$

w) $\int x . \text{arctg}\, x\, dx$

x) $\int \sqrt{x}\ \text{sen} \sqrt{x}\ dx$ (sustituir: $x = t^2$)

B) Calcular $\int_0^{\pi} f(x).dx$ para ***f*** del item **(A)**; en cada caso que se pueda aplicar la *Regla de Barrow*.

C) Verificar que las siguientes integrales ***<u>no se pueden integrar "por partes</u>***"

$$\int \frac{1}{x^2-1}.dx \quad ; \quad \int \frac{\text{sen}\, x}{x}.dx \quad ; \quad \int e^{x^2}\, dx$$

<u>Método</u> <u>IV</u>: *<u>para funciones racionales</u>* → $\int f(x)\,dx$ con $f(x) = \dfrac{r(x)}{q(x)}$ (*r; q polinomios)*

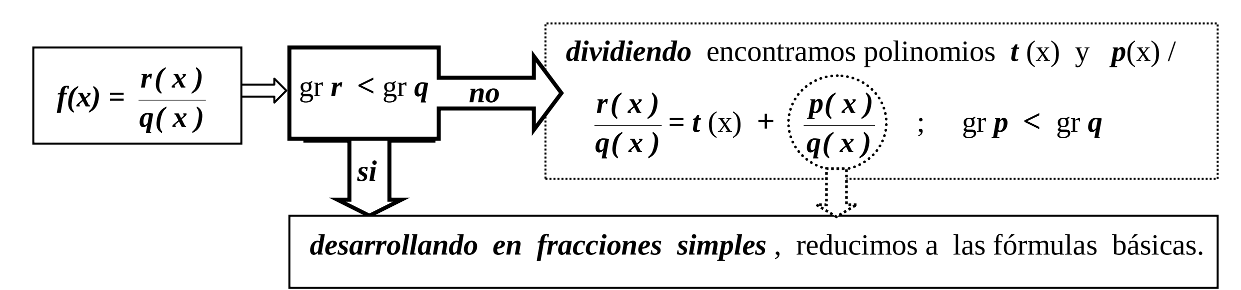
El método de ***desarrollo en fracciones simples,*** permite integrar cualquier función racional.
No estudiaremos este método en forma exhaustiva, pero profundizaremos lo suficiente para mostrar cómo cualquier función racional se puede integrar mediante *reducción* a las *fórmulas básicas* :

$$\int x^n .dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \ \ (n \neq -1); \qquad \int \frac{1}{x}.dx = \ln|x| + C\ ;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \text{arctg}\, x + C \quad ; \qquad \int \frac{1}{x^2-1}.dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

* Una función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se dice "*propia*" si el grado de ***p*** es ***menor*** que el de ***q*** .

* Así, en la integración de funciones racionales, tenemos una primera cuestión a resolver:



Desarrollo en fracciones simples

Dada la función racional "propia" $\frac{p(x)}{q(x)}$ (gr p < gr q) ;

donde gr q = **n** y q tiene **m** raíces reales y distintas (**m** ≤ **n**), x_1 , x_2 , x_3 ,........, x_m ;

existen **n** números reales A_1, A_2 , ..., A_n, tal que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \ldots\ldots + \frac{a(x)}{c(x)} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(x-x_m)}$$; $a(x)$: lineal ; $c(x)$: cuadrática

* Luego, dada la función racional propia, _si hace falta_, realizamos su _desarrollo en fracciones simples_

e integramos. Las integrales a la derecha del igual son o pueden ser reducidas a fórmulas básicas.

8) Calcular (gr p < gr q)

1) a) $\int \frac{1}{x+3}dx$ b) $\int \frac{1}{x-5}dx$

2) a) $\int \frac{x}{x+3}dx$ b) $\int \frac{x}{-4x+8}dx$

3) a) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1}dx$ b) $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x}dx$

4) a) $\int \frac{1}{x^2+9}dx$ b) $\int \frac{1}{4x^2+16}dx$

5) a) $\int \frac{1}{x^2-1}.dx$ b) $\int \frac{1}{x^2-9}.dx$

6) a) $\int \frac{x^2+5x+36}{(x^2-4)(x^2-9)}.dx$

7) a) $\int \frac{1}{(x-4)^3}.dx$ b) $\int \frac{1}{(x+2)^2}.dx$

8) a) $\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)^3}.dx$

9) a) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}.dx$ b) $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}.dx$

(b^2- 4 a c < 0)

Formas Básicas:
I$_1$: $\int \frac{1}{x+b}dx$ =
I$_2$: $\int \frac{x}{ax+b}dx$ =
I$_3$: $\int \frac{p'(x)}{p(x)}dx$ =
I$_4$: $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$ =
I$_5$: $\int \frac{1}{x^2-a^2}.dx$ =
I$_6$: $\int \frac{p(x)}{x^4+bx^3+cx^2+dx+e}.dx$ (4 raíces reales ≠ s)   **I**$_6$ = $\int \left[\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{A_3}{x-x_3}+\frac{A_4}{x-x_4}\right].dx$
I$_7$: $\int \frac{1}{(x+a)^n}.dx$ = (n ≠ 1)
I$_8$: $\int \frac{p(x)}{x^4+bx^3+cx^2+dx+e}.dx$ = (una raíz triple) $\int \left[\frac{A_1}{(x-x_1)^3}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\frac{A_3}{x-x_1}+\frac{A_4}{x-x_4}\right].dx$
I$_9$: $\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}.dx$ = α ≠ 0 → trab.alg. + **I**$_3$; α = 0; completar cuadrados $\int \frac{\beta}{(x+h)^2 \pm k}.dx$ → **I**$_4$ ó **I**$_5$

10) *a)* $\int \frac{p(x).\,dx}{(x^2+4x+5).(x-1)}$

(b^2- 4 $a\,c < 0$)

$$\int \frac{p(x).\,dx}{(ax^2+bx+c).(x+d)} = \int \left[\frac{A_1.x + A_2}{ax^2+bx+c} + \frac{A_3}{(x+d)} \right].dx$$

9) A) Calcular usando el desarrollo en fracciones simples.
Verificar los resultados obtenidos mediante derivación

a) $\int \frac{x-3}{x^2+4x-5}.dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$

c) $\int \frac{dx}{2x^2+2x-12}$

d) $\int \frac{3x^2-10x-4}{x^3-x^2-4x+4}.dx$

e) $\int \frac{5x-1}{x^3-x^2}.dx$

f) $\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x^2-4x+4)}.dx$

g) $\int \frac{x^2+3x-2}{x^4+x^3-5x^2+3x}.dx$

h) $\int \frac{2.x^3}{x^2-x-2}.dx$

i) $\int \frac{2x^3-12x^2+23x-17}{x^2-3x+2}.dx$

j) $\int \frac{6.x}{(x-1)(x^2+1)}.dx$

k) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$

l) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+6x+10}$

m) $\int \frac{x^3}{x^4+1}.dx$

n) $\int \frac{1}{x^4-16}.dx$

B) Calcular $\int_0^1 f(x).dx$ para f del item **(A)**; en cada caso que se pueda aplicar la *Regla de Barrow*.

C) Las siguientes integrales, ***se pueden integrar usando el desarrollo en fracciones simples ?***.

$\int \frac{sen\ x}{x}.dx$; $\int e^{x^2}dx$

..... y se terminaron los "métodos".

¿Qué pasa con estas funciones?, ¿son integrables?. Investigue esta cuestión.

10) Calcular $\int sen^5 x\ dx$ usando la siguiente "fórmula de recurrencia":

$$I_n = \int sen^n x\ dx \Rightarrow I_n = \frac{-1}{n} sen^{n-1}x\ cosx + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

11) Calcular $\int \frac{dx}{cos^4 x}$ usando la siguiente "fórmula de recurrencia":

$$I_n = \int \frac{dx}{cos^n dx} = \int sec^n x\ dx \Rightarrow I_n = \frac{1}{n-1} \frac{sen^x}{cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

12) Calcular utilizando el método que más convenga:

a) $\int \sqrt{x}\ (x^2+1)^2\ dx$

b) $\int \frac{senx}{\sqrt{cos^3 x}} dx$

c) $\int \frac{x\ arcsenx}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

d) $\int \sqrt{2x+1}\ dx$

e) $\int \frac{x^2}{x^2+x-6} dx$

f) $\int \frac{sen^3 x}{cos^2 x} dx$

g) $\int \frac{1+tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

h) $\int x^{-2}\ sen\frac{1}{x}\ dx$

i) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$

j) $\int \frac{u^2-x^2}{u^3} dx$

k) $\int x\ arctgx\ dx$

l) $\int \ln(3t-2)\ dt$

m) $\int arcsen(2x-5)\ dx$

n) $\int \frac{t^4-x^2}{t\ x} dt$

o) $\int \frac{2\ lnx-3}{(1+ln^2 x)x} dx$

p) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

q) $\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4-1}}\ dx$

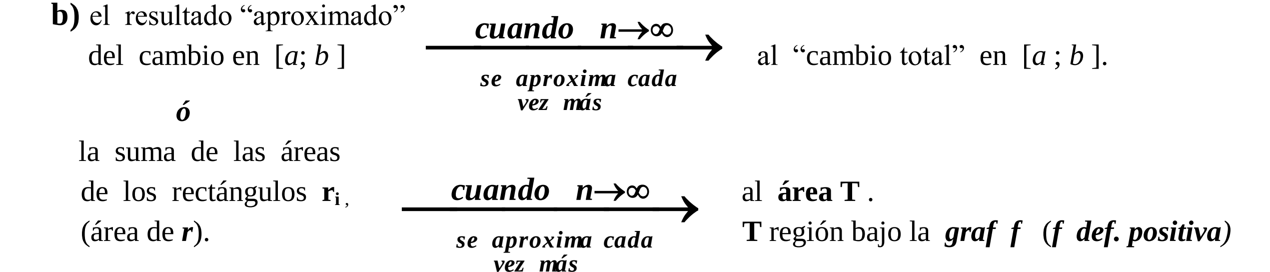
6 — Aplicaciones de la Integral

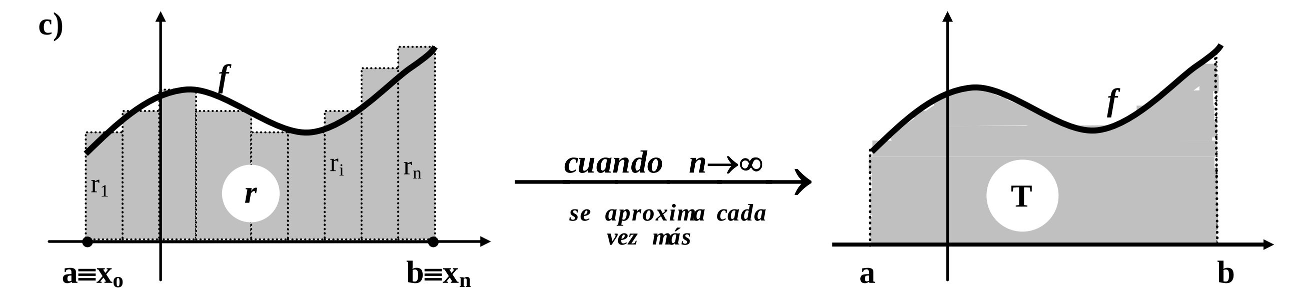
6.1 Un problema geométrico que resuelve la Integral: *área de figuras planas*

Acorde a lo visto, para el caso de una función ***f* definida positiva**, ***f* (x) >0** , ∀ x ∈ [a ; b]; podemos entonces describir el ***proceso de integración*** por medio de tres representaciones distintas:

a) ***simbólica*** ,
b) ***verbal*** ,
c) ***gráfica***.

a) $\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i \xrightarrow[\text{se aproxima cada vez más a}]{\text{cuando } n \to \infty} \int_a^b f(x).dx$

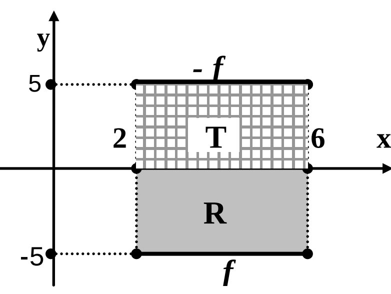




El item (b) resume dos de los problemas que resuelve el cálculo integral: ***cálculo del resultado ó efecto total de un proceso de cambio*** y ***cálculo del área de regiones con contornos curvos.***

Respecto al problema del área hasta ahora sólo hemos dado respuesta al caso particular de las regiones que llamamos "*trapezoides*"; o sea, las determinadas por una **f** "***definida positiva***". Resta entonces resolver este problema para otro tipo de regiones planas; por ejemplo, aquellas determinadas por una función **f** ***definida negativa*** (**f** (x) < 0 , ∀ x ∈ [a ; b]) o que ***cambien de signo*** en [a; b].

Ejemplo: dada f (x) = **-5** con dominio en el intervalo [2; 6], calcular el área de **R,** región determinada por la graf. f y el eje x.



Evidentemente, y por geometría elemental:
a (R) = base x altura = 4 x 5 = **20** .

También por geometría elemental,
a (R) = a (T) (**T** trapezoide determinado por **-*f***).

Por otro lado, **- *f*** es ***definida positiva*** ⇒ **a(T) =** $\int_2^6 (-f(x)) \cdot dx$ **= 5 x (6 -2) = 20** .

Conclusión : **a (R) =** $\int_2^6 (-f(x)) \cdot dx$

Si para f (x) = **-5** calculamos $\int_2^6 f(x) \cdot dx$, tenemos que:

$$\int_2^6 f(x) \cdot dx = \int_2^6 (-5) \cdot dx = -5x \Big|_2^6 = -30 - (-10) = -20$$

Conclusiones:

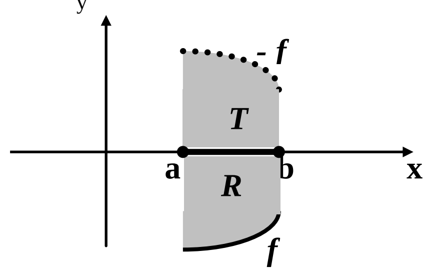
* si f es positiva en todo el intervalo ***la integral da por resultado un número positivo.***

* si f es negativa en todo el intervalo ***la integral da por resultado un número negativo.***

Así, para f negativa: **a (R)** $\neq \int_a^b \mathbf{f(x) \cdot dx}$ (pues **a(R) > 0** y la integral negativa).

⌦ ***f definida negativa*** en [a,b]; el **área de R**, región comprendida por la ***graf***. ***f*** y el **eje x** se obtiene ***integrando*** (**- *f***), la función opuesta de ***f*** .

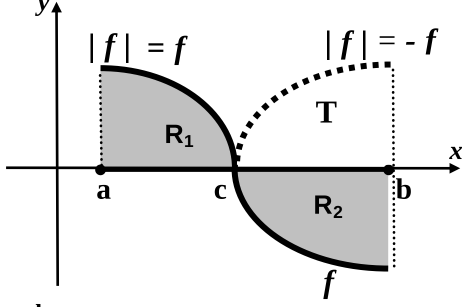
a (R) = a (T) = $\int_a^b (-f(x)) \cdot dx$.



⌦ ***f* cambia de signo** en [a,b]; el **área de R**, región comprendida por la ***graf. f*** y el **eje x** se obtiene ***subdividiendo*** *el intervalo en cada punto donde **f** cambia de signo*; calculando las áreas de las regiones en cada subintervalo donde el signo ***f*** *permanece constante*; ***sumándolas***.

O sea; $\mathbf{R = R_1 \cup R_2}$

área $\mathbf{R}$ = área $(\mathbf{R_1} \cup \mathbf{R_2})$ = área $\mathbf{R_1}$ + área $\mathbf{R_2}$



Por lo visto: $a(\mathbf{R_1}) = \int_a^c f(x)\cdot dx$

$a(\mathbf{R_2}) = a(\mathbf{T}) = \int_c^b (-f(x))\cdot dx$

Luego: área $\mathbf{R}$ = $a(\mathbf{R_1}) + a(\mathbf{T}) = \underbrace{\int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b (-f(x))\cdot dx}$

área $\mathbf{R}$ = $a(\mathbf{R_1}) + a(\mathbf{T}) = \int_a^c |f(x)|\cdot dx + \int_c^b |f(x)|\cdot dx$

Finalmente: $$\text{área } \mathbf{R} = \int_a^b |f(x)|\cdot dx$$

⌦ Área de la región determinada por la gráfica de una función y el eje x

Los tres casos vistos para el cálculo del área de **R,** región comprendida entre el gráfico de una función ***f*** definida en [a;b] y el ***eje x***, pueden resumirse en uno ya que, en cualquier caso, el **área de R** se obtiene calculando **la integral entre a y b** , ***del valor absoluto de f***

- ***f*** definida positiva en [a; b] → $\mathbf{a(R)} = \int_a^b f(x).dx \overset{|f|=f}{=} \int_a^b |f(x)|.dx$
- ***f*** definida negativa en [a; b] → $\mathbf{a(R)} = \int_a^b (-f(x)).dx \overset{|f|=-f}{=} \int_a^b |f(x)|.dx$

- ***f definida en* [*a; b*]** → $\mathbf{a(R)} = \int_a^b |f(x)|.dx$

Ejemplo 1:

Graficar **R** , región determinada por ***f(***x) **= 2x +1** y el **eje x**, si **D*f* = [1; 3].**

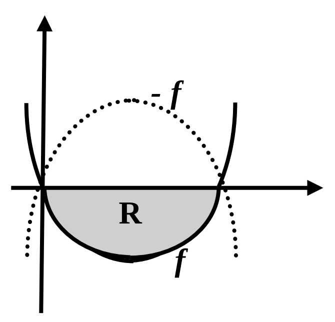
Hallar al área de la región **R**.

$$\mathbf{a(R)} = \int_1^3 |f(x)|.dx \overset{f>0}{=} \int_1^3 f(x).dx = \int_1^3 (2x+1).dx = 10$$

Ejemplo 2:

Graficar **R ,** región determinada por $f(x) = x^2 - 2x$ y el **eje x**, si **D*f* = [0; 2].**

Hallar al área de la región **R**.



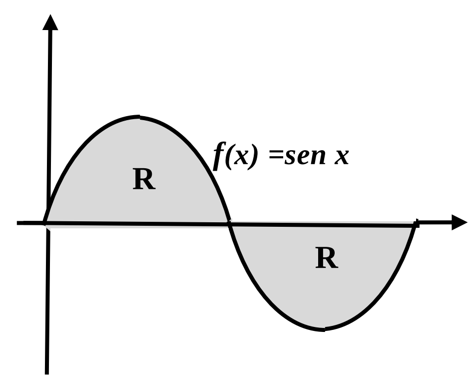
$$a(R) = \int_0^2 |f(x)|.dx \overset{f<0}{=} \int_0^2 (-f(x)).dx =$$

$$= \int_0^2 -(x^2 - 2x).dx = 4/3$$

Ejemplo 3:

Graficar **R** , región determinada por $f(x) = \text{sen } x$ y el **eje x**, si D*f* = [0; 2π].

Hallar al área de la región **R.**



$$a(R) = \int_0^{2\pi} |f(x)|.dx = \int_0^{2\pi} |sen\ x|.dx$$

$$= \int_0^{\pi} |sen\ x|.dx + \int_{\pi}^{2\pi} |sen\ x|.dx ==$$

$$= \int_0^{\pi} senx.dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-sen\ x).\ dx = 4$$

Nota: Observar que, $\int_0^{2\pi} senx.dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$

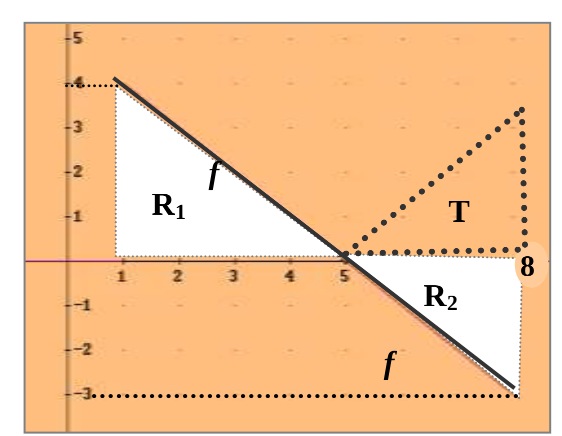
Ejemplo 4: dada $f(x) = -x + 5$ c on **D *f*** = [1; 8]

a) calcular $\int_1^8 f(x)\cdot dx$

b) calcular el área de **R** región comprendida por la ***graf. f*** y el **eje x**.

c) Comparar los resultados.

$$a)\ \int_1^8 f(x)\cdot dx = \int_1^8 (-x+5)\cdot dx \underbrace{=}_{Barrow} \frac{-x^2}{2} + 5x \Big|_1^8 = (-32 + 40) - (\frac{-1}{2} + 5) = \frac{7}{2}$$



b) área **R** $= \int_1^8 |f(x)|\cdot dx$

área **R** $= \int_1^5 f(x)\cdot dx + \int_5^8 (-f(x))\cdot dx =$

$$= 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$$

• En este caso, donde *f* es lineal, podemos calcular más rápido y fácil *acudiendo a la geometría elemental*. Así, subdividimos convenientemente el intervalo y calculamos el área de los triángulos formados.

$$R = R_1 \cup R_2 \Rightarrow a(R) = a(R_1) + a(R_2)$$

a (R_1) = ½ (*base x alt.*) = ½ (4 x 4) = **8**
a (R_2) = a(**T**) = ½ (*base x alt.*) = ½ (3 x 3) = **9/2**

$$\mathbf{a\,(R) = a\,(R_1) + a\,(R_2) = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}}$$

c) ***Conclusión***: $\int_1^8 f(x)\cdot dx \neq a(R)$

⌦ ***Área* de la región determinada por la gráfica de dos funciones f y g.**

Sean **f** y **g** dos funciones definidas en el intervalo [a;b] y tales que **f**(x) ≤ **g**(x) ∀ x ∈ [a;b].

En este caso queda determinada una región plana **R** ; definida como sigue:

$$\mathbf{R} = \{ (x\,;y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; f(x) \leq y \leq g(x) \}$$

Teorema

Dadas : * ***f*** y **g** dos funciones integrables en [a;b] y tales que ***f***(x) ≤ ***g***(x) ∀ x ∈ [a;b] ;

* **R** la región plana determinada por ***f*** y ***g*** en [a;b] ;

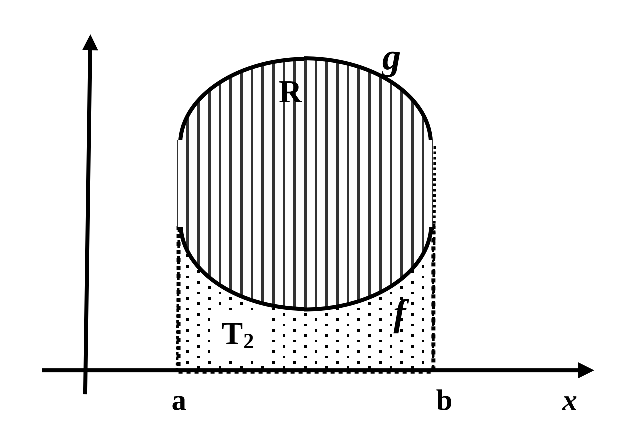
entonces: $\mathbf{a\,(R)} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

Demostración: la demostración se divide en dos casos:

Caso 1: 0≤ ***f***(x) ≤ ***g***(x) ; ∀ x ∈ [a;b]

Caso 2: ***f***(x) ≤ ***g***(x) ; ∀ x ∈ [a;b]

Caso 1: 0≤ ***f***(x) ≤ ***g***(x) ; ∀ x ∈ [a;b] (o sea, ambas funciones definidas positivas)



Sean: $T_1 = \{ (x\,;y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; 0 \leq y \leq g(x) \}$

$T_2 = \{ (x\,;y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; 0 \leq y \leq f(x) \}$

$\mathbf{R} = \{ (x\,;y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; \mathbf{0} \leq f(x) \leq y \leq g(x) \}$

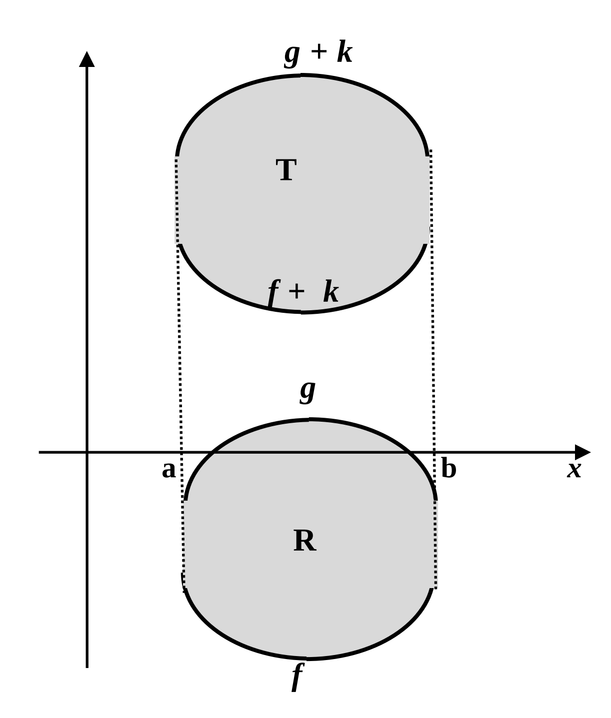
Luego: $\mathbf{T_2 \subset T_1 \rightarrow R = T_1 - T_2}$

$\mathbf{a\,(R) = a\,(T_1) - a\,(T_2)}$

$\mathbf{a\,(R)} = \int_a^b g(x)\cdot dx - \int_a^b f(x)\cdot dx$; (*f* y *g* positivas)

$\mathbf{a\,(R)} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$; (por linealidad de la int)

Caso 2: $f(x) \leq g(x)$; $\forall x \in [a;b]$



Sea: $R = \{ (x ; y) / a \leq x \leq b ; f(x) \leq y \leq g(x) \}$

Luego**,** existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$0 \leq f(x) + k \leq g(x) + k$; $\forall x \in [a;b]$

$T = \{(x ; y) / a \leq x \leq b ; 0 \leq f(x)+k \leq y \leq g(x)+k \}$

Y estamos en el **Caso 1 ;** o sea,

$$a(T) = \int_a^b [(g(x)+k)-(f(x)+k)]\,dx ;$$

$$a(T) = \int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx ;$$

Como **R** y **T** son la "misma figura" pues al trasladar las funciones en un valor ***k***, lo que hacemos es trasladar la región **R** un valor ***k*** "sin deformarla"; tenemos que:

$$a(R) = a(T)$$

$$a(R) = \int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$$

Nota : en definitiva , cualquiera sea el caso el área de una región comprendida entre dos funciones se calcula haciendo la integral de ***la función de ´arriba´ menos la de ´abajo´.***

6.2 Un problema de la Física que resuelve la Integral: *"trabajo"*

Basándonos en la Física elemental, podemos determinar el "trabajo" (**W**) realizado por una fuerza para mover un cuerpo en línea recta. Para una fuerza en la dirección del movimiento y de magnitud *constante* la fórmula correspondiente es: **W =** fuerza (*cte*) x desplazamiento.

Vimos luego (pags. 353-354) que si la fuerza no es constante, el trabajo se calcula acudiendo a un proceso de integración, el trabajo realizado por **F** en [a;b] se obtiene de hacer:

$$W_{[a;b]} = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i) \times \Delta x_i = \int_a^b F(x) \cdot dx$$

6.3 Otros problemas de la Física que resuelve la integral: "cambio total" ó "variación total" en un proceso de cambio a velocidad variable

El **2ºTFCI** permite concluir la Regla de Barrow; regla que proporciona una forma práctica de evaluar la integral para toda ***f*** continua en [a,b] que admita ***primitiva elemental P***, en [a, b] .

$$\int_a^b f(x).dx = P(b) - P(a)$$

Como $P' = f$, reemplazando en la fórmula anterior tenemos:

$$\int_a^b P'(x).dx = P(b) - P(a) = \Delta P$$

Con esta fórmula confirmamos todos los supuestos hechos al inicio de este tema y concluimos el:

⊖ TEOREMA del CAMBIO TOTAL

" la integral de la razón de cambio es el cambio total ´

principio se puede aplicar a todas las razones de cambio en las ciencias naturales y sociales.

➢ Si ***V*** es el volumen de agua en un tanque en cada instante t , entonces su derivada ***V´*** es la razón a la que está variando el volumen de agua en el tanque en el instante **t** y, por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t).dt = V(t_2) - V(t_1) = \Delta V_{[t_1\,;\,t_2]}$$

"***cambio total*** " de la cantidad de agua en el tanque entre t_1 y t_2 . (ó, ***"variación total"***).

➢ Si ***P*** indica la cantidad de individuos o "*población*" de cierta especie en cada instante **t** , entonces su derivada ***P´*** es la tasa de crecimiento (o decrecimiento) de la misma . Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} P'(t).dt = P(t_2) - P(t_1) = \Delta P_{[t_1\,;\,t_2]}$$

"***variación total***" en la *población* durante el período comprendido entre t_1 y t_2 .

➢ Si ***M*** es la masa producida en una cierta reacción química en cada instante t ; su derivada, ***M´ = v*** , la velocidad de reacción. Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} M'(t).dt = M(t_2) - M(t_1) = \Delta M$$

"***variación de masa***" producida entre t_1 y t_2. (ó, " ***masa acumulada"***).

Ejemplo: sea $v = \dfrac{2}{(10-2t)^2}$; con $v = \dfrac{dM}{dt}$ y $[v] = \dfrac{mg}{seg}$.

Luego $\int_0^4 v(t).dt = \Delta M_{[0;4]} = M(4) - M(0)$; **<u>variación</u> *de masa*** producida a los **4** segundos.

Para *calcular* esta integral basta hallar una primitiva **P** cualquiera de ***v*** *;* es decir, esta no tiene que ser necesaria y exactamente ***M.***

$$\Delta M = \int_0^4 v(t).dt = P(t)\Big|_0^4 = \frac{1}{10-2t}\Bigg|_0^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 0,40 \quad \text{(mg.)}$$

¿*M*(4)? → *M*(4) = **Δ*M* - *M*(0)** = **0, 40 - *M*(0)** (para responder necesitamos un dato: ***M*(0)**)

➢ Si la masa de una varilla, medida desde la izquierda hasta un punto **x** , es ***m*(x)** , entonces ***m´***(x) = δ(x) es la ***densidad lineal*** (masa por unidad de longitud) en cada punto **x**.

Por lo tanto, $$\int_a^b m'(x).dx = m(b) - m(a) = \Delta m ,$$

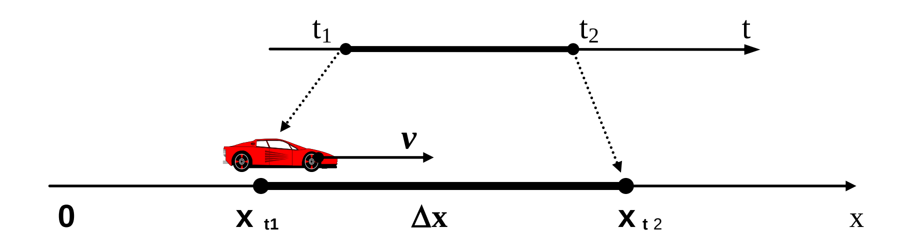
es la ***masa total*** del segmento de varilla comprendido entre **x =** ***a*** y **x =** ***b*** .



➢ Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición ***x = x****(t),* entonces su velocidad es ***v****(t)* = ***x´****(t)* .

Por lo tanto, $\int_{t_1}^{t_2} x'(t).dt = x(t_2) - x(t_1) = \Delta x$,

es el ***"variación total en su posición"*** ó ***"desplazamiento total"***, Δx, entre t_1 y t_2.



(*) En este caso, si la velocidad cambia de signo en el intervalo de integración, hay que tener sumo cuidado en la interpretación del resultado; recordar que "***desplazamiento total***" y "***distancia***" recorrida por un móvil en un cierto intervalo de tiempo [t_1 ; t_2]; son dos nociones distintas. Una resulta de integrar la ***velocidad***, v ; la otra, de integrar la ***rapidez***, $|v|$.

Ejemplo: *Una partícula se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante* ***t*** *es* $v(t) = -6t^2 + 18t$ *(m/sg); **(a)** ¿cuánto se* **desplaza** *esta partícula en cada uno de los períodos de tiempo que se indican a continuación:* $0 \le t \le 2$; $0 \le t \le 3$; $0 \le t \le 4$; $0 \le t \le 4{,}5$; $0 \le t \le 5$? ; **(b)** *¿qué* **distancia** *recorre en cada uno de tales períodos?.*

(a) ***Desplazamiento de la partícula en cada*** Δt.

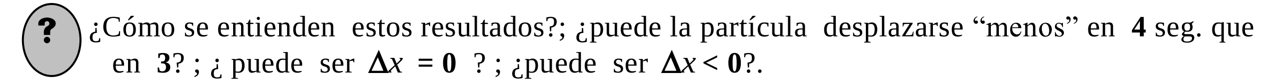
$0 \le t \le 2$ → $\Delta x = \int_0^2 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{20}$

$0 \le t \le 3$ → $\Delta x = \int_0^3 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{27}$

$0 \le t \le 4$ → $\Delta x = \int_0^4 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{16}$

$0 \le t \le 4{,}5$ → $\Delta x = \int_0^{4,5} \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{0}$

$0 \le t \le 5$ → $\Delta x = \int_0^5 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{-25}$



¿Cómo se entienden estos resultados?; ¿puede la partícula desplazarse "menos" en **4** seg. que en **3**? ; ¿ puede ser $\Delta x = 0$? ; ¿puede ser $\Delta x < 0$?.

*el ***signo de la velocidad*** tiene una interpretación física concreta: indica el ***sentido*** del movimiento de la partícula sobre la recta, en cada instante ***t.*** Así, en una recta ***vertical*** orientada (+) ***hacia arriba***:

$v(t) > 0$; indica que, en el instante t, la partícula está *avanzando* hacia *arriba* .

$v(t) < 0$; indica que, en el instante t, la partícula está *avanzando* hacia *abajo* .

En este caso $v(t) = -6t^2 + 18t$. Luego, si suponemos que el eje del movimiento es una recta ***vertical*;** que la orientación positiva del mismo es ***hacia arriba***; tenemos que:

* $v(t) > 0$ en **[0, 3)** → la partícula ***sube*** entre [0, 3];
* $v(3) = 0$ → la partícula ***cambia el sentido del movimiento***, a los 3 seg.
* $v(t) < 0$ en [3, +∞) → la partícula ***baja*** a partir de los 3 seg..

Luego, y recordando que $\Delta x = x(t_f) - x(t_o)$, los resultados obtenidos tienen total sentido.

* el ***desplazamiento*** a los **4** seg .($\Delta x = 16$) es "*menor*" que a los **3** ($\Delta x = 27$) pues la partícula "*sube*" hasta los **3** seg. y a partir de allí comienza a "*bajar*".

* $\Delta x = 0$ indica que la partícula, "*bajando*", a los **4,5** seg. ha llegado al punto de partida ($x = 0$)

* $\Delta x < 0$ indica que la partícula, "*bajando*", ha sobrepasado el punto de partida.

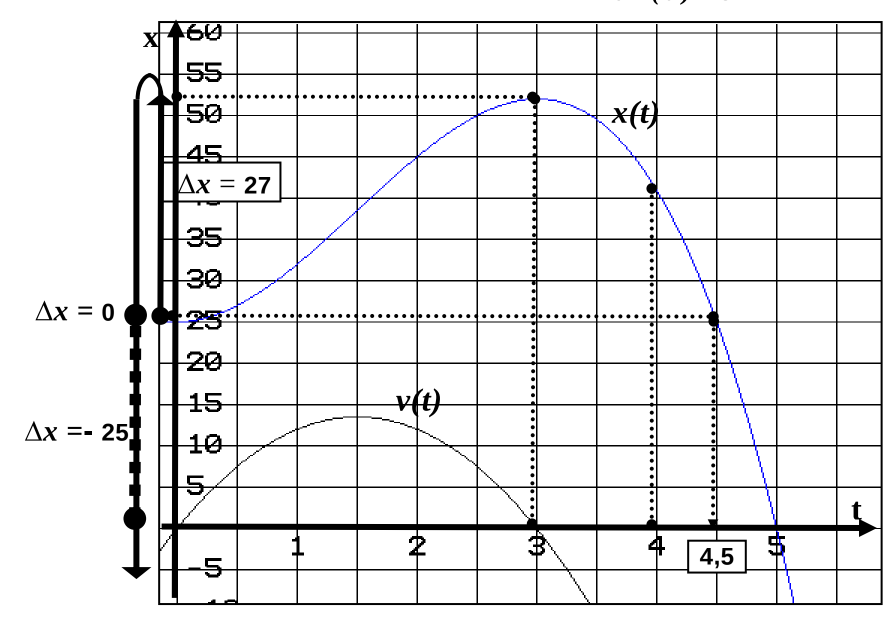
¿Cómo verificamos? : un camino, a través de la función de posición de la partícula, $x = x(t)$.

¿Cómo obtenemos $x = x(t)$***?***: recordando que $x(t)$ es una primitiva de $v(t) = -6t^2 + 18t$;

Calculamos para un "t" genérico: $\Delta x_{[0;\,t]} = \int_0^t v(\tau).d\tau = \int_0^t \left(-6\tau^2 + 18\tau\right).d\tau = -2t^3 + 9t^2$

$\Delta x_{[0;\,t]} = x(t) - x(0) \Rightarrow x(t) - x(0) = -2t^3 + 9t^2$

Concluimos que: $x(t) = -2t^3 + 9t^2 + x(0)$. $\xrightarrow[si\ x(0)=25]{}$ $x(t) = -2t^3 + 9t^2 + 25$



(b) ***Distancia recorrida en cada*** Δt.

$0 \le t \le 2 \rightarrow d_{[0,\,2]} = \Delta x = \int_0^2 \left(-6t^2 + 18t\right)dt = \mathbf{20}$ (*ms.*)

$0 \le t \le 3 \rightarrow d_{[0,\,3]} = \Delta x = \int_0^3 \left(-6t^2 + 18t\right)dt = \mathbf{27}$ (*ms.*)

$0 \le t \le 4 \rightarrow d_{[0,\,4]} = d_{[0,\,3]} + d_{[3,\,4]} = \int_0^3 v(t).dt + \int_3^4 -v(t).dt = 27 + 11 = \mathbf{38}$ (*ms.*)

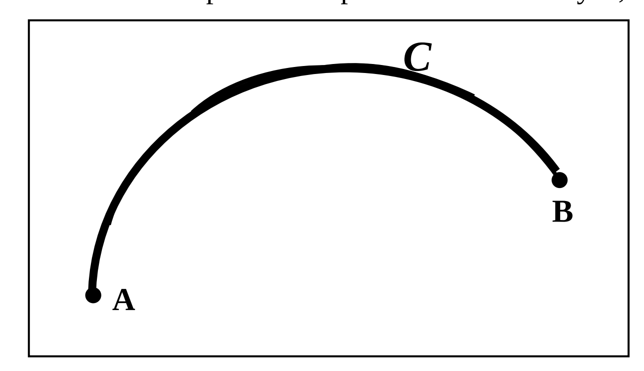
$0 \le t \le 4{,}5 \rightarrow d_{[0;\,4,5]} = d_{[0,\,3]} + d_{[3;\,4,5]} = \int_0^3 v(t).dt + \int_3^{4.5} -v(t).dt = 27 + 27 = \mathbf{54}$ (*ms.*)

$0 \le t \le 5 \rightarrow d_{[0;\,5]} = d_{[0,\,3]} + d_{[3;\,5]} = \int_0^3 v(t).dt + \int_3^5 -v(t).dt = 27 + 52 = \mathbf{79}$ (*ms.*)

6.4 Otros problemas geométricos que resuelve la Integral

6.4.1 Longitud de un arco de curva C

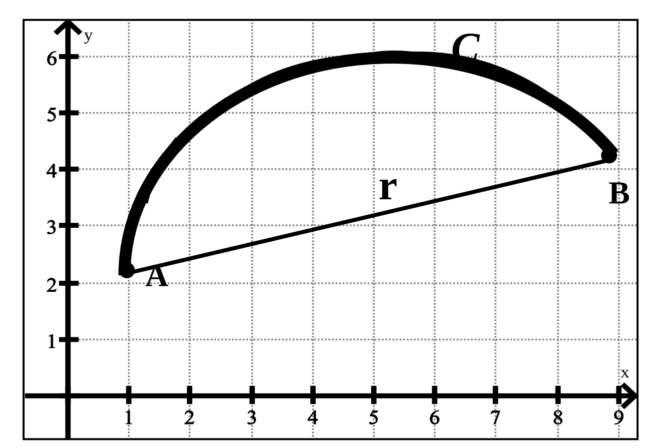
* Dada una curva plana ***C*** de puntos extremos **A** y **B**, deseamos calcular la longitud de ***C.***



* ¿Cómo haría para "estimar" la longitud de esta curva?.
* ¿ A que "herramientas" de la **geometría analitica** acudiría a tal efecto?

(Antes de seguir reflexione un instante sobre estas preguntas, descubra que sus conocimientos previos lo habilitan a responderlas)

* Si $C = \mathbf{r}$, un segmento de recta de extremos $\mathbf{A}(x_1;y_1)$; $\mathbf{B}(x_2;y_2)$, sabemos resolver el problema. (Obviamente, previa introducción de un sistema de referencia).



long. $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{d}\,(A\,;B) =$

long. $\mathbf{r}_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$.

* En el ejemplo:
A (1; 2) ; B(9; 4)

* **long.** $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{d}\,(A;B)$

long. $\mathbf{r}_{AB} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$

* y tenemos un valor "***aprox.***"
de **long.** C_{AB} ($\cong \sqrt{68} \cong 8{,}25$)

* Si C no es un segmento de recta, no sabemos calcular su longitud, acudimos entonces a resolver el problema apoyándonos en el caso conocido ("*longitud de un segmento de recta*"); o sea, acudimos a un **"proceso de integración"**:

(1) ***subdividimos el problema*** (en este caso, la curva C): la curva queda dividida en "n" sub-arcos C_i.

(2) ***realizamos las aproximaciones parciales*****:** reemplazamos cada sub-arco por un segmento, calculamos la longitud de cada segmento.

(3) ***realizamos la aproximación "total":*** suma de todas las aproximaciones parciales.

(4) ***calculamos el límite de estas sumas para la norma de la partición tendiendo a cero.***

Proceso de integración

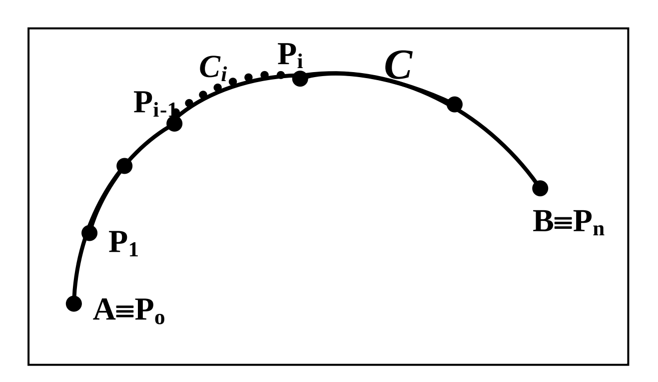
(1) ***subdivisión del problema***

Tomamos "**n+1**" puntos de C_{AB}

$\{ P_o \equiv A;\ P_1;\ P_2;\ ......;\ P_i;\ ....,\ P_n \equiv B \}$

Estos puntos generan **"n"** subarcos :

C_1 ; C_2 ; ………; C_i ; ………..; C_n



(2) ***aproximaciones parciales****:* *aproximamos cada* C_i *por el segmento que une sus extremos.*

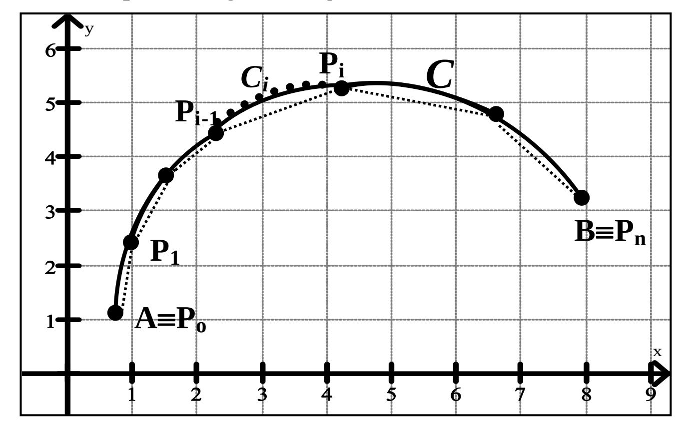
long. $C_i \cong$ long. $\overline{P_{i-1}\,P_i}$

long. $C_i \cong \mathbf{d}\,(P_{i-1}\,; P_i)$

(3) ***aproximación "total":***

Si indicamos con P a la poligonal determinada por los $\mathbf{P}_i$, tenemos que

long. $C_{AB} \cong$ **long.** $P = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}(P_{i-1}\,; P_i)$



(4) ***calculo del límite de la longitud de las poligonales.***

Def **:** decimos que el arco de curva C_{AB} es "***rectificable***" si existe un número "**L**" al cual se acercan tanto como se quiera las longitudes de las poligonales $\mathcal{P}$, cuando $d\,(P_{i-1}\,;P_i) \to 0, \forall\, i$

Def : si C_{AB} es "***rectificable***",

* $L = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} d(P_{i-1};P_i)$

* a **L** lo llamamos "***longitud de*** C_{AB}"

$$\textit{longitud de } C_{AB} = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1};P_i)$$

Hemos desembocado en un límite de sumas, por ende, en una integral; pero, ¿cómo la calculamos? .
Y aquí se abre el camino ya que la función integrando depende de la forma como esté dada la curva.

Tenemos así dos casos:

Caso 1: **C = graf f** , **f** definida en **[a;b].**

Caso 2: **C** dada por sus ecuaciones paramétricas ; o sea, $C = \{ (x;y) \,/\, x = x(t) \,;\, y = y(t) \,,\, t \in [a;b] \}$

Caso 1: **C** = **graf f** , **f** definida en **[a; b].**

Introducido un sistema de referencia los puntos

$\{ P_o ;\; P_1 ;\; P_2 ; \ldots\ldots ; P_i ; \ldots\ldots\ldots\ldots , P_n \}$

definen una partición de **[a; b]**,

- $\mathcal{P} = \{x_o = a \,;\, x_1 ;\; x_2 ;\; \ldots\ldots ;\; x_i ; \ldots\ldots ;\, x_n = b \}$
- $P_i\,(x_i\,;\,y_i) \to \overline{P_{i-1}\,P_i} = (\Delta x_i\,;\Delta y_i)$
- $\text{long. } \mathcal{P} = \sum\limits_{i=1}^{n} d\,(P_{i-1}\,;P_i)$

$\text{long. } \mathcal{P} = \sum\limits_{i=1}^{n} d\,(P_{i-1}\,;P_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i}$; con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $\quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

- ***Teorema*** : Si **f** y **f´** son continuas en **[a; b]** entonces **C = graf f** es rectificable y vale:

$$\textit{longitud } C_{AB} = L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\;.dx$$

Demostración: Por definición: $L = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} d(P_{i-1};P_i)$;

o sea; $L = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i} = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2}\;.\,\Delta x_i$ **(I)**

f continua y derivable en [a;b] → (Ter. Lagrange) → $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$ con $c_i \in (x_{i-1}\,;\, x_i)$ **(II)**

Reemplazando en **(I)** :

$g(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$

$$L = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,.\Delta x_i = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,.\Delta x_i =$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i).\Delta x_i = \lim_{|P|\to 0} S(g;\ P\ ;\ Q) = \int_a^b g(x)\,.dx$$

Finalmente, reemplazando **g** : $\quad$ ***longitud de*** C_{AB} = **L** = $\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,.dx$ $\qquad$ **(q.e.d.)**

Caso 2: $\quad$ **C** : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\quad t \in [\,c\,;\,d\,]$

Trabajando en forma análoga a la anterior llegamos a $L = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i}$;

teniendo en cuenta que en este caso:

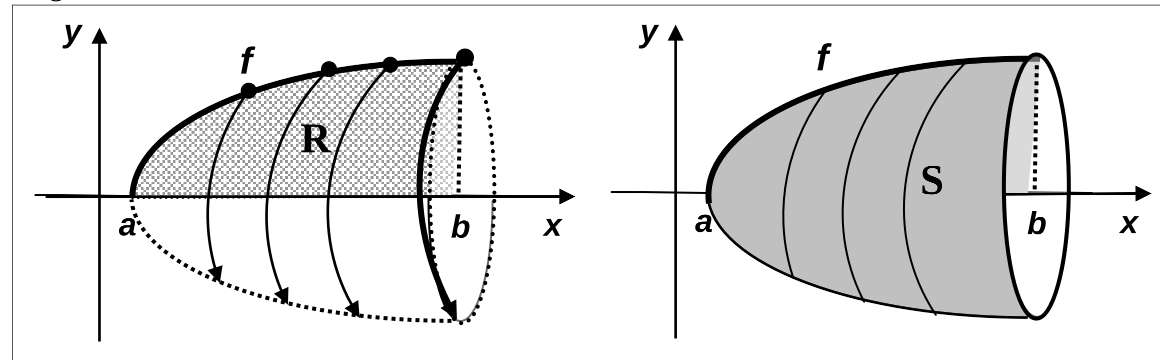
$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$; $\quad \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = x'(\alpha_i)$ con $\alpha_i \in (t_{i-1};\ t_i)$ (teorema de Lagrange).

$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1})$; $\quad \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = y'(\beta_i)$ con $\beta_i \in (t_{i-1};\ t_i)$ (teorema de Lagrange).

Concluimos que: ***longitud de*** C_{AB} = **L** = $\int_c^d \sqrt{x'^2(x) + y'^2(x)}\,.dx$

6.4.2 Volumen de S, sólido de revolución

Al hacer girar alrededor del **eje x** la **región R** comprendida entre la curva **graf. f** y el **eje x** se genera un sólido "**S**" , llamado "**sólido de revolución**" ,



Para obtener el volumen del sólido **S** debemos acudir a un **"proceso de integración"** ; o sea: particionar el intervalo; obtener las "aproximaciones parciales"; sumarlas y obtener la "aproximación total". Finalmente, analizar si las aproximaciones totales para la norma de la partición tendiendo a cero tienden a un número. Si lo hacen, este número es, por definición el volumen del sólido **S**.
Se demuestra que si f es continua en [a; b] , entonces:

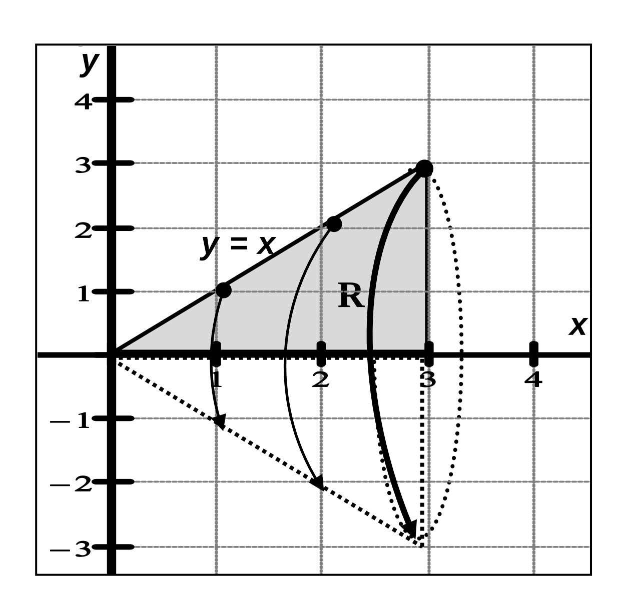
$$\textbf{vol. S} = \pi \int_a^b f^2(x).dx$$

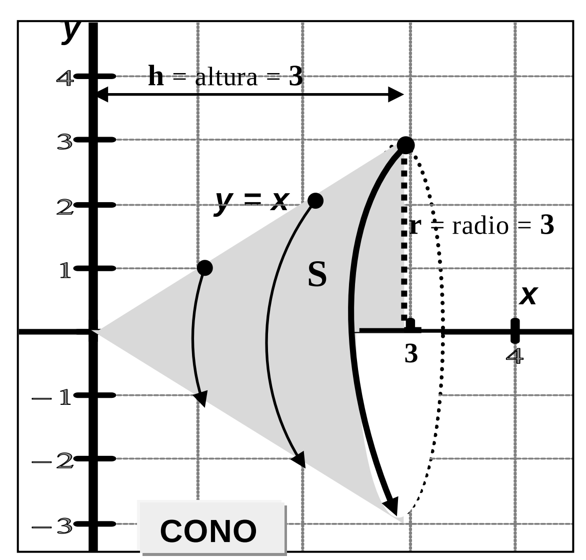
Ejemplo: dada **f(x) = x** en **[0; 3]** se pide:

*) graficar **S**, el sólido de revolución que genera la región **R** determinada por **f** .

*) calcular el volumen de **S** acudiendo al *cálculo integral*.

*) si se trata de un sólido o “cuerpo” conocido verificar si el resultado obtenido coincide con el “conocido” de la *geometría analítica*.





*) **vol. cono** = $\pi \int_0^3 x^2 \, dx = \pi \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9\pi$ ✓

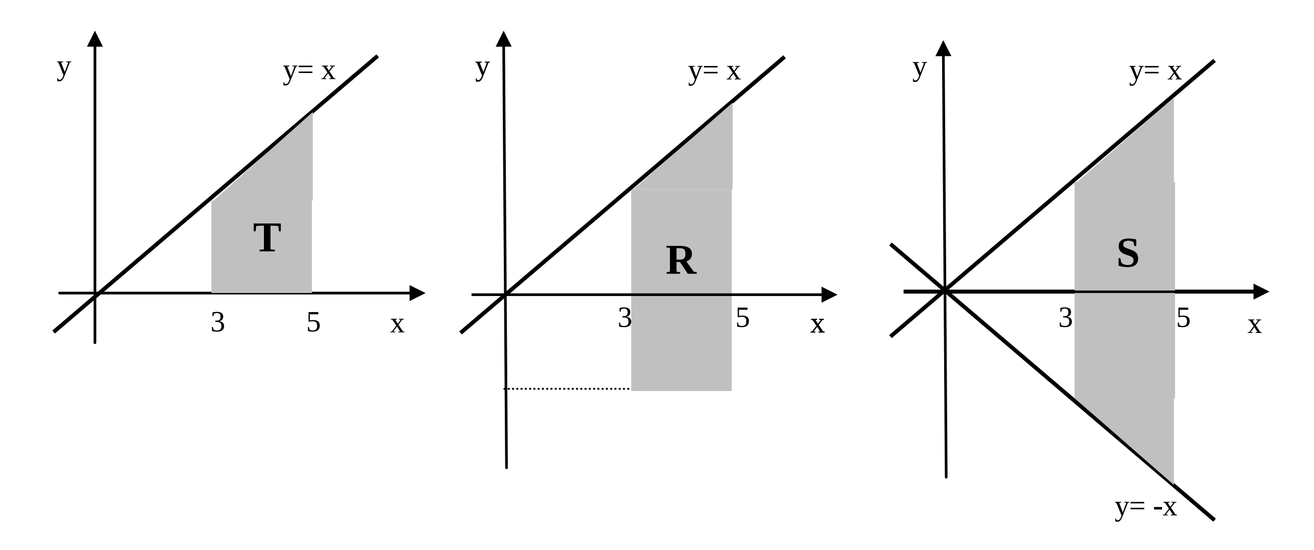
*) **vol. cono** = $\frac{1}{3}$. **“área base” x “altura”** = $\frac{1}{3}$. **“ $\pi \cdot r^2$ ” x “h” = 9π** ✓

6.5 Ejercicios: Aplicaciones de la Integral

1) Dadas las figuras planas que se indican a continuación, se pide:

a) hallar el área de las regiones sombreadas con las fórmulas usuales de la geometría.

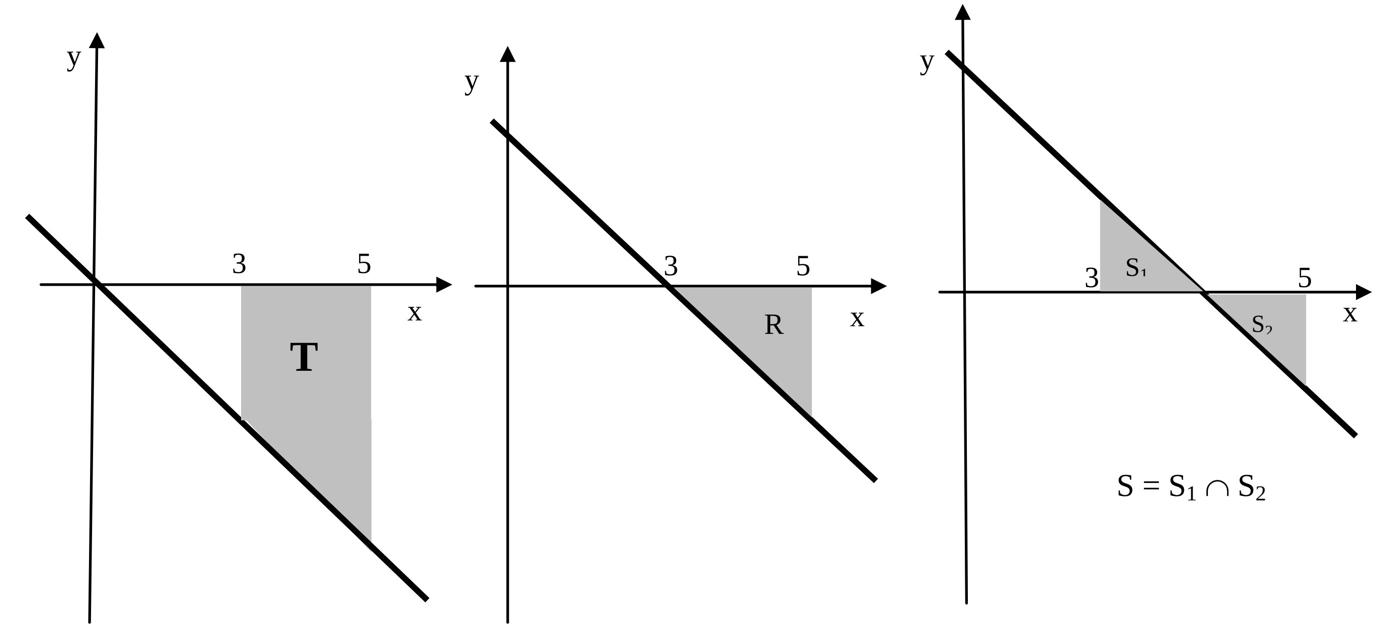
b) Verificar luego el resultado hallado con el auxilio del Cálculo Integral.



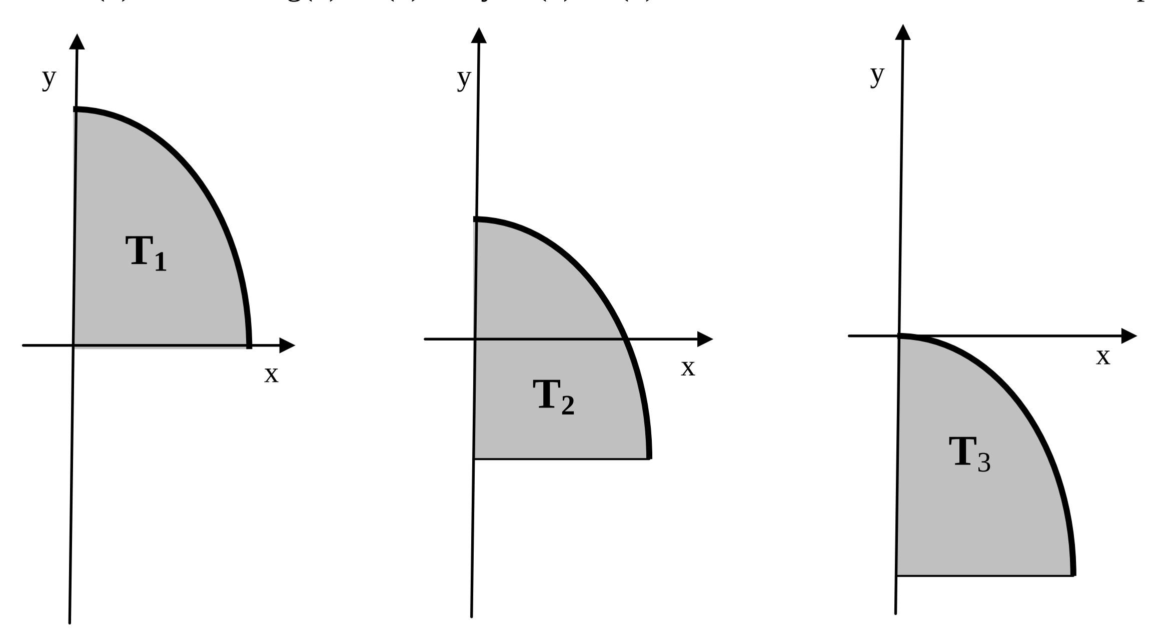
2) Las figuras planas que se indican a continuación están generadas por las funciones f , g , h con f (x) = -x ; g(x) = f(x) + 3 y h(x) = f(x) + 4 ; y todas definidas en el [3; 5]. Se pide:

a) hallar el área de las regiones sombreadas con las fórmulas usuales de la geometría.

b) Verificar luego el resultado hallado con el auxilio del Cálculo Integral.



3) Las figuras planas $\mathbf{T}_1$; $\mathbf{T}_2$; $\mathbf{T}_3$ a continuación están generadas por las funciones f, g, h con $f(x) = -x^2 + 9$; $g(x) = f(x) - 5$ y $h(x) = f(x) - 9$; todas definidas en el [0; 3]. Se pide:



a) hallar el área de $\mathbf{T}_1$; $\mathbf{T}_2$; $\mathbf{T}_3$ con el auxilio del cálculo integral y *verificar* que todas tienen el mismo área. Justificar este resultado.

b) Graficar la región determinada por f y -f en el [0; 3]; hallar su área:

1ro) con el auxilio del cálculo integral. ; *2do*) Aplicando propiedades de la geometría.

c) Graficar las regiones $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ simétricas respecto del "*eje y*" de $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ respectivamente . Hallar luego las áreas de $\mathbf{S}_i = \mathbf{T}_i \cup \mathbf{R}_i$; i = 1, 2, 3.

1ro) con el auxilio del cálculo integral.

2do) aplicando propiedades de la geometría.

d) Para f, g, h definidas en [0; 3] determinar el o los valores de "c" del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Interpretar geométricamente el resultado en cada caso posible.

e) Para f, g, h definidas en [- 3; 3], determinar el o los valores de "c" del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Interpretar geométricamente el resultado en cada caso posible. Valor

4) Si $\mathbf{f(x) = -x^3 + 8}$; $\mathbf{g(x) = f(x) - 7}$; $\mathbf{h(x) = f(x) - 8}$

a) Graficar las regiones **T** ; **R** ; **S** *respectivamente* comprendidas entre el gráfico de f, g, h y el *eje x* y todas con dominio en el [0; 2] . Luego, calcular su área.

b) Graficar las regiones **T**, **R** y **S**, *respectivamente* comprendidas entre el gráfico de f , g , h y el *eje x* (y todas con dominio en el [-2; 2]). Hallar sus áreas.

1ro) con el auxilio del cálculo integral;

2do) Aplicando propiedades de la geometría (en el caso de ser posible).

c) Para f, g, h definidas en [- 3 ; 3], determinar el o los valores de "c" del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.
Interpretar geométricamente el resultado en cada caso posible.

5) Si con **R** representamos un círculo de radio 5, se pide:

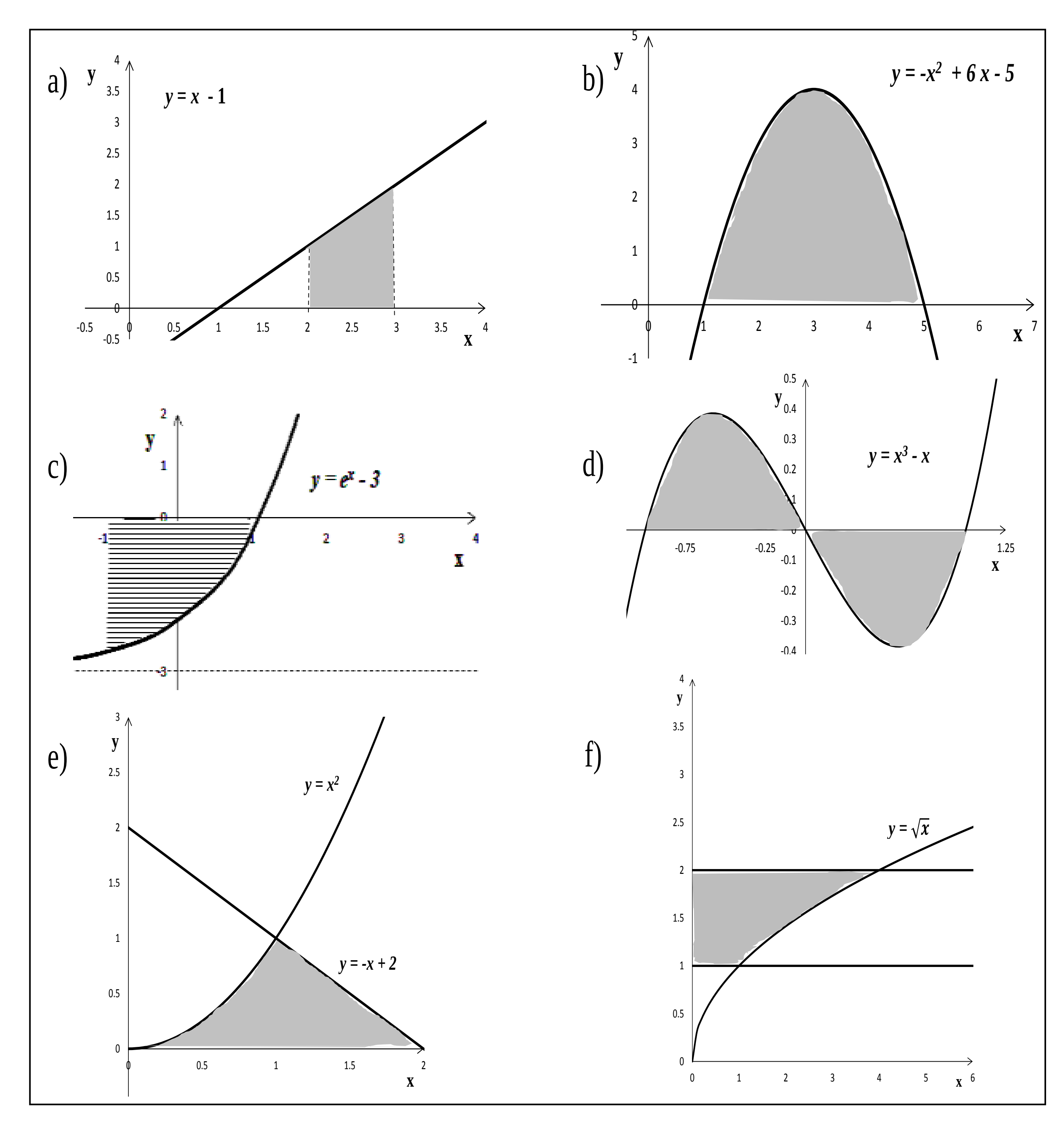
a) Graficar el círculo en un sistema cartesiano ortogonal, indicar las funciones que representan su contorno, escribir la región **R** en función de ellas.

b) Dar el área de las siguientes figuras planas a partir del área del círculo y la aplicación de propiedades geométricas pertinentes al caso. Luego, obtener el área de las mismas pero a través del cálculo intgral.

i) un cuarto de círculo.

ii) medio círculo.

6) Hallar el área de las regiones rayadas mediante adecuadas integrales definidas.



7) Calcular el área de las regiones limitadas por:

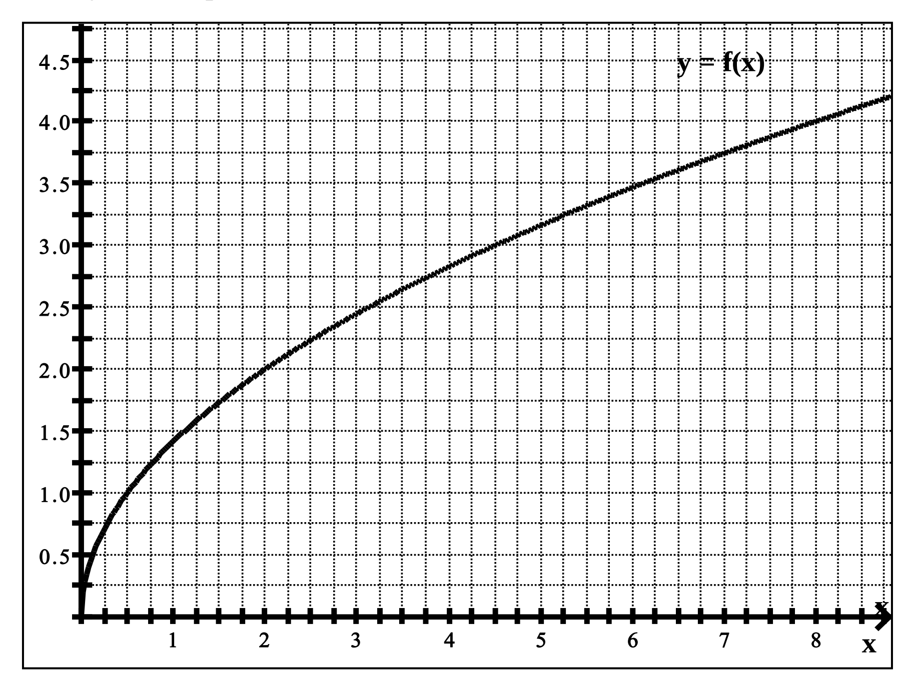
a) $f(x) = x^2 - 4$; $g(x) = -(x-2)^2$.
b) $y = \cos x$; $y = \operatorname{sen} x$; $x = 0$; $x = p$.
c) $y = \ln x$; $y = 1$; $x = 2e$; $y = 0$.
d) $f(x) = 0$; $g(x) = x^2 - 2|x| - 3$.

8) Para la función **f** cuyo gráfico se adjunta se pide:

a) dar $\mathbf{I_{sup}}$ e $\mathbf{I_{inf}}$ con **n=16,** aproximaciones por por exceso y defecto respectivamente de

$$\mathbf{I} = \int_0^8 f(x)\,dx$$

Hacer esto aplicando un conveniente "proceso de integración" y "leyendo" del **graf. f** los valores que necesite al efecto.



b) Calcular $\mathbf{I} = \int_0^8 f(x)\,dx$ para $f(x) = \sqrt{2x}$.

c) **Vó F:** estimar el "orden" del error cometido al aproximar **I** con $\mathbf{I_{sup}}$ e $\mathbf{I_{inf}}$ del item **(a) .**

¿ Cómo haría para que estos errores, E = | I- $\mathbf{I_{inf}}$ | ó E = | I- $\mathbf{I_{inf}}$ | , sean menor a **1/10 ?**

9) Demostrar , usando un conveniente polinomio de Taylor que $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2}\,dt \approx 0{,}4613$

10) Sea $g(x) = \int_0^x f(t).dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra:

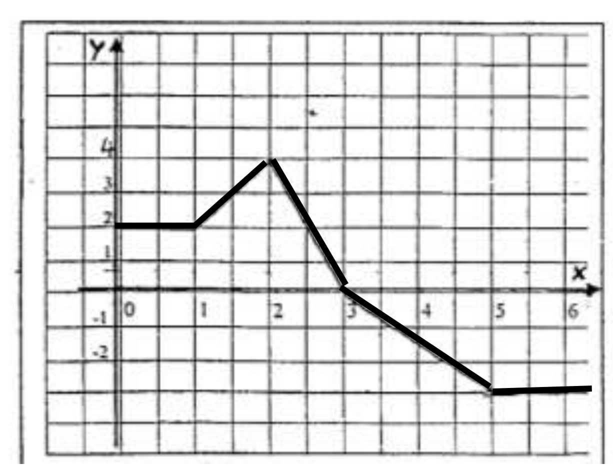
a) Evaluar $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(6)$

b) ¿Sobre qué intervalos g es creciente?

c) ¿Dónde tiene g un valor máximo?

d) Hallar la ley de g .

e) Graficar g y g'.



11) Dada $\mathbf{F : [1; 5] \to R}$ con $\mathbf{F}(x) = \int_1^x (t^3 - 3t^2 - 2).dt$,
se pide calcular **F´** por dos caminos distintos

12) Dada **F : [0; 10] → R** con **F** (x) = $\int_0^x (3-t).dt$, se pide:

a) Calcular **F**(3) ; **F**(4) ; **F**(6) ; **F**(9). Interpretar geométricamente los valores obtenidos (si puede).
b) Calcular **F´**(x) por el camino "más simple".
c) Graficar P ; Q ; R siendo estas funciones **3** primitivas de **F´**(x) , tales que:
P (0) = 2 ; **Q (0) = 0** ; **R (0) = - 2** ;
Luego, indicar si alguna de ellas es igual a **F**

13) Para la función **f** cuyo gráfico se adjunta se pide:

a) dar um valor aproximado de

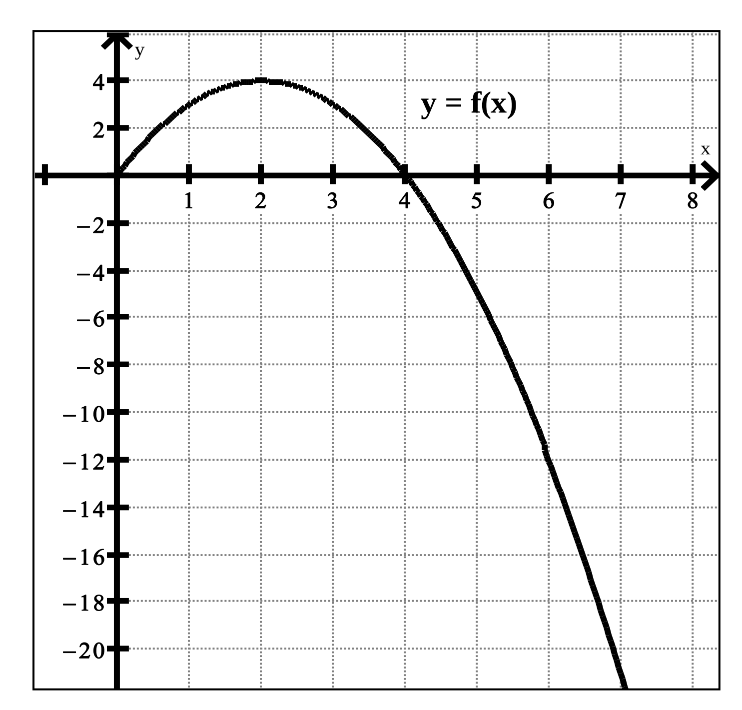
a1) $\int_0^4 f(x)\,dx$

a2) $\int_0^5 f(x)\,dx$

a3) $\int_0^6 f(x)\,dx$

a4) $\int_0^7 f(x)\,dx$

Hacer esto aplicando un conveniente "proceso de integración" y "leyendo" del **graf. f** los valores que necesite al efecto.



b) Dar una estimación del áreacomprendida por el **graf f** y el **eje x**, para cada uno de los intervalos que se indican a continuación: **[0, 4]; [0,5]; [0, 6]; [0, 7].**

c) Sabiendo que el **graf f** es el de una parábola, se pide:

c1) hallar la ley de **f**.

c2) Calcular $\int_0^4 f(x)\,dx$; $\int_0^5 f(x)\,dx$; $\int_0^6 f(x)\,dx$; $\int_0^7 f(x)\,dx$;

luego, indicar si las aproximaciones obtenidas en **(a)** son por exceso o por defecto.

d) Calcular las áreas indicadas en el ítem **(b)** e indicar el carácter de las aproximaciones.

e) Si ***x*** = ***x***(t) es la función de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, y **v** su velocidad entonces **v** = ***x´***(t). ([***x***]= km ; [**t**]= hs. y [**v**] = km/ hs.

e1) Si **v = f** (t) se pide explicar que representa (y porqué) c/u de las integrales en el item **(c)**.

Sugerencia: tener en cuenta que **v = f** (t) y **v = x´**(t); o sea, que **f** (t) = **x´**(t) ; aplicar el **TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL** (para la función de posición ***x = x(t), v(t) = x´(t)***

Δx = "***desplazamiento total***" entre t_1 y t_2 es:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} x'(t).dt = x(t_2) - x(t_1) .$$

e2) **Graficar la trayectoria de la partícula si x (0) = 2**, hallando para ello ***x*** = ***x***(t).

e3) Explicar que representa (y porqué) cada uno de los valores obtenidos en el item **(d).**

➢ Cambio total o variación total en procesos a velocidad variable.

Para resolver problemas donde la incógnita es el "*cambio o variación total*" debida a un "*proceso de cambio*" tenemos un importante resultado teórico en el que se tiene un principio válido tanto para *razones de cambio* en las ciencias naturales como en las sociales.

⊖ TEOREMA del CAMBIO TOTAL

> ***En un proceso de cambio:***
>
> ***" la integral de la razón de cambio es el cambio total "***

De otra forma, si **z = f (t)** es la función que describe un proceso para cada **t** en **[a; b]** y **v** la ***velocidad del proceso,*** entonces **v = f´(t)** y **Δf,** la ***variación o cambio total*** de **f,** es:

$$\Delta f = \int_a^b v(t).dt = \int_a^b f\,'(t).dt = f(b) - f(a)$$

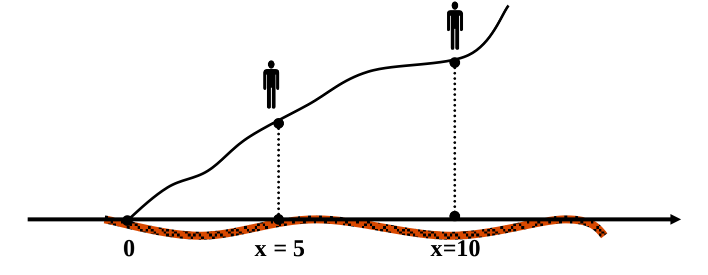
En los problemas que siguen se sugiere tener en cuenta este teorema.

14) a) Si **w´**(t) es la razón de crecimiento de un niño en Kg. por años, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t).dt$?

b) Si se fuga aceite de un tanque a razón de **r = *r***(*t*) lts./min. **,** ¿ qué representa $\int_0^{120} r(t).dt$?

c) Una población de abejas se inicia con **100** ejemplares y se incrementa a razón ***p´(t)*** especímenes por semana, ¿ qué representa $\int_0^{12} p'(t).dt$ **+ 100 ? .**

15) Si ***f ´*(x)** es la pendiente de una cuesta a una distancia de ***x*** metros del principio de la misma, ¿ qué representa $\int_5^{10} f\,'(t).dt$?



16) Una partícula se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante t es **v**(t) **= -** 6t ^{2} **+** 18 t (m/sg); **(a)** ¿cuánto se ***desplaza*** esta partícula en cada uno de los períodos de tiempo que se indican a continuación: $0 \le t \le 2$; $0 \le t \le 3$; $0 \le t \le 4$; $0 \le t \le 4{,}5$; $0 \le t \le 5$? ; **(b)** ¿qué **distancia** recorre en cada uno de tales períodos?.

17) Si ***v****(t)* = **-** 6t ^{2} **+** 18 t *(ls /h)* representa la velocidad con que entra(sale) agua de un tanque que inicialmente tiene **25** ls. de agua ; se pide:

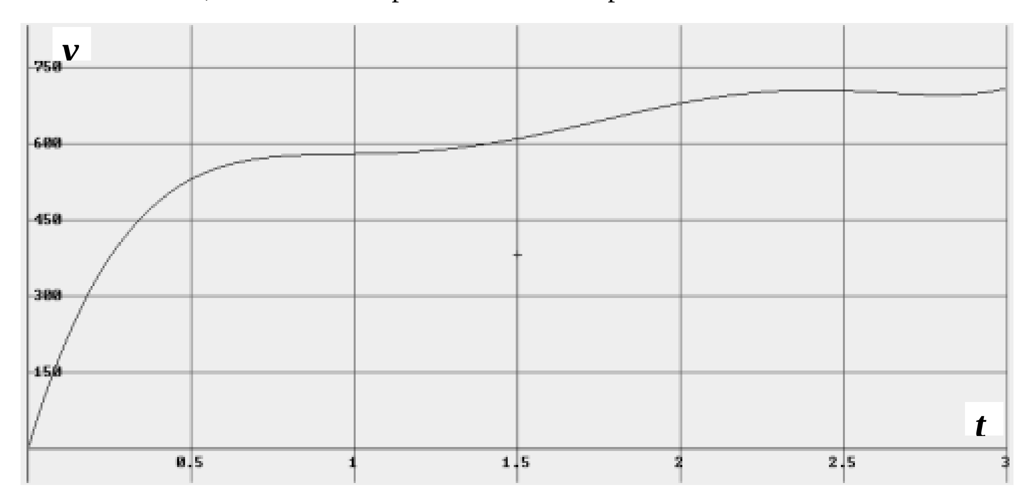
(a) determinar la variación de volumen en el tanque en los períodos de tiempo que se indican a continuación*:* $0 \le t \le 2$; $0 \le t \le 3$; $0 \le t \le 4$; $0 \le t \le 4{,}5$.

(b) determinar el volumen total de agua en el tanque a las **2 ; 3; 4 y 4** ½ hs.

(c) el tanque, ¿se vacía en algún instante?, ¿cuándo?.

18) Sea $\mathbf{v} = \dfrac{2}{(10-2t)^2}$; $[v] = \dfrac{mg}{seg.}$ la velocidad con que cierta masa de soluto se disuelve en un solvente. Si la masa de soluto originariamente puesta en contacto con el solvente es de **0,4** mg . y en ese instante no había soluto en el solvente y esa cantidad esta muy lejos del punto de saturación, ¿en qué instante estará disuelta toda la masa? .

19) La gráfica adjunta muestra el registro de la tasa de "disolución" en [mg/hs.] de un soluto en un solvente, durante las **3** primeras horas de puestos ambos en contacto.



- Proponga y ejecute un proceso que le permita dar un valor aproximad de la masa total *disuelta* al cabo de las 3 hs .
- ¿Cómo mejoraría la aproximación?. ¿Cómo obtendría el valor exacto?. ¿Puede obtener el valor *exacto*?, ¿porqué?,

20) si el gráfico del ejercicio (**17)** representa la densidad lineal (en [mg/ms.]) en cada punto de una varilla de acero, la cual tiene **3** metros de largo.

- Ejecute un proceso que le permita dar un valor aproximado de la masa de la varilla.
- ¿Cómo mejoraría la aproximación?. ¿Cómo obtendría el valor exacto?. ¿Puede obtenerlo?

21) La velocidad de un móvil que avanza en línea recta se lee en su velocímetro a intervalos de diez segundos y se registra en una tabla. Usar esta tabla para dar una estimación de la distancia recorrida en **100** segundos.

t (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
v (m/s)	40	48	52	55	65	70	65	65	60	55	50

22) Se da la función velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encontrar el desplazamiento y la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado en cada caso. Graficar la trayectoria.

a) $v(t) = -3t + 6$ en : $0 \le t \le 2$; $0 \le t \le 4$ y $0 \le t \le 5$; siendo $x(0) = 0$

b) $v(t) = 3t^2 - 6t + 3$ en : $0 \le t \le 1$ y $0 \le t \le 2$; siendo $x(0) = 0$.

23) Un automovilista viaja hacia el campo desde una ciudad de tránsito muy congestionado; comienza a paso de tortuga y, conforme el tránsito disminuye acelera gradualmente. El conductor (para entretenerse) cada ½ hora registra la velocidad a la que va. Con sorpresa al cabo de un tiempo (y varias anotaciones) observa que los registros muestran un "patrón" el cual (haciendo rápidos cálculos mentales) le permite concluir que está viajando a una velocidad $v = 8t^2$ (*Km/ hs.)*. Si los cálculos de este automovilista estuvieran bien; ¿que *distancia* había recorrido a las 3hs. de haber salido si durante ese tiempo no para nunca?. Si el lugar al que va está a **243** Km. de donde partió y sigue a esa velocidad hasta llegar, ¿a que velocidad llega?.

24) Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t^2.e^{-t}$ mts. por segundos, ¿cuánto se desplaza en **3** segundos ? , ¿ qué distancia recorre en **3** segundos?.

25) La función $\delta(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ da, en kilogramos por metro, la densidad lineal de una varilla cuya longitud total es de **4** m. y para la cual ***x*** se mide en metros desde uno de los extremos de la varilla. Se pide, encontrar la masa total de la varilla.

26) Una cuerda no homogénea de **3** metros de largo está hecha de un material que es muy liviano cerca del extremo izquierdo y muy pesada cerca del derecho. Si se sabe que a una distancia **"x"** del extremo izquierdo su densidad es de $5x^2$ gr./m ; hallar la masa total de la cuerda.

27) Una población de animales crece a razón de "**200 + 50 t** " animales al año (t medido en años), ¿en cuánto aumenta la población entre el cuarto y el décimo año?. ¿cuántos animales habrá al cabo de **10** años si no muere ninguno e inicialmente había **2** ?.

28) Una población de bacterias se inicia con **400** ejemplares y crece a razón de $r(t) = 450.200 \, . \, e^{1.13\,t}$ bacterias por horas. ¿ cuántas habrá después de tres horas ? .

29) Suponga que **h** es una función tal que $h(1) = -2$; $h'(1) = 2$; $h''(1) = 3$; $h(2) = 6$; $h'(2) = 5$; $h''(2) = 13$ y h'' es continua en todo **R**. Evaluar $\int_1^2 h''(u)\,du$.

➢ Longitud arco de curva:

30) Calcular la longitud de cada uno de los siguientes arcos de curva.

a) $y = \frac{x^2}{2}$ $\quad 0 \le x \le \sqrt{3}$

b) $y = \sqrt{x^3}$ $\quad 0 \le x \le \frac{32}{9}$

b) $\begin{cases} x = 4\cos t - 1 \\ y = 4\,\text{sen}\,t + 1 \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le \pi/4$

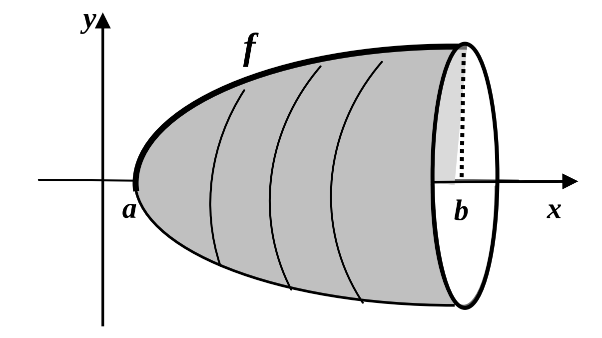
d) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t^2/2 \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 1$

➢ Volumen de un sólido de revolución:

31) Al hacer girar alrededor del **eje x** la **región** comprendida entre una curva gráfica de una función **f** continua y definida positiva en [a; b]; se genera un sólido "**S**" , llamado "sólido de revolución" , cuyo volumen se calcula a través de la siguiente integral:

$$\text{vol. S} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Para las siguientes funciones se pide graficar el sólido que generan al girar alrededor del **eje x** y calcular su volumen usando la integral indicada. En caso de resultar un sólido "conocido" , verificar que el resultado obtenido coincide con el de la geometría clásica.



a) $f(x) = x - 3$; **Df = [3; 8] .**

b) $f(x) = 2\sqrt{x}$; **Df = [0; 4] .**

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; **Df = [-3; 3] .**

d) $f(x) = e^x$; **Df = [0; 1] .**

e) la región limitada por $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$

➢ TRABAJO.

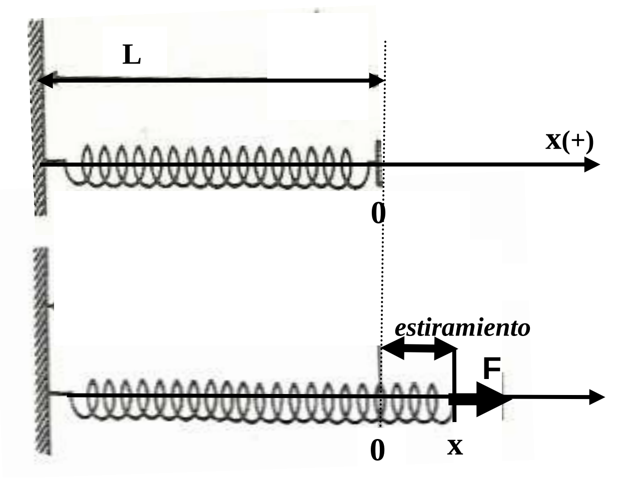
32) Para un gas perfecto cuando la expansión es ***isotérmica*** entonces se cumple la ley de Boyle-Mariotte : **$p\ v =$ cte** ; en particular , **$p\ v = n\ R\ T$**
(**p** = presión ; **v**= volumen ; **R**= cte de los gases ; n = nro de moles ; **T = Temperatura (cte)**)

a) V ó F, justificar: para una expansión isotérmica, **$p = f(v)$** ; **f** continua en **R^+.**

b) Sabiendo que el trabajo requerido para ***expandir isotérmicamente*** un gas perfecto desde un volumen v_1 a otro v_2 se calcula con la siguiente expresión: $W = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv$,
se pide resolver la integral, hallar una expresión para **W .**
Luego, discutir el signo **W** .

33) <u>Ley de Hooke</u>

La ley de Hooke expresa que la fuerza (**F**) de recuperación de un resorte es proporcional a la "elongación" sufrida en el mismo: **$F = k \cdot x$** (**k** = cte del resorte ó cte de elasticidad**).**



Consideramos un resorte cuyo extremos izquierdo está fijo mientras el derecho es libre de moverse a la largo de la recta de acción del resorte. El resorte, en ***reposo*** (ni comprimido ni estirado) tiene una longitud **L** a la que llamamos ***longitud natural***. Si está en reposo decimos que está en su ***posición de equilibrio*** En estas condiciones se introduce un *<u>sistema de referencia</u>* (**eje x**) a lo largo de la línea del resorte, con el *<u>sentido positivo</u>* (+) hacia la derecha y el *<u>origen</u>*, **O**, en el extremo derecho del resorte cuando esta en la ***<u>posición de reposo</u>*.** Con **x** indicamos la ***<u>posición</u>*** del *<u>extremo derecho del resorte</u>* a partir de **O** y a lo largo del **eje x**. Así construido el sistema **x** puede ser ***<u>positiva</u>***, ***<u>cero</u>*** o ***<u>negativa</u>*** según el extremo móvil esté a la ***<u>derecha</u>***, ***<u>en</u>***, o la ***<u>izquierda</u>*** de su ***<u>posición de equilibrio</u>*** **(x= 0).**

El sistema se pone en movimiento *forzando* al extremo derecho a abandonar la posición de equilibrio a través de una fuerza **F** cuya intensidad y sentido depende de **"x"** según la **ley de Hooke .** Para estirar el resorte la fuerza debe actuar hacia la derecha (**x >0).** Para comprimir el resorte la fuerza debe actuar hacia la izquierda (**x < 0).**

Si con **W** indicamos el trabajo realizado para estirar (o comprimir) un resorte **"ℓ cm"** respecto a su posición de equilibrio**,** entonces $W = \int_0^{\ell} F(x) \cdot dx$ con $F(x) = k \cdot x$

a) Calcular el trabajo realizado sobre un resorte cuya constante elástica es **k = 1, 8** erg**/**cm, si el mismo mide **7 cm.** y se lo ha estirado hasta alcanzar **9 cm.**

b) Calcular el trabajo realizado para comprimir un resorte **6 cm.** desde su posición de reposo si se sabe que para comprimirlo **2,5 cm** la fuerza requerida es de **12 kg.**

➢*Valor promedio de f sobre [a , b]*

Dado un conjunto *discreto* de ´n´ números $y_1 , y_2 , y_3 ,\ldots\ldots, y_n$ su *promedio* es:

$$y_{prom} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Pero , ¿cómo calculamos el *promedio* de un *continuo* de números , o sea de un conjunto de números que viene dado por una función $y = f(x)$ en un intervalo [a,b] ?.
Por ejemplo, ¿cómo calculamos la temperatura *promedio* de un día, T_{porm} , si conocemos la función $T = f(t)$, t en horas (minutos ó segundos) que corresponde a la misma en ese día?.
Para hacer este cálculo dividimos el intervalo en ´n´ partes iguales, cada una de ellas de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; elegimos ´n´ puntos $c_1 , c_2 , c_3 ,\ldots\ldots, c_n$, uno en cada subintervalo y calculamos el promedio de $f(c_1) , f(c_2) , f(c_3) ,\ldots\ldots, f(c_n)$: $\frac{f(c_1) + f(c_2) + \ldots\ldots + f(c_n)}{n}$.
Por ejemplo si f es la función temperatura y n= 24, esto significa que tomamos lecturas de temperatura cada hora y las promediamos.
Si despejamos ´n´ de Δx y reemplazamos en el promedio anterior queda:

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + \ldots\ldots + f(c_n)}{n} = \frac{\Delta x}{(b-a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \frac{1}{(b-a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x$$

Si hacemos que ´n´ crezca calculamos el promedio de una cantidad mayor de números (por ejemplo, promediando lecturas de temperatura cada minuto, o cada segundo). En el límite tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(b-a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x = \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x).dx$$

Definimos entonces el *valor promedio de f sobre [a , b]* , como :

$$f_{prom} = \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x).dx$$

ACTIVIDADES

1) Hallar el valor promedio de $f(x) = 1+x^2$ sobre [-1,2] .¿ Existe algún número $c \in [-1,2]$ tal que $f(c) = f_{prom}$?

2) Dada $x = f(t)$, función posición de un móvil, demostrar que la *velocidad media* del móvil en $[t_1 , t_2]$ es la misma que el *promedio de velocidades* (v_{prom} con $v = x'$) en el mismo intervalo. (sugerencia: usar el teorema del cambio total).

3) La velocidad v de la sangre que fluye en un vaso de radio R y longitud l , a una distancia r del eje central es:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta.l} \cdot \left(R^2 - r^2\right)$$

donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η la viscosidad de la sangre.
Se pide: hallar la velocidad promedio, v_{prom} , sobre el intervalo $0 < r < R$
Compare la velocidad promedio con la velocidad máxima.

Ciertas aplicaciones del cálculo conducen de manera natural a la formulación de integrales en las que:

1.- El intervalo de integración no es acotado; tiene la forma: **[a ; + ∞) ó (- ∞; b] ó (-∞ ; + ∞)**

2.- El integrando tiene una discontinuidad infinita en algún punto **c :** $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$

O sea, de integrales de la forma: $\int_1^{\infty} f(x).dx$; $\int_{-\infty}^{4} f(x).dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx$; $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}.dx$

Estas integrales reciben el nombre de **"Integrales Impropias".**

<u>Ejemplo 1</u>: Integral Impropia

(1ra especie- intervalo no acotado)

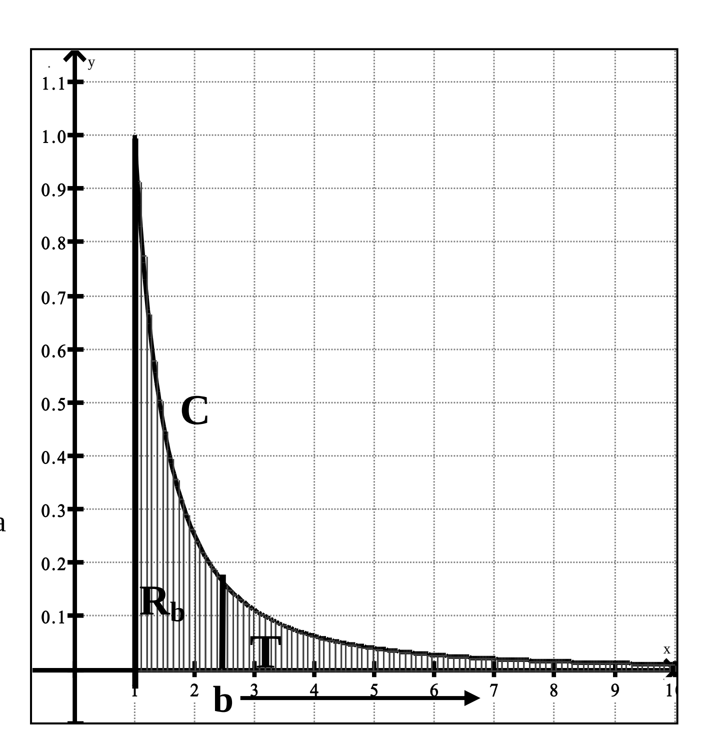
Dada **f : [1 ; + ∞) → R** con **f**(x) = $\frac{1}{x^2}$,

si R_b es la región "acotada" por la curva **C = graf f** , el **eje x** y las rectas *x* **= 1;** *x* **= b**

entonces, **área R_b** = $\int_1^{b} \frac{1}{x^2}.dx$. (**b** >**1**)

área R_b = $1 - \frac{1}{b}$ (verificar) .

Dada **T** , la región "no acotada" comprendida entre la curva **C ,** el **eje x** y la recta *x* **= 1,** lo "razonable" es suponer que esta región no tiene "*área finita*" .
Sin embargo, y aunque resulte sorprendente, existen regiones no acotadas con *áreas finitas*.



<u>Problema</u>: ¿ área T ?
Para analizar si este área existe (o no), lo que hacemos es calcular que sucede con el **área R_b** cuando **b → +∞** . Si este límite es **finito** (**L**∈**R**) ; decimos que **área T = L** .

<u>Calculamos</u>: $\lim_{b\to+\infty} \text{área}R_b = \underbrace{\lim_{b\to+\infty}\left[\int_1^{b} \frac{1}{x^2}.dx\right]} = \lim_{b\to+\infty}\left[1-\frac{1}{b}\right] = 1$

<u>Concluimos</u>: **área T = 1** (= $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx$)

<u>Definición Integrales Impropias</u> (1ra especie)

<u>Caso 1</u>: dom f = (a; +∞): $\int_a^{\infty} f(x).dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\int_a^{b} f(x).dx\right]$ (**b** > **a**)

<u>Caso 2</u>: dom f = (- ∞ ; b): $\int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^{b} f(x).dx\right]$ (**a** < **b**)

<u>Caso 3</u>: dom f = (- ∞ ; ∞): $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \left[\int_{-\infty}^{c} f(x).dx\right] + \left[\int_c^{\infty} f(x).dx\right]$

(sii <u>ambas integrales "convergen</u>" para cualquier elección conveniente de **c**)

Integrales Impropias

- Si el límite existe decimos que la integral impropia "converge". **(ej. 1)**
- Si el límite no existe decimos que la integral impropia "diverge".
- Si el límite es "infinito" decimos que la integral impropia "diverge a infinito".

ACTIVIDADES:

1) Evaluar las siguientes integrales impropias de 1ra especie, indicar V ó F **:**

a) $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx = \frac{1}{3}$

b) $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{x^2}.dx = \frac{1}{3}$ (¿puede prever este resultado sin calcular la integral?; ¿porqué?)

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{2}$ (¿puede prever este resultado sin calcular la integral?; ¿porqué?)

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}.dx = \pi$

f) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.dx = +\infty$

g) $\int_1^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}.dx = +\infty$ (**<u>sug</u>:** usar la siguiente igualdad $\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$)

2) Para el **Caso 3,** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \left[\int_{-\infty}^{c} f(x).dx\right] + \left[\int_{c}^{\infty} f(x).dx\right]$

(sii <u>ambas integrales "convergen"</u> para cualquier conveniente elección de **c**)

podemos preguntarnos si no habrá otra forma "más simple" de calcular esta integral como por ejemplo, con la siguiente expresión: $\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x).dx$

La respuesta es; NO. Para justificar esta respuesta basta mostrar que no da el mismo resultado.

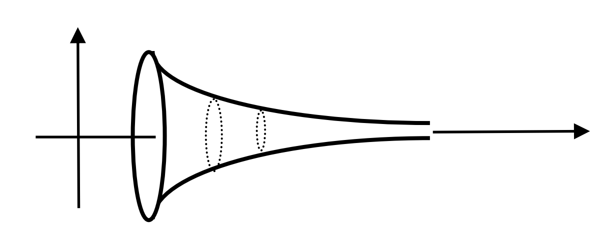
Se pide: mostrar que $\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} \frac{1+x}{1+x^2}.dx = \pi$ mientras que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}.dx$, **<u>diverge</u>**.

(**<u>sug</u>:** tomar **c = 1** ; usar ejercicio **(g)** **).**

3) Muestre que el área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ es "infinita".

4) Calcule el volumen del "cuerno de Gabriel" si se sabe que este volumen es finito.

* cuerno de Gabriel**:** sólido generado al girar alrededor del eje x la región determinada por la curva $y = \frac{1}{x}$ y el eje x , para $x \geq 1$

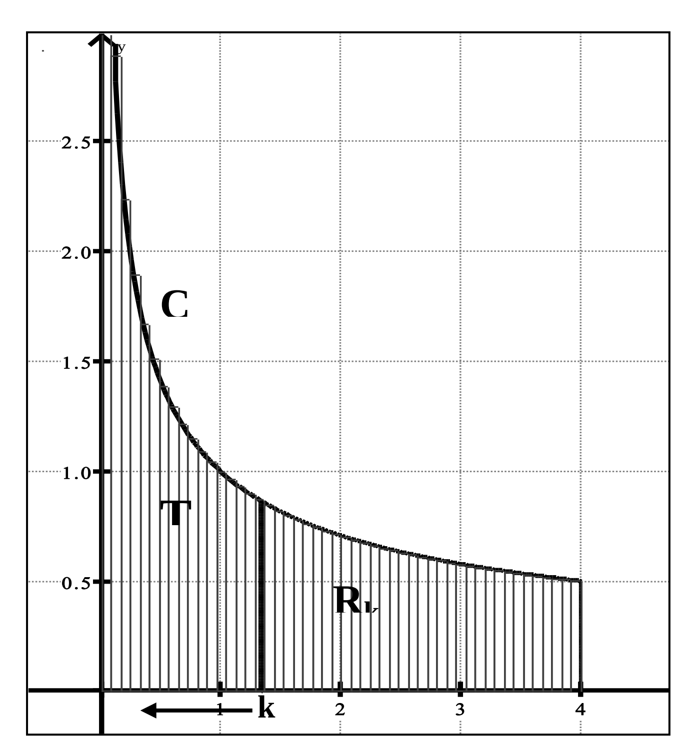


Ejemplo 2: **Integral Impropia**
(2da especie- función discontinua)

Dada **f : (0 ; 4] → R** con $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,
si R_k es la región "acotada" por la curva
C = graf f, el **eje x** y las rectas $x = k$; $x = 4$
entonces, **área** $R_k = \int_k^4 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx$. (**a >0**)

área $R_k = 4 - 2.\sqrt{k}$ (verificar) .

Dada **T**, la región "no acotada" comprendida entre **C**, el **eje x** y las rectas $x = 0$, $x = 4$;
lo "razonable" es suponer que esta región no tiene "*área finita*" .
Sin embargo, y aunque siga siendo sorprendente, existen regiones de este tipo con *áreas finitas*.



Problema: ¿ **área T** ?
Para analizar si este área existe (o no), lo que hacemos es calcular que sucede con el **área** R_k cuando $k \to 0$. Si este límite es finito ($L \in R$) ; decimos que **área T = L**

O sea; ***calculamos***: $\lim_{k \to 0} R_k = \underbrace{\lim_{k \to 0^+} \left[\int_k^4 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx \right]} = \lim_{k \to 0^+} \left[4 - 2\sqrt{k} \right] = 4$

concluimos: **área T =** 4 $\left(= \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx \right)$

Definición Integrales Impropias (**2da especie**)

Caso 1: **dom f = (a; b]** , $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$; $\int_a^b f(x).dx = \lim_{k \to a^+} \left[\int_k^b f(x).dx \right]$

Caso 2: **dom f = [a; b)** , $\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$; $\int_a^b f(x).dx = \lim_{k \to b^-} \left[\int_a^k f(x).dx \right]$

Caso 3: **dom f = [a; b] – { c }**, $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

$$\int_a^b f(x).dx = \left[\int_a^c f(x).dx \right] + \left[\int_c^b f(x).dx \right]$$

(sii ambas integrales impropias del lado derecho, "convergen")

5) Evaluar las siguientes integrales impropias de 1ra especie, indicar V ó F **:**

a) $\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2}.dx = +\infty$ b) $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2}.dx = +\infty$

c) $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}}.dx = \frac{3}{2}(1 + \sqrt[3]{3})$

7 — Ecuaciones Diferenciales

7.1 Introducción

La descripción matemática de procesos o fenómenos de distinta naturaleza se hace mediante funciones que muestran la relación de dependencia entre las magnitudes del caso. Conocida ***f*** (*función del proceso*) se sabe que para hallar la velocidad del mismo basta calcular $f\,'$ y para hallar su aceleración, $f\,''$.
A menudo debemos resolver problemas que de alguna manera podemos llamar *inversos* del anterior; o sea, problemas donde se conoce la velocidad ($f\,'$) *y/ó* la aceleración ($f\,''$) a la que se desarrolla el proceso y la ***incógnita*** es ***f***, la función del proceso. En general, y en los hechos, puede que velocidad y aceleración tampoco sean conocidas pero que, investigando, se pueda describir por medio de una ***ecuación*** la ***"relación entre f y sus derivadas"*** .

*__Ecuación Diferencial__ **:** ecuación donde la **incógnita** es una **función** y en la que aparecen una o más **derivadas** de la función incógnita.

En este capítulo nos ocupamos de las **Ecuaciones Diferenciales**, los distintos tipos y métodos de resolución de las mismas. Vemos problemas de naturaleza análoga a la siguiente:

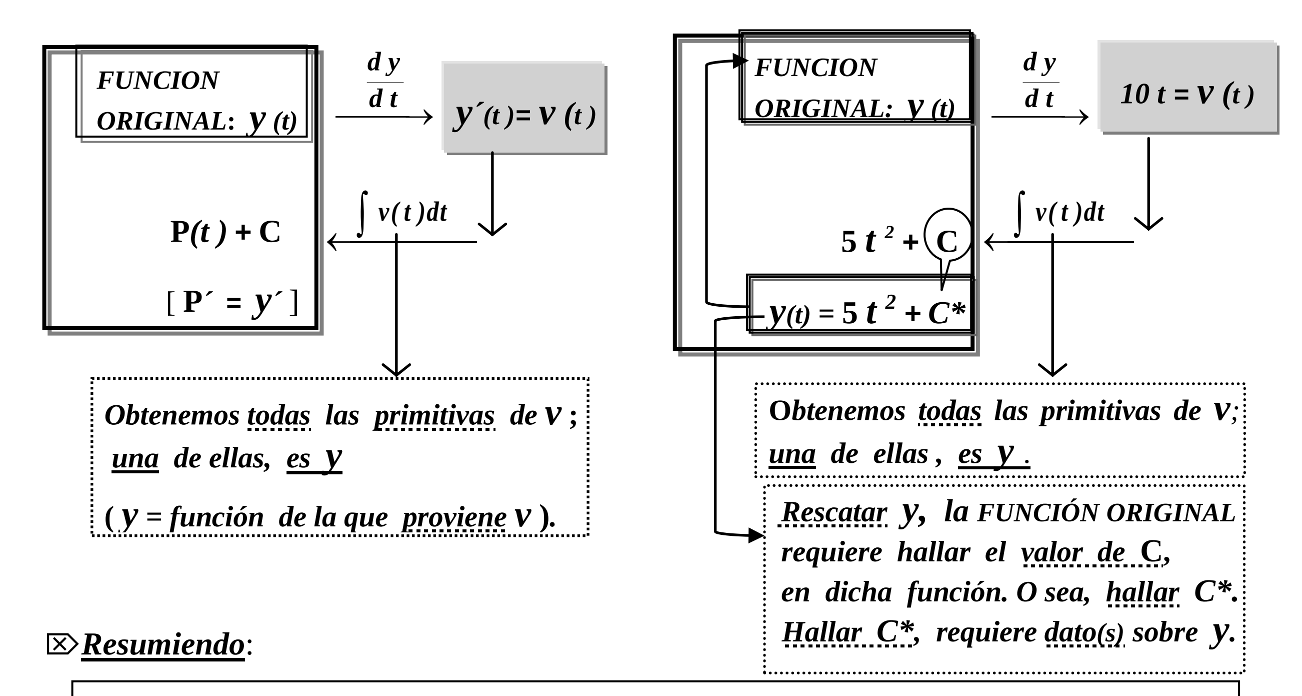
Ej.1: *__*dato:*__ $\boxed{y' = v(t)}$ (v = **v**elocidad) → ***__incógnita:__*** $y = f(t)$ tal que $f\,'(t) = v(t)$

Ej.2: *__*dato:*__ $\boxed{y'' = a(t)}$ (a = **a**celeración) → ***__incógnita:__*** $y = f(t)$ tal que $f\,''(t) = a(t)$

Ej. 3: *__*dato:*__ $\boxed{y' = 0.1\ y}$ → ***__incógnita:__*** ***y*** tal que,
la razón de cambio de ***y*** sea proporcional a ***y***.

Ej.1: la resolución de este problema requiere hallar una función ***f*** tal que $f\,' = v$;
en otras palabras, **una primitiva de *v*** .

⌦ Ya sabemos obtener **primitivas** de una función; que para ello debemos **integrar** la función.
Sabemos también que al integrar no obtenemos **una** sino **infinitas primitivas.**
Así, en el caso de un problema "real", vemos que para hallar la solución debemos **integrar** la función dato y hacer **"**algo más**"** **.**



⌧***Resumiendo***:

El tipo de *problema* del que nos vamos a ocupar tiene, en esencia, la siguiente estructura:
* **Incógnita**: ***f*** *(una función)*
* **Datos**: { ***ecuación diferencial*** (*la que describe la relación entre **f** y sus derivadas*) ; ***dato** $_{(s)}$ **inicial** $_{(s)}$* (*para determinar una solución del problema*).

Problema 1:

*Se comienza a llenar un tanque de **100 ls**. con agua que sale de una canilla a una velocidad* ***v*** (t) =**3 t²** , [*v*] = lts./h.. *Hallar **V** = **V(t)** si el tanque tiene **6 ls** al comenzar a llenarlo.*

* ***proceso:*** llenado de un tanque de ***100 ls.*** de capacidad.
Función del proceso: **V**=*V*(t) con **V =** volumen *de agua en el tanque al instante* t.

* ***incógnita***: **V**=*V*(t)

* ***datos***: $v = 3\,t^2$, ***velocidad del proceso*** $\Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = 3\,t^2$

$V(0) = V_o = 6$ *(ls)* $\Rightarrow$ *dato inicial sobre la función incógnita*

Problema reformulado: $\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = 3\,t^2 & \text{(ecuación diferencial)} \\ V(0) = 6 & \text{(dato inicial)} \end{cases}$

* ***Resolución*** : ***1ro)*** resolvemos la ecuación diferencial → hallamos ***todas las primitivas de v*** .

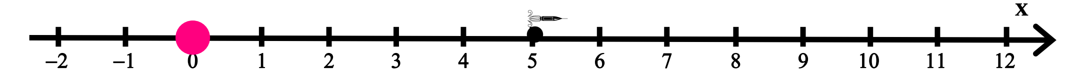
$$\frac{dV}{dt} = 3\,t^2 \xrightarrow{\text{todas las primitivas}} \int 3.t^2\,.dt = t^3 + C$$

2do) determinamos ***C**** / $V(t) = t^3 + C^*$

$$V(0) = 0 + C^* \xrightarrow[\text{dato } V(0)=6]{} C^* = 6$$

3ro) **Rta**: la función solución es: $V(t) = t^3 + 6$.

Problema 2:



*Una partícula **P** se desplaza según un movimiento rectilíneo y con aceleración **a = - 6 t*** $[a] = \frac{cm}{seg^2}$. *Si la velocidad inicial es* $\boldsymbol{v_o = 12}$ *y al momento de comenzar a moverse la*

* ***proceso:*** moviendo rectilíneo con aceleración **no constante**.
Función del proceso: **x** = *x* (t) con **x** = *posición de **P** al instante **t** .*

* ***datos***: ***a* = - 6 *t*** ; *aceleración de **P*** ⇒ ***x´´(t) = - 6 t***
x_o = **5** (*posición inicial*) ⇒ ***x(0) = 5***
v_o = ***12*** (*velocidad inicial*) ⇒ ***x´(0)= 12***

* ***incógnita****:* **x** (1); **x** (2); **x** (3) ⇒ ***incógnita "oculta"***: **x** = *x* (t).

Problema reformulado:	***x´´ = - 6 t***	(***ecuación diferencial***)
	x (0) = 5	***(condiciones iniciales)***
	x´ (0) = 12	

* ***Resolución*** :

El ***dato*** es la ***derivada segunda*** de la función incógnita; así, ***rescatar*** la función requiere ***integrar dos veces***. Como consecuencia de esto, tenemos ***dos constantes*** en la función solución (una por cada integral), de allí la necesidad de ***dos condiciones iniciales***.

Función Original: ***x* = *x*** (t) ; ***x* = *P***(t ; C_1 ; C_2)	$\xrightarrow{dx/dt}$ / $\xleftarrow{\int x'(t).dt}$	***x´ (velocidad)*** ***x´* = v** (t; C_1)	$\xrightarrow{dv/dt}$ / $\xleftarrow{\int x''(t).dt}$	***x´´ (aceleración)*** ***x´´* = *a*** (t)

x = ***x*** (t) ; ***x*** = **-** t^3 **+** C_1 t **+** C_2	$\xrightarrow{dx/dt}$ / $\xleftarrow{\int x'(t).dt}$	***x´* = v** (t) ; ***x´*** = **-3** t^2 + C_1	$\xrightarrow{dv/dt}$ / $\xleftarrow{\int x''(t).dt}$	***aceleración*** ***x´´ = - 6 t***

♦ $x = -t^3 + C_1 t + C_2 \Rightarrow x(0) = C_2 \xrightarrow{1er\ cond. \to x(0)=5} C_2 = 5$

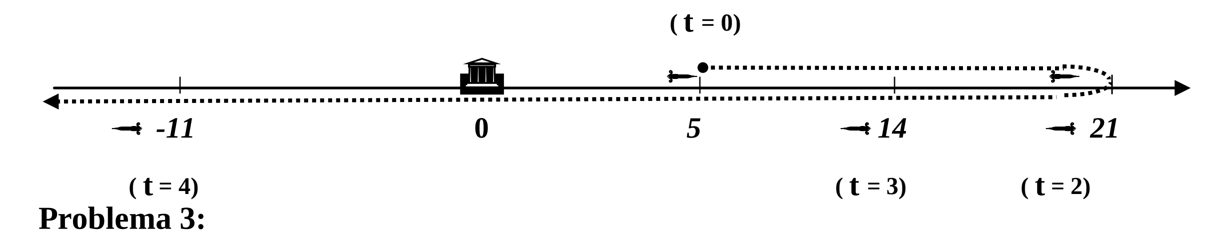
♦ $x' = -3t^2 + C_1 \Rightarrow x'(0) = C_1 \xrightarrow{2da\ cond. \to x'(0)=12} C_1 = 12$

Rta 1: $x(t) = -t^3 + 12t + 5$. ($v(t) = x'(t) = -3t^2 + 12 \to v(2) = 0$)

Rta 2: **t = 1** → ***x (1) = 16*** ⇒ ***P*** está ***16 cm.*** a la ***derecha*** del origen. (***v(1)* > 0**)
t = 2 → ***x (2) = 21*** ⇒ ***P*** está ***21 cm.*** a la ***derecha*** del origen (***v***(2) = **0**)
t = 3 → ***x (3) = 14*** ⇒ ***P*** está ***14 cm.*** a la ***derecha*** del origen (***v(3)* < 0**)
t = 4 → ***x (4) = -11*** ⇒ ***P*** está ***11 cm.*** a la ***izquierda*** del origen

Trayectoria: ***P*** parte de $x_o = 5$ y avanza hacia la derecha durante ***2 seg.***, instante en que se "para" , $v(2) = 0$, a ***21 ms***. del origen. A partir de allí la velocidad es negativa ($v(t) < 0$, $\forall$ $t > 2$), lo que indica que a los ***2 seg***. pega la vuelta y comienza a moverse avanzando hacia la izquierda. A los ***3 seg.*** todavía no llegó al origen, está a ***14 cm.*** del mismo y a su derecha. A los ***4 seg.*** se encuentra a ***11 cm.*** del origen pero, a su izquierda.

Observación: averiguar cuando ***P*** pasa por el origen requiere resolver la ecuación $x(t^*) = 0$, ecuación que no podemos resolver sin auxilio de la tecnología pues no conocemos su "*resolvente*". Si no necesitamos mucha precisión en el valor de t^* entonces, a simple vista, vemos que la partícula pasa por el origen en algún momento entre los ***3*** y ***4 seg***. de iniciado el movimiento.



Problema 3:

Para hallar la función ***f*** *que* **modeliza** *el proceso de disolución de cierto soluto en un solvente se procede a medir, cada hora y durante 5 horas, la cantidad de masa de soluto disuelta hasta el momento de tomar la muestra. Se organiza la información obtenida en una tabla, la que se adjunta. (en otras palabras, se obtiene la representación "numérica" de* ***f*** *).*

Se pide investigar la "nube de puntos/dato" en busca de algún tipo de "regularidad" o "patrón" en el conjunto de puntos que la forma. En caso de detectar "algo", usar este dato para dar la ley de ***f*** *con fórmula,* ***m = f(t). (m = masa disuelta en t hs.*** *, [m]= gr)*

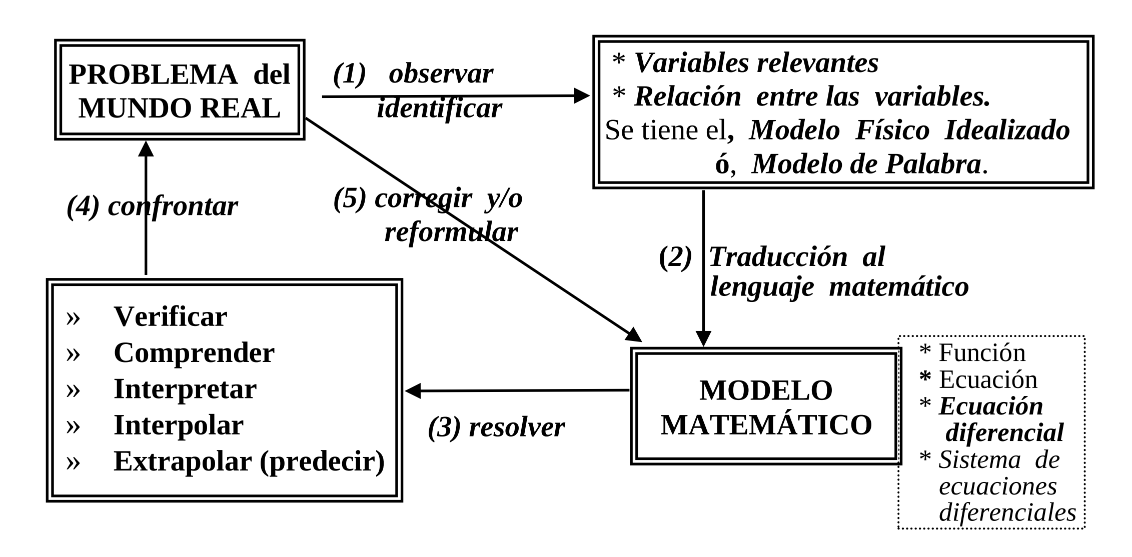
NOTA: se sabe que el proceso se desarrolla en forma regular y continua durante las 5 hs.

t	$m = f(t)$
0	$m_o = 10.00$
1	$m_1 = 11.00$
2	$m_2 = 12.10$
3	$m_3 = 13.31$
4	$m_4 = 14.64$
5	$m_5 = 16.10$

En este caso el problema planteado consiste en buscar el "***modelo matemático***" de un cierto proceso a partir de ***datos experimentales***; o sea, lo que en particular se ha dado en llamar, el ***"modelo empírico"*** .

Modelo Empírico: modelo obtenido por *observación*, *experimentación* o *simulación* del proceso. O sea, es un *modelo matemático* basado en la *obtención y registro metódico de datos*; posterior búsqueda de un *patrón de comportamiento* para la *nube de puntos* que se obtenga. Muchas veces este proceso desemboca en una "***ecuación diferencial***"

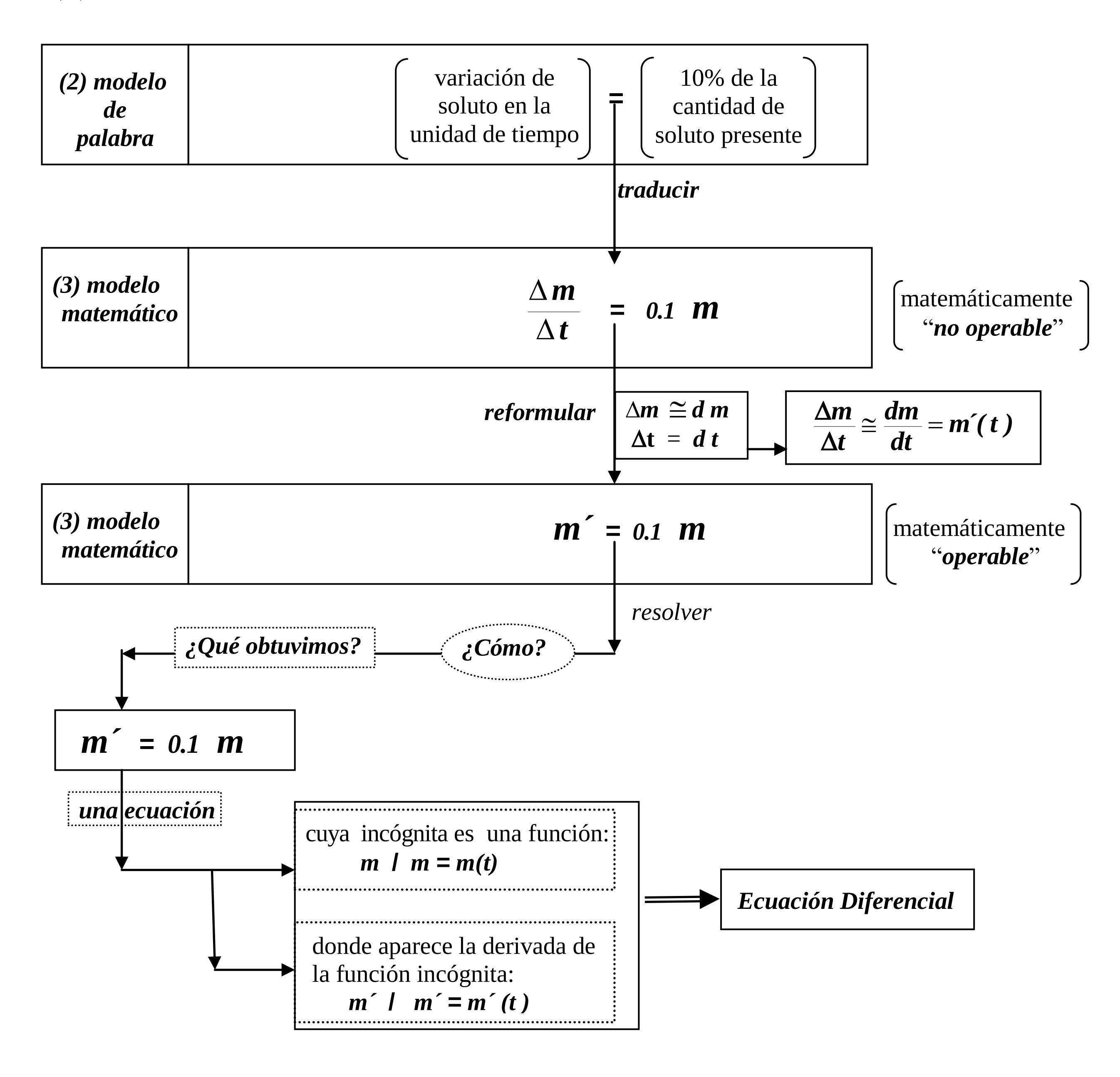
El siguiente cuadro resume el proceso descripto.



⌧ Procedemos a recorrer este circuito, comenzando por **(1)**

			(1) OBSERVACIÓN
t	$m = f(t)$	$\Delta m_i = m_i - m_{i-1}$	relación entre Δm_i y m_{i-1}
0	$m_o = 10.00$	-------	-------------
1	$m_1 = 11.00$	$\Delta m_1 = 1$	$= 10\%\ m_o$
2	$m_2 = 12.10$	$\Delta m_2 = 1.1$	$= 10\%\ m_1$
3	$m_3 = 13.31$	$\Delta m_3 = 1.21$	$= 10\%\ m_2$
4	$m_4 = 14.64$	$\Delta m_4 = 1.33$	$= 10\%\ m_3$
5	$m_5 = 16.10$	$\Delta m_5 = 1.46$	$= 10\%\ m_4$
i	m_i		
i+1	m_{i+1}	Δm_{i+1}	$= 10\%\ m_i$

(1) Relación entre las variables**:** $\Delta t = 1 \rightarrow \Delta m = 10\%\ m$



El modelo empírico finalmente resulta ser una "***ecuación diferencial*** " y, en consecuencia, la respuesta del problema planteado, ***una solución*** de dicha ecuación.

Pero, *¿cómo resolvemos esta ecuación*?. La misma es *distinta* a las vistas en los problemas anteriores pues en ella aparecen *relacionadas* la derivada y la propia función incógnita, ***m = m(t).***

En general en los problemas que desembocan en el planteo de una ecuación diferencial, dicha ecuación consiste (como en este caso) en una *relación* entre la función y una (o más) de sus derivadas. En tal caso la resolución de ecuaciones diferenciales se complica, no podemos simplemente "*rescatar*" la función a partir de sucesivas integraciones; más aún, existen ecuaciones para las cuales no existe forma o método conocido de encontrar la solución exacta, aunque teóricamente se haya probado que dicha solución existe. Sin embargo, para algunos tipos de ecuaciones diferenciales, existen métodos simples y efectivos para hallar la solución exacta.

En lo que sigue vemos algunos de estos métodos, para algunos tipos particulares de ecuaciones diferenciales

7.2 Definiciones y Conceptos Básicos

****Ecuación Diferencial*** **:** llamamos ecuación diferencial a toda ecuación donde la incógnita es una función y en la cual aparecen una o más derivadas de la función incógnita.

Según sea la función incógnita las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

Ecuaciones diferenciales ordinarias **- EDO**:
la incógnita es función de una variable; o sea, funciones de la forma: ***y*** = y(x) ; ***x*** = x(t).

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:
la incógnita es función de dos o más variables; o sea, funciones del tipo: ***z*** = f(x;y); ***w*** = f(x;y; z)

****Orden de una ecuación diferencial*** : es el orden de la derivada de *mayor orden* en la ecuación.

Ejemplos:

Ecuación Diferencial	*Incógnita*	*Tipo*	*Orden*
$V' = 3t^2$ (*Problema 1*)	$V = V(t)$	**EDO**	***1***
$x'' = -6t$ (*Problema 2*)	$x = x(t)$	**EDO**	***2***
$x' = 0.1\,x$ (*Problema 3*)	$x = x(t)$	**EDO**	***1***
$x^2 y'' + x\,y' - 4y = 0$	$y = y(x)$	**EDO**	***2***
$y'' - 3y' + 2y = 0$	$y = y(x)$	**EDO**	***2***
$y''' - 3y'' + 2y' = 0$	$y = y(x)$	**EDO**	***3***
$x + y\,y' = 0$	$y = y(x)$	**EDO**	***1***
$y' = y^{2/3}$	$y = y(x)$	**EDO**	***1***
$(y')^2 + 3y^3 = \operatorname{sen} x$	$y = y(x)$	**EDO**	***1***
$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f(x; y)$	***Der. Parciales***	***1***
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z} = \frac{-2mE}{h^2}.\psi$ ***Ecuación de Schrödinger. Modelo atómico para una partícula en R^3, en estado estacionario →***	$\psi = \psi(x; y; z)$ ψ no depende de t.	***Der. Parciales***	***2***
$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{-2mE}{h^2}.\psi$ ***Ecuación de Schrödinger. Modelo atómico para una partícula en R , en estado estacionario →***	$\psi = \psi(x)$ ψ no depende de t	**EDO**	***2***

* ***Solución de una Ecuación Diferencial :***

Dada una ecuación diferencial, decimos que la función ϕ es ***solución*** de la ecuación si ***al sustituir*** la función y las derivadas que aparecen en la ecuación, por ϕ y sus derivadas, la ecuación ***se satisface***; es decir, ***se verifica la igualdad***.

Ejemplos: verificar que las funciones indicadas son solución de la correspondiente ecuación.

Ecuaciones Diferenciales	***Incógnita***	***Orden***	***Solución general***	***Sol. particular***
$V' = 3t^2$ (*Problema 1*)	$V = V(t)$	1	$V(t) = t^3 + C$	$V(t) = t^3 + 6$
$x'' = -6t$ (*Problema 2*)	$x = x(t)$	2	$x = -t^3 + C_1 t + C_2$	$x = -t^3 + 4t + 5$
$x' = 0.1x$ (*Problema 3*)	$x = x(t)$	1	$x = C e^{0.1t}$	$x = 10\ e^{0.1t}$
$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$	$y = y(x)$	2	$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$	$y = x^2$
$y'' - 3y' + 2y = 0$	$y = y(x)$	2	$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$	$y = e^x - e^{2x}$
$y''' - 3y'' + 2y' = 0$	$y = y(x)$	3	$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3$	$y = e^x + e^{2x} + 3$
$x + y y' = 0$	$y = y(x)$	1	$x^2 + y^2 = C$	$x^2 + y^2 = 25$
$y' = y^{2/3}$	$y = y(x)$	1	$y = (\frac{x}{3} + C)^3$	$y = (\frac{x}{3} + 2)^3$
$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\lambda.\psi$	$\psi = \psi(x)$	2	$\psi = A\ \text{sen}(\sqrt{\lambda}\ t) + B\cos(\sqrt{\lambda}\ t)$ ó $\psi = C\ \text{sen}(\sqrt{\lambda}\ t + \alpha)$	$\psi = 3\cos(\sqrt{\lambda}\ t)$

<u>Verificación de soluciones:</u> para ***establecer*** si una función $y = f(x)$ es solución de una ecuación diferencial, reemplazamos y por $f(x)$ en la ecuación, derivamos, y concluimos recordando que "***f*** es solución de la ecuación dif. $\Leftrightarrow$ verifica la igualdad, $\forall x$ ".

Ej: analizar si $y = x^2$ es solución de $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$.

$x^2\ y'' + x\ y' - 4\ y =$ (reemplazamos y por x^2)

$= x^2\ [x^2]'' + x\,[x^2]' - 4\,[x^2] = x^2.\,[2] + x\,[2x] - 4\ [x^2] =$

$= 2x^2 + 2x^2 - 4\ x^2 = 4x^2 - 4\ x^2 = 0 \quad \forall x$

Derivadas:

$y = x^2$
$y' = 2x$
$y'' = 2$

Luego; $y = x^2$, ***<u>es solución</u>*** de: $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$

Ej: analizar si $y = x^3$ es solución de $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$

$x^2\ y'' + x\ y' - 4\ y =$ (reemplazamos y por x^3)

$= x^2\ [x^3]'' + x\,[x^3]' - 4\,[x^3] = x^2.\,[6x] + x\,[3x^2] - 4\,[x^3] =$

$= 6x^3 + 3x^3 - 4\ x^3 = 9x^3 - 4\ x^3 = 5x^3 \neq 0 \quad \forall x$

Derivadas:

$y = x^3$
$y' = 3x^2$
$y'' = 6\ x$

Luego; $y = x^3$, ***<u>no es solución</u>*** de $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$

Observaciones :
En los problemas 1 y 2 aparece una ecuación diferencial de orden "***1*** " y "***2*** " respectivamente. En la resolución vimos que *recuperar* la función original (la solución) requiere a su vez "***1*** " ó "***2*** " integraciones; que cada integración aporta una constante a la función solución. O sea, que en la *solución general*, estarían apareciendo *<u>tantas constantes</u>* como el *<u>orden</u>* de la ecuación diferencial.

Se puede probar que:

*si una ecuación diferencial admite una solución entonces ***admite infinitas*** ; en particular, admite una ***familia de soluciones*** (es decir un conjunto de soluciones del mismo *tipo*) .

* si la ecuación diferencial es de orden "***n***" entonces, en la ecuación prototipo que representa la familia de soluciones, aparecen "***n***" constantes arbitrarias.

Tenemos distintos tipos de soluciones:

<u>Definición 1</u>: ***solución general*** : solución en la que aparecen las "***n***" constantes arbitrarias.

$$x = -t^3 + C_1 t + C_2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = C$$

<u>Definición 2</u>: ***solución particular***: solución que se obtiene al asignar un valor fijo a cada una de las constantes de la solución general.

$$x = -t^3 + 4t + 5 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 9$$

<u>Definición 3</u>: ***solución singular:***

Es una solución "aislada"; es decir, que no se encuentra incluida en la solución general (no se puede obtener asignando valores a las constantes)

Ej: $y' = y^{2/3}$ → ***solución general*** : $y = (\frac{x}{3} + C)^3$, $C \in \mathbf{R}$.

En este caso es fácil verificar que $y(x) = 0 \ \forall x$, también es solución. También es fácil ver que no hay valor que se pueda dar a C tal que $y(x) = 0$ quede *incluida* en la solución general. Luego, $y(x) = 0$ es una ***solución singular***.

<u>Modos de obtener una solución particular</u>

Una solución particular se puede obtener básicamente de dos formas, y cual de ellas uso depende del problema que se esté resolviendo. Así, esta solución puede darse:

a) directamente, asignando valores arbitrarios a las constantes de la solución general; ó,

b) a partir de las llamadas "***condiciones iniciales***" (en el caso que estas existan).

Por ejemplo:

a) resolver $y'' = -9.8$ y dar una solución particular.

* *solución general*: $y(t) = -4.9\, t^2 + C_1 t + C_2$ (obtenida integrando 2 veces);

* *solución particular (arbitraria):* $C_1 = 3$; $C_2 = -5$ → $y(t) = -4.9\, t^2 + 3t - 5$.

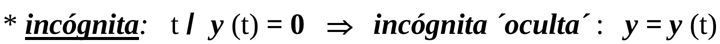
b) Se arroja un peso **P** desde **16 Km** de altura y con velocidad inicial igual a cero. ¿Cuánto tarda **P** en llegar al suelo?.

* ***<u>proceso:</u>*** caída de un cuerpo (moviendo rectilíneo con aceleración ***constante***: $g = 9.8$ m/seg^2) .
Función del proceso: $y = y(t)$ con $y =$ *posición de* **P** *al instante t* .

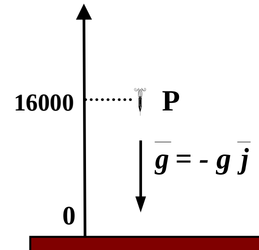
* ***<u>datos:</u>*** $g = 9.8$ (m/seg^2), *aceleración de la gravedad*

$y_{(0)} = 16\,000$ (mts.) (*posición inicial*)

$y'_{(0)} = 0$ (*velocidad inicial*)



* ***<u>incógnita</u>***: t / $y(t) = 0$ ⇒ ***incógnita ´oculta´*** : $y = y(t)$



Luego, *reformulamos el problema*:

$$\begin{cases} y'' = -9.8 & (\textit{ecuación diferencial}) \\ \left.\begin{array}{l} y_{(0)} = 16000 \\ y'_{(0)} = 0 \end{array}\right\} & (\textit{condiciones iniciales}) \end{cases}$$

* **resolución**: ***solución general*** → $y(t) = -4.9\,t^2 + C_1\,t + C_2$

condiciones iniciales: $y_{(0)} = 16000 \Rightarrow C_2 = 16000$; $y'_{(0)} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ $\Big\}\; y(t) = -4.9\,t^2 + 16\,000$

Rta : t **/** $y(t) = 0$; $y(t) = -4.9\,t^2 + 16\,000 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{16000}{4.9}} \approx \pm 56$

Luego; **P** tarda aproximadamente ***56*** seg. en llegar al suelo.

El "problema de valores iniciales" (Pvi) .

Cuando hallar la solución de un problema requiere resolver una ecuación diferencial sujeta a ***condiciones iniciales***, decimos que tenemos un ***Pvi***.

Esto sucede, por ejemplo, en el problema (b) del item anterior:

Pvi. → $\begin{cases} y'' = -9.8 & (\textit{ecuación diferencial}) \\ \left.\begin{array}{l} y_{(0)} = 16000 \\ y'_{(0)} = 0 \end{array}\right\} & (\textit{condiciones iniciales}) \end{cases}$

Observar que en este caso la cantidad de condiciones iniciales (2), coincide con el orden de la EDO. Luego veremos que esto no es casual sino que es necesario para obtener la solución que, entre las infinitas soluciones de la ecuación diferencial es, "***solución del problema***".

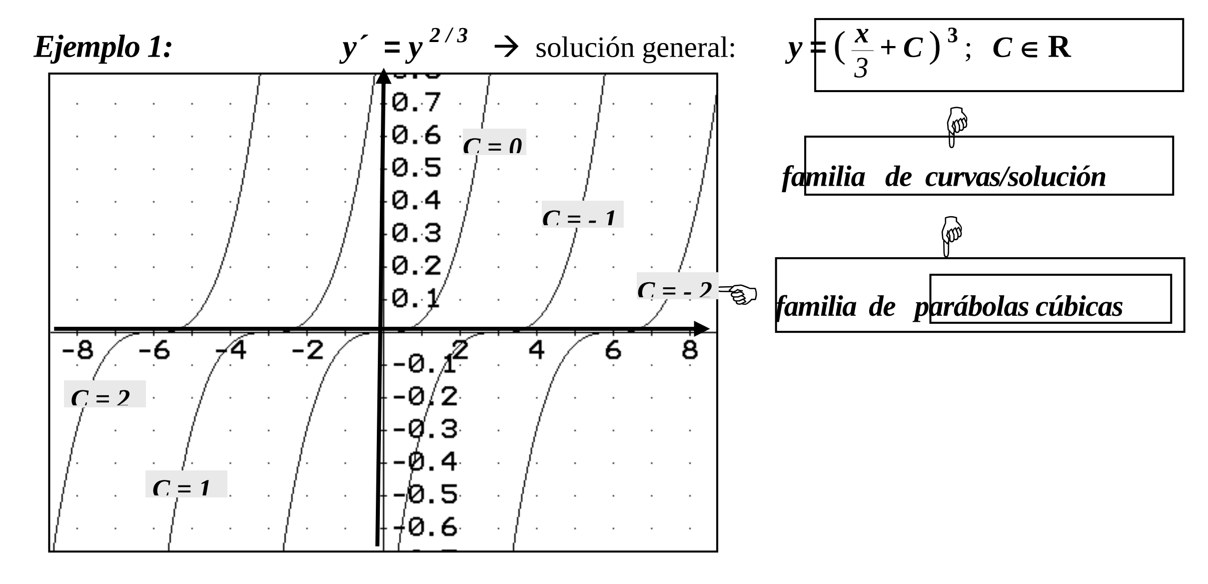
Ecuación y Curva / Solución.

La solución general de una **EDO** es siempre una ***ecuación en dos variables*** en la que además aparecen una o más *constantes* (***C***), las que llamamos *parámetros*.

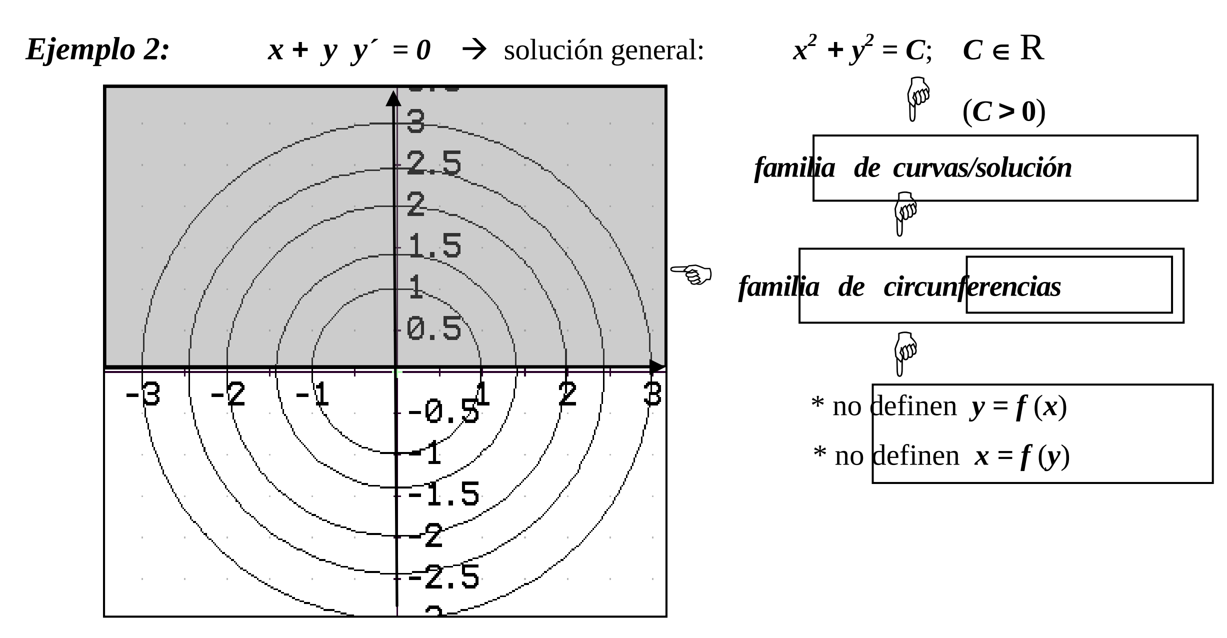
Geométricamente, una ecuación en dos variables en la que aparecen parámetros, es la ecuación prototipo de una ***familia de curvas*.** (o sea, *de un conjunto de curvas, todas del mismo tipo*).

Tenemos entonces que la ***ecuación/ solución*** de una ecuación diferencial define una ***familia de curvas***, las que llamamos ***curvas/ solución***.. (también conocidas como ***curvas integrales***).

Ejemplo 1: $y' = y^{2/3}$ → solución general: $y = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3$; $C \in \mathbb{R}$



Ejemplo 2: $x + y\ y' = 0$ → solución general: $x^2 + y^2 = C$; $C \in \mathbb{R}$



Verificación de solución en ej. 2:

Si *restringimos la región del plano* donde trabajar (por ej. 1er y 2do cuadrante) entonces, *en esa zona*, las curvas/sol. (semicircunferencias) definen función con fórmula $y = y(x)$.

Tenemos así que ´*escondidas*´ en la ecuación/solución hay *funciones* las cuales *no se pueden explicitar sin una apropiada restricción de la región de trabajo*. Para verificar que estas funciones *escondidas* en la ecuación son las *funciones/solución* de la ecuación diferencial, lo que hacemos es reemplazar y por y(x) en la ecuación/solución, derivar luego según las reglas ordinarias de derivación:

$$x^2 + y^2 = 4 \xrightarrow[ej: y = \sqrt{4 - x^2}]{y = y(x)} x^2 + y^2_{(x)} = 4 \xrightarrow[\textbf{derivamos}]{} 2x + 2\,y_{(x)}\, y'_{(x)} = 0 \quad \forall x$$

$$\xrightarrow[finalmente]{} x + y_{(x)}\, y'_{(x)} = 0 \quad \forall x$$

Conclusión: $x^2 + y^2_{(x)} = 4$ ***es solución*** de $x + y\ y' = 0$.

Tenemos así otros tipos de soluciones: ***explícitas, implícitas y "formales"***

Al resolver una ecuación diferencial puede ser que la ***ecuación/solución*** obtenida sea directamente la ***función/solución*** (***ej.1***) o que, por el contrario, dicha función se encuentre ´***escondida***´ en la ecuación (***ej.2***). Para indicar esto decimos que la solución de una EDO viene dada en forma:

♦ ***explícita***: si en la ecuación/solución la variable dependiente aparece explicitada o se puede explicitar en función de la independiente. (***ej.1*** → $y = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3$).

♦ ***implícita***: si en la ecuación/sol. la variable dependiente no aparece explicitada en función de la independiente. En este caso decimos que la ecuación define ***implícitamente*** a y como función de x.

Y esto puede ocurrir por dos motivos:

(1) porque la ecuación/sol define función ***sólo*** poniendo restricciones. (***ej.2*** → $x^2 + y^2 = C$).

(2) porque no se puede explicitar y en *función* de x debido a la *estructura* de la ecuación/sol.

Ej: $(y - 3).y' - \frac{4}{x}.y = 0$ → solución general → $y = \ln (K x^4 |y^3|)$; $K > 0$ (*sol. implícita*)

(no se puede explicitar y en *función* de x aún poniendo restricciones).
(también resulta difícil determinar si existe o no, curva/ solución) .

♦ ***soluciones "formales".***

Vimos que $x^2 + y^2(x) = C$ verifica $x + y\ y' = 0$, $\forall x$. Obviamente también lo hace $\forall C$.

Pero, $x^2 + y^2 = C$, ¿ define *curva* $\forall C$ **?.** Vemos esta cuestión:

* $C < 0 \rightarrow \{(x;\ y) \,/\, x^2 + y^2 = C\} = \varnothing$ (no existe punto alguno que verifique la ecuación)

* $C = 0 \rightarrow \{(x;\ y) \,/\, x^2 + y^2 = C\} = \{(0;\ 0)\}$ (existe un único punto que verifica la ecuación)

* $C > 0 \rightarrow \{(x;\ y) \,/\, x^2 + y^2 = C\} =$ ***circunferencia ,*** centro en **O**(0;0); radio $\sqrt{C}$ **.**

Concluimos entonces que la ecuación define ***curva/solución*** sólo en el caso de C positivo, aún cuando ***"de forma"*** (ó ***"formalmente"***) verifica $x + y\ y' = 0$ para todo valor de C.

Al resolver una ecuación diferencial muchas veces nos vamos a encontrar con situaciones como las dos últimas en las que no podemos explicitar una variable en función de la otra. En general, tampoco vamos a poder decidir si existe o no *curva/solución*. O lo que es lo mismo, si existe *"solución"*. En tal caso, para salvar la situación, decimos que la ecuación hallada es una ***"solución formal"*** : solución que tiene la ***forma*** de una solución, ***pero puede no serlo***.

¿Para qué sirve una solución formal?: si acudiendo a algún resultado *teórico* podemos establecer que la ecuación diferencial *tiene solución*, entonces dicha solución tiene la **"*forma*"** hallada.

EDO – 1er Orden . *Distintas formas en la que se pueden presentar*

(A) $x + y\,y' = 0$; o sea, de la forma: $F(x\,;y\,;y') = 0$

(B) $y' = \dfrac{x+y}{x-y} = f(x;y)$; o sea, de la forma: $y' = f(x;y)$

(C) $\dfrac{3.x}{y}\,dx + \dfrac{\cos y}{x\,y}\,dy = 0$; o sea, de la forma: $P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0$ ***"forma diferencial "***

(con $P(x;y) = \dfrac{3.x}{y}$ y $Q(x;y) = \dfrac{\cos y}{x\,y}$)

Se puede pasar de una forma a la otra:

(A) → (B) $x + y.\ y' = 0 \rightarrow y' = -x/y$

(B) → (C) $y' = \dfrac{x+y}{x-y} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y} \rightarrow (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0$

(C) → (B) $\dfrac{3.x}{y}\,dx + \dfrac{\cos y}{x\,y}\,dy = 0 \rightarrow \dfrac{\cos y}{x\,y}\,dy = -\dfrac{3.x}{y}\,dx \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2}{\cos y}$

$\rightarrow y' = -\dfrac{3x^2}{\cos y}$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN

***Teorema de Existencia y Unicidad* (TEU)**

Dada f una función de dos variables, $z = f(x; y)$, y $P_o(x_o; y_o)$ un punto del dominio de f entonces, si f satisface una "*serie de requisitos*" el problema de valores iniciales,

$$\textbf{Pvi}: \begin{cases} y' = f(x; y) & \textit{(ecuación diferencial de 1er orden)} \\ y(x_o) = y_o & \textit{(condición inicial)} \end{cases}$$

tiene solución (***E**xistencia*), y esta es única (***U**nicidad*)

(sin demostración).

Observación: f es una función de dos variables "derivable". Lo que se pide es que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ ***(derivada parcial de f respecto de y)*** sean ***continuas*** en alguna región plana que contenga al punto $P_o(x_o; y_o)$.

Ej: Hallar la curva Γ que pase por el punto $P_o(0; 5)$ y para la cual, en cada punto $P(x; y) \in \Gamma$ la pendiente de la recta tangente a Γ en P es igual al opuesto del cociente entre la abscisa y la ordenada de P.

* ***Datos:*** $P_o(0; 5)$ punto de paso de la curva Γ.

t recta tg a Γ en P, entonces $m_t = -x/y$

* ***Incógnita:*** Γ $\Rightarrow$ ´***incógnita oculta***´: $y = y(t)$ tal que ***graf*** $y = \Gamma$.

* ***Resolución*:** reformulando el problema queda un **Pvi**:

$$\textbf{Pvi}: \begin{cases} y' = -x/y & \textit{(ecuación diferencial de 1er orden, con } f(x;y) = -x/y\textit{)} \\ y(0) = 5 & \textit{(condición inicial)} \end{cases}$$

♦ La solución gral es: $x^2 + y^2 = C$; $C \in \mathbf{R}$ (como vimos, una solución formal)

♦ El **TEU** asegura que este **Pvi**, tiene solución y única: $y = y(x)$

(en este caso se cumplen los requisitos para f; particularmente, existe $\frac{\partial f}{\partial y} = x/y^2$ en (0;5))

$$x^2 + y^2 = C \xrightarrow[y = y(x)]{} x^2 + y^2(x) = C \rightarrow 0 + (y(0))^2 = C \xrightarrow[y(0)=5]{} C = 25$$

♦ La solución particular es: $x^2 + y^2 = 25$.

¿*Podemos explicitar* $y = y(x)$?; ¿dar la ecuación de Γ en forma explícita?.

Despejando y en la ecuación llegamos a: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$; o sea ,

obtenemos dos funciones: $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ *(semicircunferencia superior); e,*

$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ *(semicircunferencia inferior)*

Como Γ es la curva que pasa por $P_o(0; 5)$, tenemos que: $y = y_1 = \sqrt{25 - x^2}$;

o sea, Γ es la semicircunferencia superior de una circunferencia de radio 5.

7.3 Procedimientos para hallar la Solución General de una Edo

En lo que sigue nos ocupamos de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, para los cuales existen métodos de resolución; o sea, una forma sistemática de buscar la solución general.

Veremos los siguientes casos:

Ecuación	Forma de la ecuación	MÉTODO	
1er orden	$y' = M(x).N(y)$	***variables separables (v.s.)***	*se separan las variables. * se integra * se concluye
1er orden	$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$		
lineal - 1er orden	$y' + P(x)\,y = Q(x)$	***sustitución***	*se propone $y = u.v$ *se sustituye en la ecuac. *u y v nuevas incógnitas
lineal – 2do orden *(homogénea)*	$a_o(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$	***´teórico´***	$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ $\{y_1 ; y_2\}$ l.i.
lineal – 2do orden *(no homogénea)*	$a_o(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = b(x)$	***´teórico´***	$y = y_h + y_p$
lineal – 2do orden *(homogénea- __coef. ctes__)*	$a_o\,y'' + a_1\,y' + a_2\,y = 0$ $(a_o ; a_1 ; a_2 \in \mathrm{R})$	***´práctico´*** (ecuación característica) →	$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ $\{y_1 ; y_2\}$ l.i. para hallar, y_1 e y_2
lineal – 2do orden *(no homogénea- __coef. ctes__)*	$a_o\,y'' + a_1\,y' + a_2\,y = b(x)$ $(a_o ; a_1 ; a_2 \in \mathrm{R})$	***´práctico´*** (coef. indet..) →	$y = y_h + y_p$ para hallar y_p

Observación:

Por simplicidad de escritura, en el cuadro, el método para las ecuaciones lineales de orden mayor que "1" se ejemplifica sólo para las de orden *"2"*. En realidad el mismo vale para ***ecuaciones lineales*** de cualquier orden,

$$\textit{EDO lineal –orden n}: \quad a_o(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots\dots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n\,y = b(x)$$

con la única diferencia que en y_h, solución de la homogénea, aparecen *´n´* constantes en lugar de "2" y, por ende, *´n´* funciones solución: $y_1 ; y_2 ; \dots\dots ; y_n$.

En lo que sigue veremos primero las **EDO-*1er orden***.

> Observar que en este caso el tipo de ecuación más sencillo es: $y' = f(x)$; o sea, el que ocurre cuando la función del segundo miembro es sólo función de x . Ya vimos que en este caso basta buscar la (o las) primitivas de f.

Veremos luego las **EDO- *lineales de orden ´n´*** . Para estas ecuaciones existe una ***teoría general*** acerca de cómo hallar la solución; teoría muy potente pero que sólo puede ser llevada a la práctica en el caso que la ecuación lineal sea *a coeficientes constantes* (único caso en que tenemos un método *práctico* para hallar las *´n´* soluciones necesarias para dar la solución de la homogénea).

EDO a VARIABLES SEPARABLES

Una EDO a *variables separables* es de la forma: $y' = \mathbf{M}(x).\mathbf{N}(y)$ ó $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0.$

Luego, cualquiera sea el caso, para este tipo de ecuaciones podemos reunir todos los términos en x por un lado y todos los término en y por otro, y resolver.

Procedimiento para resolver $y' = \mathbf{M}(x).\mathbf{N}(y)$.

1) establecer claramente la incógnita de la ecuación diferencial. En este caso: $y = y(x)$.

2) llevar la ecuación a la ***forma diferencial***. $\dfrac{dy}{dx} = \mathbf{M}(x).\mathbf{N}(y)$.

3) separar, si existe, $y^* \in R$ tal que $\mathbf{N}(y^*) = 0$ (o sea, $y(x) = y^*$, $\forall\, x \in R$)

4) separar variables, llegar a la expresión: $q(y)\,dy = p(x)\,dx$.

5) integrar miembro a miembro: $\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$

6) resolver las integrales: $\mathbf{R}(y) + C_1 = \mathbf{S}(x) + C_2$ ($\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$ / $\mathbf{R}' = \mathbf{q}$ y $\mathbf{S}' = \mathbf{p}$)

obtener la ***solución general***: $\mathbf{R}(y) = \mathbf{S}(x) + C$; $C \in R$ (***forma implícita***)

7) explicitar y (de ser posible): $y = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{S}(x) + \mathbf{C})$; $C \in R$ (***forma explícita***)

8) analizar si $y = y^*$ es solución. Si lo fuera, analizar si puede o no ser incluida en la general. Si fuera solución y no se puede incluir en la general, es una ***solución singular***.

9) escribir todas las soluciones de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} y = \mathbf{R}^{-1}(\mathrm{S}(x) + \mathrm{C}) \, ; \, C \in R & (\textit{sol. general}) \\ y = y^* & (\textit{sol. singular}) \text{ (si existe y tantas como existan)} \end{cases}$$

Procedimiento para resolver un problema de valores iniciales con una **EDO a v.s.**

$$\textbf{Pvi}: \begin{cases} y' = \mathbf{M}(x).\mathbf{N}(y). & (\textit{ecuación diferencial 1er orden – v.s.}) \\ y(x_o) = y_o & (\textit{condición inicial}) \end{cases}$$

En este caso tenemos dos caminos:

1º) Realizar los ***pasos 1- 9*** antes indicados para resolver la ecuación diferencial y luego, con los valores iniciales, determinar la solución particular.

2º) En el ***paso 5***, si y_o no es solución singular, en vez de aplicar integral indefinida, aplicar la ***Integrales "definidas"***, tomando como extremos inferiores, y_o y x_o respectivamente.

5) integrar miembro a miembro: $\int_{y_o}^{y} q(y)\,dy = \int_{x_o}^{x} p(x)\,dx$

6) resolver las integrales: $\mathbf{R}(y) - \mathbf{R}(y_o) = \mathbf{S}(x) - \mathbf{S}(x_o)$ ($\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$ / $\mathbf{R}' = \mathbf{q}$ y $\mathbf{S}' = \mathbf{p}$)

obtener directamente la ***solución particular***: $\mathbf{R}(y) = \mathbf{S}(x) - \mathbf{S}(x_o) + \mathbf{R}(y_o)$

7) explicitar y (de ser posible).

Ejemplo: resolver $y' = \dfrac{y-1}{x+2}$

1) $y' = \dfrac{1}{x+2}.(y-1) \Rightarrow$ ***1er orden – v.s.; Incógnita:*** $y = y(x)$.

2) pasamos a la *forma diferencial* : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+2}.(y-1)$

3) separamos $y^* = 1$ (debemos dividir por "y-1" para "*separar variables*")

4) separamos variables: $\dfrac{1}{y-1}\,dy = \dfrac{1}{x+2}.\,dx$

5) integramos miembro a miembro: $\displaystyle\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int \frac{1}{x+2}.\,dx$

6) resolvemos las integrales: $\ln|y-1| + C_1 = \ln|x+2| + C_2$

obtenemos la ***solución general***: $\ln|y-1| = \ln|x+2| + C$; $C \in R$ (***forma implícita***)

7) explicitamos y (de ser posible): $\ln|y-1| = \ln|x+2| + C$; $C \in R$

$\ln|y-1| = \ln|x+2| + \ln K$; $K > 0$

$\ln|y-1| = \ln(K|x+2|)$; $K > 0$ (aplicamos ***inversa ln***)

$|y-1| = K|x+2|$; $K > 0$ (eliminamos valor abs.)

$y-1 = \pm K(x+2)$; $K > 0$ (reescribimos la cte)

$y-1 = C(x+2)$; $C \neq 0$

solución general: $y = C(x+2)+1$; $C \neq 0$ (***forma explícita***)

8) analizamos $y = 1$ → $\begin{cases} y' = 0 \\ y-1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ verifica la ecuación $\Rightarrow$ $y = 1$ es solución

En la solución general si C= 0 entonces $y = 1$; o sea, esta solución se puede incluir en la general sacando la restricción de que C no sea cero.

9) ***todas las soluciones de la ecuación diferencial:*** $y = C(x+2)+1$; $C \in R$

Ejemplo: resolver el Pvi : $y' = \dfrac{y-1}{x+2}$; $y(1) = 7$

****Camino 1***: reemplazo en la solución general y obtengo la particular:

$y = C(x+2)+1 \xrightarrow[x=1\,;\,y=7]{} 7 = C(1+2)+1$ → $C = 2$

solución particular: $y = 2(x+2)+1$ → $y = 2x+5$

****Camino 2***: $y' = \dfrac{y-1}{x+2}$; $y(1) = 7$

5) integramos miembro a miembro: $\int_7^y \frac{1}{y-1}\, dy = \int_1^x \frac{1}{x+2} \cdot dx$

6) resolvemos las integrales: $\ln|y-1| - \ln|6| = \ln|x+2| - \ln|3|$

$\ln|y-1| = \ln|x+2| + \ln \frac{6}{3}$

7) explicitamos y $|y-1| = 2\,|x+2|$

$y-1 = \pm 2(x+2) \rightarrow$

$\rightarrow y = 2x + 5$
$\rightarrow y = -2x - 3$

solución particular ($y(1) = 7$): $y = 2x + 5$

Ejemplo: resolver $x\, dx + y\, dy = 0$

4) separamos variables : $y\, dy = -\, x\, dx$

5) integramos miembro a miembro: $\int y\, dy = - \int x\, dx$

6) obtenemos la ***solución general***: $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$; $C \in R$ (***sol. formal***)

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$ ***ó*** $x^2 + y^2 = C$

7) explicitamos y (de ser posible): **no es posible**

9) escribo todas las soluciones de la ecuación diferencial: $x^2 + y^2 = C$; $C \in R$

Ejemplo: hallar la curva solución de $x\, dx + y\, dy = 0$ que pase por el punto **P**(3; - 4).

* Reemplazamos en la solución general y obtenemos la particular

$$x^2 + y^2 = C \xrightarrow[x=3\,;\, y=-4]{} 3^2 + (-4)^2 = C \rightarrow C = 25$$

curva ?: $x^2 + y^2 = 25$

$\rightarrow y = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow y(3) = 4$
$\rightarrow y = -\sqrt{25 - x^2} \rightarrow y(3) = -4 \rightarrow$ pasa por **P**

Luego, la curva pedida es la *semicircunferencia ´ inferior´* de radio 5 y centro en el origen.

Observación: cuando la ecuación diferencial está en la *forma diferencial*, entonces la ***incógnita*** puede ser tanto ***"y como función de x"*** como ***"x como función de y ".***

Así, por ejemplo, en el caso anterior otra forma de dar la solución del problema es:

$x = \sqrt{25 - y^2} \rightarrow x(-4) = 3 \rightarrow$ pasa por **P.**

(semicircunferencia *´derecha´* de radio 5 y centro en el origen)

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 1er ORDEN – EDOL-1

*__DEFINICIÓN 1__:

Llamamos ecuación diferencial "*lineal*" de 1er orden a toda ecuación de la forma:

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

donde **P** y **Q** son funciones continuas en un mismo intervalo **I**.

Dentro de las **EDOL-1** distinguimos dos tipos de ecuaciones:

DEF 1.1 : EDOL-1-Homogénea, si **Q** es la función "nula"; o sea, $Q(x) = 0,\ \forall x \in I$.

DEF 1.2 : EDOL-1- No Homogénea, si **Q "no"** es la función "nula"; o sea, $Q \not\equiv 0$.

Procedimiento para resolver $y' + P(x) \, . \, y = Q(x)$

1) Proponemos un ***cambio de variable*** → $y(x) = u(x).v(x)$ con $u\, ;\, v$ derivables y ***a determinar***.

2) Derivamos: $y' = u' . v + u . v'$

3) Cambio de ecuación: $y' + P(x) \, . \, y = Q(x)$ (reemplazamos y e y')

$u' . v + u . v' + P(x). u . v = Q(x)$ (asociamos, sacamos factor común)

$[u' + P(x). u] . v + u . v' = Q(x)$ **(*)** ecuac. dif. con "**2**" incógnitas.

4) Condiciones sobre u *y* v para resolver **(*)**

$$\begin{cases} 1) \quad u' + P(x).u = 0 & \rightarrow ¿\, u\, ? \\ 2) \quad u.v' = Q(x) & \rightarrow ¿\, v\, ? \end{cases}$$

Si u *y* v satisfacen *1-2)* entonces $y(x)= u(x) . v(x)$ es ***solución*** de $y' + P(x)\, y = Q(x)$

5) Resolución de ***(1) :***

$u' + P(x)\, u = 0$ **(→ EDOL-1-Homogénea ; a "variables separables")**

Resolvemos por separación de variables, obtenemos ***una*** solución de *(1)* : $u = u^*(x)$

6) Resolución de ***(2)***: reemplazamos la u obtenida en (5) en ***(2)*** .

$u^*(x) . v'(x) = Q(x)$ **(→ EDO a "variables separables")**

Resolvemos por separación de variables, obtenemos la solución gral de ***(2)***: $v = v^*(x) + C$

7) Damos la **solución general** de $y' + P(x) . y = Q(x)$.

$$y = u\, .\, v \quad \rightarrow \quad \boxed{y(x) = u^*(x) . [\, v^*(x) + C\,]}$$

Resolver : $y' - \frac{2}{x} \cdot y = x$

→ $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ / $P(x) = -\frac{2}{x}$; $Q(x) = x$

1) **Proponemos** ***cambio de variable*** → $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ **con** $u ; v$ **derivables** .

2) **Derivamos:** $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

3) **Cambio de ecuación**: $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ (reemplazamos y e y')

$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$ (asociamos, sacamos factor común)

$[u' + P(x) \cdot u] \cdot v + u \cdot v' = Q(x)$ **(*)** ecuac. dif. con "**2**" incógnitas.

4) **Condiciones sobre** u **y** v **para resolver (*)**

$$\begin{cases} 1) \quad u' + P(x) \cdot u = 0 & \to ¿\, u\, ? \\ 2) \quad u \cdot v' = Q(x) & \to ¿\, v\, ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1) \quad u' - \frac{2}{x} \cdot u = 0 \\ 2) \quad u \cdot v' = x \end{cases}$$

Si u y v satisfacen *1-2)* entonces $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ es ***solución*** de $y' + P(x)\, y = Q(x)$

5) **Resolución de** *(1):* $u' + P(x)\, u = 0$ **(EDOL-1-Homogénea ; a "variables separables")**

$u' - (2/x) \cdot u = 0$ → $u^*(x) = x^2$

6) **Resolución de** *(2)*: **reemplazamos** u → $u^*(x) \cdot v'(x) = Q(x)$ **(→ EDO "vs. separables")**

$x^2 \cdot v' = x$ → $v(x) = \ln|x| + C$

7) **Damos la solución general de** $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$.

$y(x) = u^*(x) \cdot v(x)$ → $y(x) = x^2 \cdot [\ln|x| + C]$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de ORDEN "n" [EDOL- n]

*__DEFINICIÓN 1__:

Llamamos ecuación diferencial "*lineal*" de orden "n" a toda ecuación de la forma:

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x)$$

con a_o ; a_1 ; .... ; a_n ; b , ***funciones*** definidas en I ; $a_o(x) \neq 0$; $\forall x \in I$.

DEF 1.1 : EDOL-n - No Homogénea, si **b** no es la función nula; o sea, $b \not\equiv \mathbf{0}$.

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \quad \textbf{(I)}$$

DEF 1.2 : EDOL-n -Homogénea, si **b** es la función nula → $b = \mathbf{0}$ con $\mathbf{0}(x) = 0, \forall x \in I$

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = \mathbf{0} \quad \textbf{(II)}$$

EJEMPLOS: $x^2 y'' + 2y = 0$ **(lineal orden 2 - homogénea)**

$y''' + x.y'' - 3\cos x \cdot y' + 4y = e^x$ **(lineal orden 3 – no homogénea)**

DEF 1.3: EDOL-n, *"a coeficientes constantes"*

Ecuación diferencial lineal (homogénea o no) en la que todos los coeficientes, $a_i(x)$, son ***funciones constantes***; o sea, son de la forma:

$$a_o \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b(x)$$

con a_o ; a_1 ; ....; a_{n-1} ; $a_n \in \mathbb{R}$; $a_o \neq 0$

EJEMPLOS: $3y'' + 2y = 0$ **(lineal orden 2 - homogénea)**

$2y''' + 5.y'' - 3 \cdot y' + 4y = e^x$ **(lineal orden 3 – no homogénea)**

DEFINICIÓN 2: Problema de valores iniciales – Pvi

El problema de hallar una función $y = y(x)$ tal que:

$$\begin{cases} a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \\ \left.\begin{array}{l} y_{(x_0)} = y_0 \\ y'_{(x_0)} = y_1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}_{(x_0)} = y_{n-1} \end{array}\right\} \textit{Condiciones Iniciales} \end{cases}$$

con $x_o \in I$; y_o ; y_1 ; ...., $y_{n-1} \in \mathbb{R}$; es llamado **"Problema de valores iniciales".**

TEU (1) - Teorema de Existencia y Unicidad:

si las **funciones** $a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_n$ y **b** **son continuas en I** ; entonces cualquiera sea $x_o \in I$ y cualquiera sean los "**n**" números reales $y_o ; y_1 ; \ldots\ldots, y_{n-1}$, el **Pvi** tiene solución (**E**xistencia) y única (**U**nicidad) en **I** . **(s/d)**

Corolario: **si** $a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_n$ son continuas en **I**, la ecuación diferencial es homogénea, $x_o \in I$, $y_o = y_1 = y_2 = \ldots\ldots = y_{n-1} = 0$; **entonces, el siguiente, Pvi**:

$$\begin{cases} a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 & \text{(homogénea)} \\ y(x_o) = y'(x_o) = y''(x_o) = \ldots = y^{(n-1)}(x_o) = 0 \end{cases}$$

tiene solución única, y esta es la *trivial*: $y(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Demostración: ♦ $y(x) = 0$, $\forall x \in I$; es solución de toda **EDOL-n, homogénea;**
♦ $y(x) = 0$, $\forall x \in I$; verifica las condiciones iniciales;
entonces, $y(x) = 0$, $\forall x \in I$, **es solución del Pvi**.
♦ por hipótesis, los coeficientes son funciones continuas;
entonces por el **TEU**, $y(x) = 0$, $\forall x \in I$, **es solución y "única"** .

Ecuaciones Diferenciales Lineales "Homogéneas" [EDOLH- n]

TEOREMA 2: Si $\{ f_1 ; f_2; \ldots\ldots; f_j \}$ son *j-soluciones* de una EDOL-Homogénea entonces cualquier combinación lineal (c.l.) de ellas, *también lo es*.

O sea, si $\Phi = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_j f_j \Rightarrow \Phi$ es *solución* de la EDOL-**H**

Demostración: (demostramos para **n = 2**, **j = 3** ; queda como ejercicio para **n = 3; j = 2**)

Dadas $\{ f ; g ; h \}$, tres soluciones de una EDOL**H-2**:

$$a_o \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0 ; \quad (\forall x \in D) \quad \textbf{(I)}$$

debemos demostrar que $\Phi(x) = [c_1 f + c_2 g + c_3 h]_{(x)}$ es solución de **(I);**
o sea que, reemplazada Φ en la ecuación **(I),** **la satisface $\forall x \in D$**

Por **Hip**: ♦ **f** sol. de **(I)** $\Rightarrow \quad a_o \cdot f'' + a_1 \cdot f' + a_2 \cdot f = 0 ; \quad (\forall x \in D)$

♦ **g** sol. de **(I)** $\Rightarrow \quad a_o \cdot g'' + a_1 \cdot g' + a_2 \cdot g = 0 ; \quad (\forall x \in D)$

♦ **h** sol. de **(I)** $\Rightarrow \quad a_o \cdot h'' + a_1 \cdot h' + a_2 \cdot h = 0 ; \quad (\forall x \in D)$

A partir de estos datos, investigamos si $\Phi(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) + c_3 h(x)$ cumple la **Tesis**:

$$a_o \cdot \Phi'' + a_1 \cdot \Phi' + a_2 \cdot \Phi =$$
$$= a_o \cdot [c_1 f'' + c_2 g'' + c_3 h''] + a_1 \cdot [c_1 f' + c_2 g' + c_3 h'] + a_2 \cdot [c_1 f + c_2 g + c_3 h] =$$
$$= c_1 \cdot [a_o f'' + a_1 \cdot f' + a_2 \cdot f] + c_2 \cdot [a_o g'' + a_1 \cdot g' + a_2 \cdot g] + c_3 \cdot [a_o h'' + a_1 \cdot h' + a_2 \cdot h] =$$
$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0 ; \quad (\forall x \in D) \qquad \textbf{[q.e.d.]}$$

Ejercicio: Verificar que $f(x) = \text{sen } x$; $g(x) = \cos x$ y $\Phi(x) = 3 f(x) + 5 g(x)$, son solución de $y'' + y = 0$

DEFINICIÓN 3: "*linealmente dependiente*" (l.d.)

El conjunto de funciones $\{ f_1 ; f_2 ; \ldots\ldots ; f_j \}$ es ***"linealmente dependiente"*** en **[a; b]**, si existen constantes $c_1 ; c_2 ; \ldots\ldots ; c_j$ (***no todas nulas***), tales que:

$$c_1 . f_1(x) + c_2 . f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + c_j . f_j(x) = 0 \ ; \ \forall x \in [a; b].$$

DEFINICIÓN 4: "*linealmente independiente*" (l.i.)

El conjunto de funciones $\{ f_1 ; f_2 ; \ldots\ldots ; f_j \}$ es ***"linealmente independiente"*** en **[a; b]**, si ***no es "linealmente dependiente"***. O sea; $\{ f_1 ; f_2 ; \ldots\ldots ; f_j \}$ es **l.i.** si :

$$\text{“} c_1 . f_1(x) + c_2 . f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + c_j . f_j(x) = 0 \ ; \ \forall x \in [a; b] \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots\ldots = c_j = 0 \text{”}.$$

NOTA: Si a "$c_1 . f_1 + c_2 . f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_j . f_j = 0$" la llamamos, **ecuación básica (E.B.);** entonces $\{f_1 ; f_2 ; \ldots ; f_j\}$ es **l.i.** $\Leftrightarrow$ la **E.B.** se satisface únicamente si todas las constantes son nulas

Ejemplos:

1) $\{ f(x) = e^x \ ; \ g(x) = 3.e^x \}$; Dominio: $\mathbf{R}$

E.B. $\rightarrow$ $c_1 . f(x) + c_2 . g(x) = 0 \ ; \ \forall x \in \mathbf{R}$

$\rightarrow$ $c_1 . e^x + c_2 . 3\, e^x = 0; \ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e^x . [c_1 + 3\, c_2] = 0; \ \forall x \in \mathbf{R}$

$\boxed{e^x \neq 0; \forall x} \Leftrightarrow c_1 + 3\, c_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -3.\, c_2$

Luego, si por ejemplo, $c_1 = 6 \ ; \ c_2 = -2 \Rightarrow [6] . e^x + [-2] . 3\, e^x = 0 \ , \ \forall x \in \mathbf{R}$;

o sea, existen constante no nulas para las cuales se satisface la **E.B.**

Conclusión: $\{ f(x) = e^x \ ; \ g(x) = 3\, e^x \}$ **es l.d.**

Observación 1: en este caso "vemos" que: $\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}} = 3$ (*cte*)

2) $\{ f(x) = 1 \ ; \ g(x) = x \}$; Dominio: $\mathbf{R}$

E.B. $\rightarrow$ $c_1 . f(x) + c_2 . g(x) = 0 \ ; \ \forall x \in \mathbf{R} \rightarrow c_1 + c_2 .x = 0; \ \forall x \in \mathbf{R}$

Pero, $c_1 + c_2 .x \overset{*}{=} 0 \ , \ \underline{\forall x \in \mathbf{R}} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$ (porque existe ***único*** **x** verifica (*))

Luego, la **E.B.** se satisface únicamente si todas las constantes son nulas.

Conclusión: $\{ f(x) = 1 \ ; \ g(x) = x \}$ **es l.i. en R .**

Observación: en este caso "vemos" que: "$\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}} = x$" ; o sea, que: $\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}} \neq cte$.

3) $\{ f(x) = 1 \ ; \ g(x) = x \ ; \ h(x) = x^2 \}$; Dominio: $\mathbf{R}$

E.B. $\rightarrow$ $c_1 .f(x) + c_2 .g(x) + c_3 .h(x) = 0 \ ; \ \forall x \in \mathbf{R} \rightarrow c_1 + c_2 .x + c_3 . x^2 \overset{*}{=} 0; \ \underline{\forall x \in \mathbf{R}}$

$\Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (a lo sumo ***dos*** **x´s** verifican (*))

Conclusión: $\{ f(x) = 1 \ ; \ g(x) = x \ ; \ h(x) = x^2 \}$ **es l.i. en R**

CRITERIOS PARA DETERMINAR " l.d." ó " l.i."

(1) Dos o más funciones no pueden ser **li** si una de ellas es la **función nula**. (verificar)

(2) **f** y **g** tal que ninguna sea la función nula en **[a; b]** y **g**(x) $\neq$ **0** , $\forall x \in$ **[a; b]**, entonces:

$$\{f;\ g\}\ \text{l.d. en } [a;b] \Leftrightarrow \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = cte.$$

Ej. 1) $\{3e^x;\ e^x\}$ **l.d. en R**

(3) **f** y **g** tal que ninguna sea la función nula en **[a; b]** y **g**(x) $\neq$ **0** , $\forall x \in$ **[a; b]**, entonces:

$$\{f;\ g\}\ \text{l.i. en } [a;b] \Leftrightarrow \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \neq cte.$$

Ej. 2) $\{1;\ x\}$ **l.i. en R**

(4) Si **f** y **g** ***soluciones no nulas*** en [a; b] de una EDOLH- 2; entonces:

$$\{f;\ g\}\ \text{l.i. en } [a;b] \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f_{(x)} & g_{(x)} \\ f'_{(x)} & g'_{(x)} \end{vmatrix} \neq 0\ ;\ \forall x \in [a;b]$$

Ej. 2) $\{1;\ x\}$ **l.i. en R** pues $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\ ;\ \forall x \in \mathbf{R}$

(5) Si $\{f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots;\ f_n\}$ ***n-soluciones no nulas*** en [a; b] de una **EDOLH – orden "n"**

entonces **"** $\{f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots;\ f_n\}$ **l.i.** en **[a; b]** $\Leftrightarrow$ **det A** $\neq 0$; $\forall x \in$ **[a; b] "**

→**A** matriz de "n" filas por "n" columnas, donde cada columna está formada por una ***función solución*** **(**f_i**)** y sus **(n-1)** ***derivadas*** $(f_i';\ f_i'';\ \ldots;\ f_i^{(n-1)})$.

Ej. 3): $\{1;\ x+1;\ x^2\}$ **l.i.** en **R** pues $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\ ;\ \forall x \in \mathbf{R}.$

Ejemplos:

4) Determinar si **f(x) = sen x** y **g(x) = cos x** son solución **l.i.** de $y'' + y = 0$.

- ♦ **f(x) = sen x ; f´(x) = cos x ; f´´(x) = - sen x** $\Rightarrow$ **f´´(x) + f(x) = 0 ,** $\forall x$ **(f sol.)**
- ♦ **g(x) = cos x ; g´(x) = - sen x ; g´´(x) = - cos x** $\Rightarrow$ **g´´(x) + g(x) = 0 ,** $\forall x$ **(g sol.)**
- ♦ $\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \text{tg } x \neq cte \Rightarrow$ **sen x** y **cos x** son soluciones **l.i.** de la **EDOLH-2.**

5) Mostrar que **f(x) = 1 ; g(x) = x** y **h(x) =** x^2 son soluciones **l.i.** de $y''' = 0$.

6) Mostrar que **f(x) =** e^{3x} y **g(x) =** $5e^{3x}$ son soluciones **l.d.** de $y'' - 6y' + 9y = 0$.

7) Mostrar que **f(x) =** e^{3x} y **g(x) =** $x e^{3x}$ son soluciones **l.i.** de $y'' - 6y' + 9y = 0$.

8) Mostrar que e^x ; e^{-x} ; e^{2x} son soluciones **l.i.** de $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

TEOREMA 3 – FUNDAMENTAL

Dada una ecuación diferencial lineal, homogénea y de **orden n** (EDOLH – n)

$$\mathbf{a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0}$$

si $\mathbf{a_o}$; $\mathbf{a_1}$; .... ; $\mathbf{a_n}$ son funciones continuas en [a;b] y $\mathbf{a_o}(x) \neq 0$; $\forall x \in [a;b]$ entonces se verifica que:

(I) la ecuación tiene **"n"** soluciones **"linealmente independientes" : f_1 ; f_2 ; ....; f_n .**

(II) f es solución de la EDOLH ⇔ es combinación lineal de "**n**" soluciones **l.i.**

(s/d)

Observaciones:

☞ **f_1 ; f_2 ; ....; f_n** solucs. de **EDOLH**
$\Phi = c_1f_1 + c_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n f_n$ } **Φ solución de EDOLH – n (Teor. 2)**

☞ **f_1 ; f_2 ; ....; f_n** solucs. **l.i.** de **EDOLH**
"n" : orden de la EDOLH
f : solución de la EDOLH } **$f = c_1f_1 + c_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n f_n$ (Teo 3-F)**

Conclusiones respecto a las EDOLH-n :

(1) En **(I) Teo 3-F** se asegura la existencia de "**n**" soluciones; en el **Teo 2,** que toda combinación lineal (c.l.) de soluciones de una **EDO** es solución de la **EDO**.
Luego, y dado las infinitas formas como se pueden elegir las constantes en la c.l.; concluimos que las **EDOLH** tienen **infinitas soluciones.**

(2) Por **(II)** del **Teo 3-F,** si las "**n**" soluciones son **"l.i."** , entonces **todas** las soluciones **se pueden escribir como c.l. de ellas** (no existen soluciones que no se puedan escribir como **c.l.** de **n** soluciones **l.i.**). Luego, y dado este principio, concluimos que en la solución de una **EDOLH** debe haber **tantas constantes** como **orden tenga la ecuación.**

DEFINICIÓN 5: BASE de SOLUCIONES

Dada una **EDOLH-n ,** llamamos **Base de Soluciones** a todo conjunto de **"n" soluciones "linealmente independientes"** de la ecuación diferencial.

DEFINICIÓN 6: SOLUCION GENERAL.

Llamamos **solución general** de una **EDOLH-n** a la solución **f** construida como combinación lineal de las funciones de la **Base de Soluciones**; o sea:

$$\mathbf{f = c_1f_1 + c_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n f_n} \ ; \ (\mathbf{c_i} = \textit{ctes arbitrarias}).$$

La conclusión más importante y útil a los efectos del cálculo de soluciones que obtenemos del **Teo 3-F** es que: **conocido un "conjunto finito de soluciones", conocemos "todas" .**

Ejemplos:

9) $y''' = 0$ **(EDOLH – orden 3)**

$B = \{ y_1(x) = 1;\ y_2(x) = x;\ y_3(x) = x^2 \}$ (l.i.)

$S = \{ f \ / \ f$ solución de $y''' = 0 \}$

S = conjunto de *todas* las soluciones

$S = \{ f \ / \ f(x) = c_1 + c_2 . x + c_3 . x^2 ;\ c_1, c_2 \in R \}$

S
- $g(x) = 2 + 3 . x + . x^2$
- $k(x) = 5$
- $h(x) = 5\ x^2$
- $p(x) = x + x^2$
- $q(x) = 2 + x + 3\ x^2$

BASE
- $y_1 = 1$
- $y_2 = x$
- $y_3 = x^2$

10) Dada $y'' + y = 0$ **(EDOLH – orden 2)** :

$B = \{ y_1(x) = \text{sen } x ;\ y_2(x) = \cos x \}$ (l.i.)

$S = \{ f \ / \ f(x) = c_1 . \text{sen } x + c_2 . \cos x ;\ c_1, c_2 \in R \}$

S
- $k(x) = 3 \text{ sen } x + 4 . \cos x$
- $g(x) = 5 \text{ sen } x$
- $p(x) = -\ 3. \cos x$
- $q(x) = \text{sen } x - \cos x$

BASE
- $y_1 = \text{sen } x$
- $y_2 = \cos x$

? Si una función tiene **"otra forma"**, por ejemplo, $h(x) = \text{sen } (x + \frac{\pi}{6})$,
¿se puede afirmar que **no es** solución de $y'' + y = 0$?. La respuesta es, **NO.**
Hay funciones que se pueden representar de "distintas maneras" (entre ellas las trigonométricas). Así, el solo hecho de que una función no tenga la "forma" de la solución general no implica que no sea solución. Al respecto, no podemos decir nada.

Para resolver esta incógnita, hay dos caminos:
(C.1) derivar, reemplazar en la ecuación y "ver" que pasa (si la verifica o no).
(C.2) tratar de escribir **h** como **c.l.** de las funciones de la **BASE** de la **EDOLH**.
(Por **Teo. 3-(II)** si esto es posible; **h** es solución de la EDOLH)

(C.1) Derivamos: $h(x) = \text{sen } (x + \frac{\pi}{6})$; $h'(x) = \cos (x + \frac{\pi}{6})$; $h''(x) = -\text{ sen } (x + \frac{\pi}{6})$

Reemplazamos: $h''(x) + h(x) = -\text{ sen } (x + \frac{\pi}{6}) + \text{sen } (x + \frac{\pi}{6}) = 0 ;\ \forall x \in R.$

Concluimos: **h** es solución de $y'' + y = 0$.

(C.2) Por Trigonometría: $\text{sen } (x + \frac{\pi}{6}) = \text{sen } x . \cos \frac{\pi}{6} + \cos x . \text{sen } \frac{\pi}{6}$

$$\text{sen } (x + \tfrac{\pi}{6}) = \text{sen } x . \underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{c_1} + \cos x . \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{c_2} = c_1 . \text{sen } x + c_2 . \cos x$$

Conclusión: **h** es solución de $y'' + y = 0$.

? **Respecto al C.2: ¿siempre se puede acudir a él?.** La respuesta es, **NO.**
¿Porqué?: porque requiere conocer una **Base de Soluciones**, lo que no siempre se da.

11) Dada $x^2 y'' + x y' - 4 y = 0$ en $[1; \infty)$ → $h(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2}$; **¿es solución ?**

$x^2 y'' + x y' - 4 y = 0$ → **EDOLH- orden 2** → $B = \{ y_1 ; y_2 \}$(l.i.) (¿¿??)

Luego, para resolver este problema no se puede acudir al **C.2** ; si al **C.1**

Ejercicio: verificar, por el **C.1**, que **h** es solución de $x^2 y'' + x y' - 4 y = 0$

Ecuaciones Diferenciales Lineales "No Homogéneas" [EDOL-NoH- n]

A partir de la Ecuación Diferencial Lineal "No Homogénea" :

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \quad \textbf{(I)}$$

con $a_{i(x)}$ $i = 0, 1, \ldots, n$, funciones continuas en **[a; b] ;** $a_o(x) \neq 0$; $\forall x \in [a; b]$

definimos los siguientes nociones:

DEF. 7: A la **EDOL- Homogénea** incluida en **(I),**

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 \quad \textbf{(II)}$$

la llamamos: **Ecuación Homogénea asociada a (I).**

DEF 7.1 : A la solución general de **(II),** la llamamos: **solución de la homogénea ;**
la indicamos: y_h

DEF 7.2 : A cualquier solución de **(I)** que no tenga constantes**:**
la llamamos: **solución particular ;**
la indicamos: y_p.

TEOREMA 4:

Si **f** es una solución cualquiera de **(I) (No Homogénea) ;**
y **h** es una solución cualquiera de **(II) (Homogénea asociada) ;**
entonces, **f + h** es solución de **(I),** la No Homogénea **.**
O sea, si $\Phi = f + h \Rightarrow [\, a_o.\Phi^{(n)} + a_1.\Phi^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x).\Phi' + a_n.\Phi \,](x) = b(x), \ \forall x$

Demostración: (demostramos para **n = 2** ; queda como ejercicio para **n = 3**)

Sea $a_o. y'' + a_1 . y' + a_2 . y = b$; $(\forall x \in D)$ **(I)**

$$a_o. y'' + a_1 . y' + a_2 . y = 0 \ ; \quad (\forall x \in D) \quad \textbf{(II)}$$

debemos demostrar que $\Phi(x) = [f + h]_{(x)}$ es solución de **(I);**
o sea que, reemplazada Φ en la ecuación **(I),** **la satisface $\forall x \in D$**

Por **Hip**: ♦ **f** sol. de **(I)** $\Rightarrow$ $a_o. f'' + a_1.f' + a_2. f = b$; $(\forall x \in D)$

♦ **h** sol. de **(II)** $\Rightarrow$ $a_o.h'' + a_1. h' + a_2. h = 0$; $(\forall x \in D)$

A partir de estos datos, investigamos si $\Phi(x) = f(x) + h(x)$ cumple la **Tesis**:

$$a_o . \Phi'' + a_1 . \Phi' + a_2 . \Phi =$$
$$= a_o . [f'' + h''] + a_1.[f' + h'] + a_2.[f + h] =$$
$$= [a_o f'' + a_1. f' + a_2.f] + [a_o h'' + a_1. h' + a_2. h] = b + 0 = b \quad (\forall x \in D) \qquad \textbf{[q.e.d.]}$$

Ejemplo: dada $y''' - 2 y'' - y' + 2 y = 8 e^{3x}$.

Mostrar que: $h(x) = e^{2x}$ es solución de la **"homogénea asociada" ;**
$f(x) = e^{3x}$ es solución de la **" no homogénea " ;**
$\Phi = f + h$ es solución de la **" no homogénea " .**

TEOREMA 5:

Si **Φ** es solución de la **No Homogénea (I);** entonces **$\Phi = y_h + y_p$**

con: **y_h** solución de la homogénea **(II) ;**

y_p solución particular de la **No Homogénea (I).**

Demostración: (demostramos para **n = 2** ; queda como ejercicio para **n = 3**)

Sea **(I)** $a_o . y'' + a_1 . y' + a_2 . y = b$; $(\forall x \in D) \rightarrow y_p$ solución **(I)**

(II) $a_o . y'' + a_1 . y' + a_2 . y = 0$; $(\forall x \in D) \rightarrow y_h$ solución **(II)**

Debemos demostrar que: $\Phi = y_h + y_p$;

equivalentemente, que: $\Phi - y_p = y_h$; o sea, que $\Phi - y_p$ sea solución de **(II)**

Por **Hip**: ♦ **Φ** solución de **(I)** $\Rightarrow$ $a_o . \Phi'' + a_1 . \Phi' + a_2 . \Phi = b$; $(\forall x \in D)$

♦ y_p solución de **(I)** $\Rightarrow$ $a_o . y_p'' + a_1 . y_p' + a_2 . y_p = b$; $(\forall x \in D)$

Con estos datos, $y = \Phi - y_p$, ¿es solución de **(II)** ?:

$$a_o . y'' + a_1 . y' + a_2 . y = a_o . [\Phi - y_p]'' + a_1 . [\Phi - y_p]' + a_2 . [\Phi - y_p] =$$
$$= a_o . [\Phi'' - y_p''] + a_1 . [\Phi' - y_p'] + a_2 . [\Phi - y_p] =$$
$$= [a_o \Phi'' + a_1 . \Phi' + a_2 . \Phi] - [a_o y_p'' + a_1 . y_p' + a_2 . y_p] = b - b = 0 \checkmark$$ [q.e.d.]

DEF. 8: A **Φ ,** la llamamos: **Solución General de la No Homogénea ;**

la indicamos: $y_g \rightarrow$ $y_g = y_h + y_p$

NOTA: la Solución de la Homogénea, y_h , por **Teo. 3F** es: $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

Finalmente entonces: $y_g = [c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n] + y_p$

Método General para resolver una EDOL- No Homogénea – Orden n

(1º) Hallar **B**ase de **S**oluciones de la **H**omogénea. $\rightarrow B = \{y_1 ; y_2; \ldots; y_n\}$ **(l.i.)**
(2º) Hallar **S**olución de la **H**omogénea. $\rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.
(3º) Hallar **S**olución **P**articular de la **N**o **H**omogénea $\rightarrow y_p$
(4º) Dar la **S**olución **G**eneral $\rightarrow y_g = [c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n] + y_p$

Ejemplos:

12) Dada $y''' - 2 y'' - y' + 2 y = 0$ ($\rightarrow$ **EDOLH – 3 ;** $B = \{y_{1 (x)} ; y_{2 (x)}; y_{3 (x)}\}$ **(l.i.)**)

Fácilmente se puede demostrar que $B = \{ e^x ; e^{-x} ; e^{2x} \}$ (ejercicio)

Luego, su solución general es: $y_g = y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 . y_3.$

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}.$$

13) Dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4.x$ **(*)**, dar su solución general.

↳EDOL"NoH"- 3 → $b(x) = 4.x$ (lineal) ; $B = \{y_1(x); y_2(x); y_3(x)\}$

(1º) $B = \{ e^{x} ; e^{-x} ; e^{2x} \}$ (ejemplo 12)

(2º) $y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ (ejemplo 12)

(3º) **¿y_p? → por "prueba y error"**

¿función de prueba?: y → lineal, función prototipo de la clase de **b.**

$y(x) = A.x + B$ (¿A? ; ¿B?, ¿existen?)

▸ $y(x) = A.x + B$; $y'(x) = A$; $y''(x) = 0$; $y'''(x) = 0$

Reemplazamos en **(*)** y hallamos (si existen) **A** y **B**:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = -A + 2(Ax + B) = 2Ax + (2B - A) = 4.x$$

$$2A.x + (2B - A) = 4.x \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 4 \\ 2B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases} \rightarrow y_p = 2.x + 1$$

(4º) ¿y_g? → $y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + 2x + 1$

14) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 12e^{3x}$ **(*)**, dar su solución general.

↳EDOL"NoH"- 3 → $b(x) = e^{3x}$ (exponencial) ; $B = \{y_1(x); y_2(x); y_3(x)\}$

(1º) $B = \{ e^{x} ; e^{2x} ; 1 \}$ (verificar)

(2º) $y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3$

(3º) **¿y_p? → por "prueba y error"**

¿función de prueba?: y → exponencial, función prototipo de la clase de **b.**

$y(x) = A.e^{3x}$ (¿A? ; ¿existe?)

▸ $y(x) = A.e^{3x}$; $y'(x) = 3.Ae^{3x}$; $y''(x) = 9A.e^{3x}$; $y'''(x) = 27.A.e^{3x}$

Reemplazamos en **(*)** y hallamos **A** (si existe) **:**

$$y''' - 3y'' + 2y' = [27A - 27A + 6A].e^{3x} = [6A]e^{3x} = 12e^{3x}$$

$$[6A]e^{3x} = 12e^{3x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6A = 12 \\ A = 2 \end{pmatrix} \rightarrow y_p = 2e^{3x}$$

(4º) ¿y_g? → $y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 + 2e^{3x}$

15) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 12\,e^x$ **(*) ,** dar su solución general.

↳**EDOL"NoH"- 3** → $b(x) = e^x$ (exponencial) ; $B = \{y_1(x)\,;\, y_2(x);\, y_3(x)\}$

(1º) $B = \{ e^x \,;\, e^{2x} ; 1 \}$

(2º) $y_h = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} + c_3$

(3º) **¿y_p? → por "prueba y error"**

¿función de prueba?: y → exponencial, función prototipo de la clase de **b.**

$y(x) = A.\, e^x$ (¿A? ; ¿existe?)

▸ $y(x) = A.\, e^x$; $y'(x) = A\, e^x$; $y''(x) = A.\, e^x$; $y'''(x) = A.\, e^x$

Reemplazamos en **(*)** y hallamos **A** (si existe) **:**

$y''' - 3y'' + 2y' = [\,A - 3A + 2A\,].\, e^x = [\,0 . A\,]\, e^x \neq 12\, e^x \;\; (\forall A)$

⇒ no existe **A** tal que $A.e^x$ sea **s**olución **p**articular de la **EDOL- NoH**

▸ **¿Esto implica que no existe solución particular??** .

NO, esto sólo implica que la solución particular <u>no es una "exponencial"</u>.

? **¿ porqué ahora no lo es y en el ejemplo-14 (**muy parecido**), si lo era??;**
¿ a que "clase" de funciones pertenecerá la solución particular? ;
¿ habrá "algo" en la ecuación diferencial que de "pistas" al respecto?

16) Dada $x^2 y'' + x\,y' - 4\,y = 12$ **(*) ,** dar su solución general

↳**EDOL"NoH"- 2** → $b(x) = 12$ (constante) ; $B = \{y_1(x)\,;\, y_2(x)\}$

(1º) **¿ B ?**

(2º) **¿ y_h?**

(3º) **¿ y_p? → ¿función de prueba?: y** → cte, función prototipo de la clase de **b.**

▸ $y(x) = A$; $y'(x) = 0$; $y''(x) = 0$.

Reemplazamos en **(*)** y hallamos (si existe) **A**:

$x^2 y'' + x\,y' - 4\,y = -4A = 12 \;\Leftrightarrow\; A = -3 \;\rightarrow\; y_p = -3$

(4º) ¿y_g ? → $\boxed{y_g = y_h + y_p \;\rightarrow\; y_g = y_h - 3}$ → ¿y_h? → ¿ **B** ?

<u>NOTA</u>: estos dos últimos ejemplos muestran que si bien el **Método General** da un camino para resolver las **EDOL,** *<u>en la práctica</u>* y en algunos casos, su aplicación se dificulta. El principal problema está en el **1er paso**; o sea, en la determinación de la Base de Soluciones **(ej: 16)**
Existe *<u>un caso</u>* donde las características que en particular presenta la **EDOL,** permiten salvar esta dificultad, encontrar un **Método para hallar B.** Es el caso de las **EDOL- CC :**

Ecuaciones Diferenciales Lineales a <u>Coeficientes Constantes</u>:

$$a_o.y^{(n)} + a_1.\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}.y' + a_n\,.\, y = b$$

$$a_o\,;\, a_1\,; \ldots\ldots\ldots;\, a_{n-1}\,;\, a_n \in R\,;\, a_o \neq 0$$

Método General para una EDOLH - Coeficientes Constantes

$$a_o .\, y^{(n)} + a_1 .\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} .\, y' + a_n .\, y = 0 \;\; ; \;\; \forall\, x \in [a; b] \qquad \text{(III)}$$

a_o ; a_1 ; ………; a_{n-1} ; $a_n \in \mathbb{R}$; $a_o \neq 0$.

☞ $a_{i(x)} = a_i$, $\forall\, x \in [a; b]$ → *funciones constantes* → *continuas en* [a; b].

(1º) B = Base de Soluciones de (III) → $B = \{y_1 ; y_2; \ldots ; y_n\}$

¿cómo procedemos para hallar B? → por "Prueba y Error".

(Paso-1) elegir una ***"función de prueba"*, *f*** .

(Paso-2) derivar ***f***, reemplazar ***f*** y sus derivadas en **(III)**:

f **; ¿ verifica (III) ?** : ☞ **SI** ⇒ ***f*** *es solución*

☞ **NO** ⇒ ***f*** **no** ***es solución*** ⇒ **(Paso-1)**

(Paso-3) repetir **(P-2)** hasta obtener **"n"** soluciones de **(III)**: $\{f_1 ; f_2 ; \ldots ; f_n\}$

(Paso-4) analizar si $\{f_1 ; f_2 ; \ldots ; f_n\}$ es **BASE de SOLUCIONES**:

¿ **es l.i. ?** : ☞ **SI** ⇒ **FIN del Proceso** → $B = \{f_1 ; f_2 ; \ldots ; f_n\}$

☞ **NO** ⇒ **(Paso-1), reiniciar el proceso hasta obtener B.**

Ejecución del proceso de Prueba y Error:

▸ **(Paso-1): Para elegir *f* (*función de prueba*): ¿por donde empezamos? .**

Inspeccionamos la **EDOL** al efecto de "ver" si presenta alguna característica que nos remita a alguna función "conocida". Al tal fin, lo primero que hacemos es "*simplificar*" el problema, plantear el **"*caso simple*" (n = 2) :**

$$a.\, y''_{(x)} + b.\, y'_{(x)} + c.\, y_{(x)} = 0 \;\; ; \;\; \forall\, x \in [a; b] \quad \text{(III-2)}$$

$a ; b ; c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$.

☑ **¿Que vemos?:** Que **y = y(x)** para ser solución de **(III-2),** debe verificar que **y , y´ e y´´** al ser *multiplicadas* por un número real y luego *sumadas*, hagan **"cero"** la ecuación, *para todo* "*x*". Que, para que esto pase, **y(x)** debe verificar que sus derivadas sean **"*múltiplos de si misma*"**; o sea: $y^{(k)}(x) = \alpha_k\, y(x)$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

☑ **¿Existe tal función?:** si, la "exponencial" tiene esta propiedad.

$$y = e^{r.x} \rightarrow y' = r.\, e^{r.x} \; ; \; y'' = r^2.e^{r.x} ; \ldots\ldots ; \; y^{(k)} = r^k.e^{r.x}$$

Conclusión 1: ***función de prueba*** → $y = e^{r.x}$.

▸ **(Paso-2): La exponencial, ¿*es solución* ?:** $y = e^{r.x} \rightarrow y' = r.\, e^{r.x}$; $y'' = r^2.\, e^{r.x}$

$$a.\, y'' + b.\, y' + c.\, y = a.[r^2.\, e^{r.x}] + b.\, [r.\, e^{r.x}] + c.[e^{r.x}] = 0, \;\; \forall\, x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\, a.\, r^2 + b.\, r + c\,].\, e^{r.x} = 0 \, , \forall\, x \;\; \Leftrightarrow \;\; \boxed{a.\, r^2 + b.\, r + c = 0}$$

Conclusión 2: $y = e^{r.x}$ **es solución de (III-2)** ⇔ **r es cero de** $a.\, r^2 + b.\, r + c = 0$.

NOTA: fácilmente vemos que la *conclusión* obtenida *no depende* del orden de la **EDOL;** que podemos generalizar la misma a **ecuaciones diferenciales lineales de orden "n"**.

DEF. 9 : Ecuación Característica (EC).

Llamamos, **Ecuación Característica** a la **ecuación**:

$$a_o . r^n + a_1 . r^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} . r + a_n = 0,$$

asociada a la **EDOL (III)**: $a_o . y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + \dots\dots + a_{n-1} . y' + a_n . y = 0$

Conclusión General / Paso-2

$y = e^{r.x}$ es solución de (III) ⇔ r es cero de $a_o . r^n + a_1 . r^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} . r + a_n = 0$.

$y = e^{r.x}$ solución de (III) ⇔ r raíz de la "Ecuación Característica".

▸ **(Paso-3) Obtener "n" soluciones de (III): $\{y_1 ; y_2 ; \dots; y_n\}$**

Por Algebra sabemos que una ecuación de grado "**n**" tiene "**n**" raíces; que estas pueden ser simples ó repetidas, reales ó complejas; que, si son complejas, aparecen de "***a pares***".

Luego:
- ♦ Si **m = cantidad de raíces reales** (sin repetir) de la **EC** entonces **m ≤ n ;**
- ♦ Si **r_j solución EC, $r_j \in$ R** entonces $y_j = e^{r_j . x}$ solución de **(III); j=1, 2, …, m**

Conclusión 3: de la **EC** podemos obtener **"m"** soluciones **distintas** de **(III)** con **m ≤ n .**

¿ m = n ?
- ☞ **SI ⇒ (Paso - 4)**
- ☞ **NO ⇒ (Paso - 1)** (reiniciar el proceso, obtener las **"n-m"** sols. faltantes)

▸ **(Paso-4) $\{y_1 ; y_2 ; \dots; y_n\}$; ¿ es BASE de SOLUCIONES ?**

¿ es l.i. ? : ☞ **SI ⇒ FIN del Proceso → $B = \{y_1 ; y_2 ; \dots; y_n\}$**

☞ **NO ⇒ (Paso-1), reiniciar el proceso hasta obtener B.**

Ejemplo 17: $y'' - 4 . y' + 3 . y = 6 . e^x$ **(→EDOLH-2 → $B = \{y_1 ; y_2\}$ (l.i.) ; $b(x) = 6.e^x$)**

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 → $B = \{y_1 ; y_2\}$ (l.i.)

▸ **(Pasos 2 ; 3): EC → $r^2 - 4.r + 3 = 0$ ⇔ $r_1 = 3$; $r_2 = 1$ (2** raíces, reales y distintas**)**

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 3 \Rightarrow \; y_1 = e^{3.x} \\ r_2 = 1 \Rightarrow \; y_2 = e^{x} \end{array}\right\} \rightarrow \text{2 soluciones: ¿son l.i.?}$$

▸ **(Paso- 4):** $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{3x}}{e^x} = e^{2.x} \neq cte \overset{\text{criterio 3 l.i.}}{\Longrightarrow\Longrightarrow}$ **$\{y_1 ; y_2\}$ es li. ; es Base de Soluciones**

$$\Rightarrow \; B = \{ e^{3.x} ; e^x \}$$

(2º) Solución de la Homogénea: $y_h = c_1 e^{3.x} + c_2 e^x$.

(3º) Solución Particular: $y_p = A \, x \, e^x \rightarrow A = -3 \rightarrow y_p = -3 \, x \, e^x$

(Verificar. Explorar porqué no es: **$A.e^x$**)

(4º) Solución General: $y_g = c_1 e^{3.x} + c_2 e^x - 3 \, x \, e^x$

Construcción de la Base de Soluciones según las raíces de la EC.

Distintos Casos para la EDOLH-2 : $a_o\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0$; $\forall\, x \in [a; b]$ (III-2)

$a_o ; a_1 ; a_2 \in R$; $a_o \neq 0$

Caso 1: Raíces Reales y Distintas:

$$a_o\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0$$

EC → $a_o\, r^2 + a_1 . r + a_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 ; r_2 \in R \wedge$ $r_1 \neq r_2$ (*)

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 → $B = \{y_1 ; y_2\}$ (l.i.)

▸ (Pasos 2 ; 3): $r_1 \Rightarrow y_1 = e^{r_1 . x}$

$r_2 \Rightarrow y_2 = e^{r_2 . x}$ → 2 soluciones distintas: ¿son l.i.?

▸ (Paso- 4): $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{r_1 . x}}{e^{r_2 . x}} = e^{(r_1 - r_2).x} = e^{\alpha . x} \neq cte$ [por (*) $\alpha = r_1 - r_2 \neq 0$]

$\underset{\text{crit. } 3}{\Longrightarrow}$ $\{y_1 ; y_2\}$ es li. $\Longrightarrow$ Base de Soluciones $\Longrightarrow$ $B = \{ e^{r_1 . x} ; e^{r_2 . x} \}$

(2º) Solución de la Homogénea – Caso 1: $y_h = c_1 e^{r_1 . x} + c_2 e^{r_2 . x}$

Caso 2: Raíces Reales e Iguales:

$$y'' - 2.\alpha . y' + \alpha^2\, y = 0$$

EC → $r^2 - 2\, \alpha . r + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (r - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 ; r_2 \in R \wedge$ $r_1 = r_2 = \alpha$ (*)

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 → $B = \{y_1 ; y_2\}$ (l.i.)

▸ (Pasos 2 ; 3): $r_1 \Rightarrow y_1 = e^{r_1 . x} \overset{(*)}{=} e^{\alpha . x}$

$r_2 \Rightarrow y_2 = e^{r_2 . x} \overset{(*)}{=} e^{\alpha . x}$ → $y_1 = y_2$ → 1 solución → (Paso -1)

▸ (Paso-1) Buscamos otra solución → ***función de prueba***: $y = x.\, e^{\alpha . x}$

$y = e^{\alpha . x} . x \xrightarrow{\times\, \alpha^2} \alpha^2 . y = e^{\alpha . x} . x . \alpha^2$

$y' = e^{\alpha . x} . (1 + \alpha . x) \xrightarrow{\times\, -2\alpha} - 2.\alpha . y' = e^{\alpha . x} . (-2\, \alpha - 2\, \alpha^2 . x)$

$y'' = e^{\alpha . x} (2\alpha + \alpha^2 . x) \xrightarrow{\cdots\cdots\cdots} y'' = e^{\alpha . x} . (2\alpha + \alpha^2 . x)$

$y'' - 2.\alpha . y' + \alpha^2\, y = e^{\alpha . x} (2\alpha + \alpha^2 x - 2\alpha - 2\alpha^2 x + \alpha^2 x)$

$y'' - 2.\alpha . y' + \alpha^2\, y = 0$ → **ES SOLUCIÓN !!**

Conclusión: $y_2 = x . e^{\alpha . x}$ es solución de la EDOLH-2

▸ (Paso-4): $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x.\, e^{\alpha . x}}{e^{\alpha . x}} = x \neq cte \Rightarrow \{y_1 ; y_2\}$ es li. $\Rightarrow B = \{ e^{\alpha . x} ; x . e^{\alpha . x} \}$

(2º) Solución de la Homogénea - Caso 2: $y_h = c_1\, e^{\alpha . x} + c_2\, x . e^{\alpha . x}$

NOTA: La ***función de prueba***: $y = x.e^{\alpha.x}$; se obtiene acudiendo al método de sustitución.

Se propones como solución la función: $y = e^{\alpha.x}.v(x)$; se busca v (nueva incógnita)

$y = e^{\alpha.x}.v \xrightarrow{\times\,\alpha^2} \alpha^2.y = e^{\alpha.x}.\alpha^2 v$

$y' = e^{\alpha.x}.(v' + \alpha.v) \xrightarrow{\times\,-2\alpha} -2.\alpha.y' = e^{\alpha.x}.(-2\alpha v' - 2\alpha^2.v)$

$y'' = e^{\alpha.x}(v'' + 2\alpha v' + \alpha^2.v) \xrightarrow{\cdots\cdots} y'' = e^{\alpha.x}.(v'' + 2\alpha v' + \alpha^2.v)$

$y'' - 2.\alpha.y' + \alpha^2 y = e^{\alpha.x}(v'') = 0$

☑ $e^{\alpha.x}(v'') = 0 \Leftrightarrow v'' = 0 \Leftrightarrow v(x) = c_1 x + c_2 \xrightarrow{\text{sol part.}} v(x) = x$

Caso 3: Raíces Complejas :

$a_o\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0$

EC → $a_o r^2 + a_1.r + a_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 ; r_2 \in C \wedge$ $r_1 = a + bi$; $r_2 = a - bi$

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 → $B = \{y_1 ; y_2\}$ **(l.i.)**

▸ **(Pasos 2 ; 3):** $r_1 \Rightarrow z_1 = e^{r_1.x}$

$r_2 \Rightarrow z_2 = e^{r_2.x}$ → **2 soluciones a variable compleja !!**

Nuestro trabajo requiere **funciones solución a variable real** .

Para ello, acudimos a la "**Fórmula de Euler**"

☞ "**Fórmula de Euler**": $e^{\alpha i} = \cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)$

EULER $(\alpha = b.x)$

☞ $z_1 = e^{r_1 x} = e^{(a+bi)x} = e^{(ax + i\,b\,x)} = e^{(ax)}.e^{(bx)i} =$

$= e^{(ax)}.(\cos(bx) + i.\text{sen}(bx)) = [e^{(ax)}.\cos(bx)] + i.[e^{(ax)}\text{sen}(bx)]$

☞ $z_1 = [e^{(ax)}.\cos(bx)] + i.[e^{(ax)}\text{sen}(bx)] = y_{11}(x) + i.y_{12}(x)$

con: $y_{11} = e^{(ax)}.\cos(bx)$ (parte real de z_1 → ***función real a variable real***)

$y_{12} = e^{(ax)}.\text{sen}(bx)$ (parte imaginaria de z_1 → ***función real a variable real***)

Luego, obtenemos dos funciones escalares soluciones de la **EDOLH .**

$\underset{\text{crit. }3}{\Longrightarrow} \{y_{11} ; y_{12}\}$ l.i. $\Longrightarrow B = \{e^{(ax)}.\cos(bx) ; e^{(ax)}.\text{sen}(bx)\}$

(2º) Solución de la Homogénea – Caso 3: $y_h = c_1\, e^{(ax)}.\cos(bx) + c_2\, e^{(ax)}.\text{sen}(bx)$

$y_h = e^{(ax)}.[c_1 \cos(bx) + c_2\, \text{sen}(bx)]$

Método General para una EDOL "NoH" - Coeficientes Constantes (CC)

$$a_o .\, y^{(n)} + a_1 .\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} .\, y' + a_n .\, y = b(x) \ ; \ \forall\, x \in [a; b] \quad \textbf{(IV)}$$

a_o ; a_1 ; ....; a_{n-1} ; $a_n \in R$; $a_o \neq 0$.

☞ $a_{i(x)} = a_i$, $\forall\, x \in [a; b]$ → *funciones constantes* → *continuas en* [a; b].

Observación 1: este tipo de **EDOL** es un caso particular de Ecuación Diferencial Lineal. Luego, el Método General a aplicar para resolver **(IV)** es el ya visto; pero, con un problema resuelto. Para las **EDOL-CC** (**y sólo para ellas!!**) contamos con un Método para hallar **B,** la **B**ase de **S**oluciones de la **H**omogénea.

Método General para resolver una EDOL- No Homogénea – Coefs Ctes o No

(1º) Hallar **B**ase de **S**oluciones de la **H**omogénea.	→ $B = \{y_1 ; y_2; \ldots; y_n\}$ **(l.i.)**
(2º) Hallar **S**olución de la **H**omogénea.	→ $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.
(3º) Hallar **S**olución **P**articular de la **N**o **H**omogénea	→ y_p
(4º) Dar la **S**olución **G**eneral	→ $y_g = [\, c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \,] + y_p$

Observación 2: si repasamos los pasos del Método General vemos que resta un problema por resolver; el de la **S**olución **P**articular **(3º)**. Para hallar esta solución acudimos al método de "Prueba y Error", detectamos ciertos problemas en el criterio usado para elegir la "función de prueba". Recordamos que tal función era la "prototipo" de la clase de funciones a la que pertenece **"b"** (el "término independiente") y que si bien en muchos casos este criterio sirvió (hallamos la solución particular) hubo otros en los que no; y esto aunque las ecuaciones diferenciales eran muy similares.
Resolvemos este último problema a través de "sistematizar" la búsqueda de soluciones particulares.
Para lograr este objetivo existen distintos métodos, vemos uno de ellos.

Solución Particular – *MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS*.

Este Método, en esencia, es el de **"Prueba y Error"** que usamos en los ejemplos.
Consiste en elegir como **"*función de prueba*"** la función prototipo correspondiente a la clase de funciones a la que pertenece **"b"** (o sea, una función similar a **"b"** pero con **"coeficientes indeterminados"**); reemplazarla en la ecuación diferencial y hallar, de ser posible, los ***valores de los coeficientes*** para que la función propuesta sea la solución particular buscada.

Ejemplos:

18) Dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 6.x - 3$ **(*)** , $b(x) = 6.x - 3$ → **" lineal "**.

¿y_p? → **función de prueba:** $y_{(x)} = A.x + B$ (¿A? ; ¿B?, ¿existen?)

▸ $y_{(x)} = A.x + B$; $y'_{(x)} = A$; $y''_{(x)} = 0$; $y'''_{(x)} = 0$ (Reemplazamos en **(*)**)

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = -A + 2(Ax + B) = 2Ax + 2B - A = 6.x - 3$$

$$2A.x + (2B - A) = 6.x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 6 \\ 2B - A = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow y_p$$

▸ $\boxed{y_p = 3x}$ (verificar)

19) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 3e^{3x}$ (*) , $b(x) = 3e^{3x}$ → " exponencial ".

¿y_p? → ***función de prueba***: $y_{p(x)} = A.\,e^{3x}$

- $y_{p(x)} = A.\,e^{3x}$; $y'_p(x) = 3.\,A\,e^{3x}$; $y''_p(x) = 9\,A.\,e^{3x}$; $y'''_p(x) = 27.\,A.\,e^{3x}$

Reemplazamos en **(*)**:

$y''' - 3y'' + 2y' = [\,27\,A - 27\,A + 6\,A\,].\,e^{3x} = [\,6\,A\,]\,e^{3x} = 3\,e^{3x}$

$[\,6\,A\,]\,e^{3x} = 3\,e^{3x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6\,A = 3 \\ A = \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to y_p$

- $y_p = \frac{1}{2}\,e^{3x}$ (verificar)

20) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = e^{x}$ (*) , $b(x) = e^{x}$ → " exponencial ".

↳ EC: $r^3 - 3r^2 + 2r = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1$; $r_2 = 2$; $r_3 = 0$

(1º) $B = \{\, e^x ;\ e^{2x} ;\ 1 \,\}$

(2º) $y_h = c_1\,e^x + c_2\,e^{2x} + c_3$

(3º) ¿y_p? → ***función de prueba***: $y_{p(x)} = A.\,e^{x}$

- $y_{p(x)} = A.\,e^{x}$; $y'_p(x) = A\,e^{x}$; $y''_p(x) = A.\,e^{x}$; $y'''_p(x) = A.\,e^{x}$

Reemplazamos en **(*)**:

$y''' - 3y'' + 2y' = [\,A - 3\,A + 2\,A\,].\,e^{x} = [\,0\,.\,A\,]\,e^{x} = 0 \neq 12\,e^{x}$

⟹ **no existe** **A** tal que $A.e^x$ sea **s**olución **p**articular de la **EDOL- NoH .**

? **¿ porqué y_p no es solución de (*) si en el ej-19 (**muy parecido**) si lo era ?;**
¿ hay "algo" en la EDO o en su resolución que de "pistas" al respecto?.
SI !!! : $e^x = e^{1.x}$ y **"1" es raíz de la EC ; luego,**
e^x solución de la Homogénea ⇒ $A\,e^x$ también lo es y ∀A !!

Para salvar este problema, y_p (la función de prueba fallida**) se multiplica por "x" ;**
⇒ ***función de prueba*** : $f_{p(x)} = y_{p}(x)\,.\,x \to f_{p(x)} = A.e^{x}.x$ (verificar que existe **A**) .

Conclusión General: para $b(x) = k\,.\,e^{\lambda.x}$ (k, $\lambda \in R$)

☑ **Si λ no es raíz de la EC ⇒ $y_p(x) = A.\,e^{\lambda.x}$;**

☑ **Si λ es raíz de multiplicidad "m" de la EC entonces $f_{p(x)} = y_p(x)\,.\,x^m$**
⇒ $f_{p(x)} = A.e^{\lambda.x}.\,x^m$

☑ **Si $\lambda = 0$ entonces $b(x) = k\,e^{0.x} \to b(x) = k$; luego,**
si *0* es raíz de multiplicidad "m" de la EC entonces $f_{p(x)} = y_p(x)\,.\,x^m$
⇒ $f_{p(x)} = A.\,x^m$.

☑ **en general, cualquiera sea "b(x)", si "y_p" la función de prueba elegida no es solución particular de la no homogénea entonces: $f_{p(x)} = y_p(x)\,.\,x^m$**

21) Dada $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$ (*) , **b**(x) = $4e^{2x}$ → " **exponencial** ".

↳ EC: $r^2 - 4r + 4 = 0$ ⇔ $r_1 = r_2 = 2$ (<u>multiplicidadde la raíz</u> = 2)

(1º) $B = \{ e^{2x} ; x.e^{2x} \}$ (verificar)

(2º) $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x.e^{2x}$

(3º) ¿y_p? → ***<u>función de prueba</u>***: $y(x) = A.e^{2x}.x^2$ (probamos…)

▸ $y(x) = A.x^2.e^{2x}$; $y'(x) = [2Ax + 2A.x^2].e^{2x}$; $y''(x) = [2A + 8Ax + 4Ax^2].e^{2x}$

Reemplazamos en **(*)**:

$y'' - 4y' + 4y = [2A].e^{2x} = 4e^{2x}$ ⇔ $A = 2$

▸ $y_p = 2.x^2.e^{2x}$ (verificar que es solución de la no homogénea)

22) Dada $y''' - y'' = 10$ (*) **b**(x) = 10 → **"constante"**

↳ **EC** → $r^3 - r^2 = r^2(r-1) = 0$ ⇔ $r_1 = 1$; $r_2 = r_3 = 0$ (→ mult. = 2)

(1º) $B = \{ e^x ; 1 ; x \}$ (verificar)

(2º) $y_h = c_1 e^x + c_2 + c_3 . x$

(3º) ¿y_p? → ***<u>función de prueba</u>***: y_p = ¿A? ; NO → $y_p = A.x^2$

▸ $y(x) = A.x^2$; $y'(x) = 2Ax$; $y''(x) = 2A$; $y'''(x) = 0$.

Reemplazamos en **(*)** : $y''' - y'' = -2A = 10$ ⇔ $A = -5$

▸ $y_p = -5.x^2$

(4º) ¿y_g? → $y_g = y_h + y_p$ → $y_g = c_1 e^x + c_2 + c_3.x - 5x^2$

23) Dada $y''' - y'' = 12x$ (*) **b**(x) = 12 x → **"lineal"**

↳ **EC** → $r^3 - r^2 = r^2(r-1) = 0$ ⇔ $r_1 = 1$; $r_2 = r_3 = 0$ (→ mult. = 2)

(1º) $B = \{ e^x ; 1 ; x \}$

(2º) $y_h = c_1 e^x + c_2 + c_3 . x$

(3º) ¿y_p?: ***<u>función de prueba</u>***: y_p = ¿ A x + B? $\xrightarrow{NO}$ $y_p = (Ax+B).x^2 = Ax^3 + Bx^2$

▸ $y(x) = Ax^3 + Bx^2$; $y'(x) = 3.Ax^2 + 2.Bx$; $y''(x) = 6Ax + 2B$; $y'''(x) = 6A$

Reemplazamos en **(*)** :

$y''' - y'' = 6A - 6Ax - 2B = -6Ax + (6A - 2B) = 12x$

$-6Ax + (6A - 2B) = 12x \Leftrightarrow \begin{cases} -6A = 12 \\ 6A - 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -6 \end{cases}$ → $y_p = -2.x^3 - 6x^2$

(4º) ¿y_g? → $y_g = y_h + y_p$ → $y_g = c_1 e^x + c_2 + c_3.x - 2.x^3 - 6x^2$

Solución Particular – *MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.*

$a_o . y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} . y' + a_n . y = b(x)$; $\forall x \in [a; b]$

a_0 ; a_1 ; ………; a_{n-1} ; $a_n \in R$; $a_o \neq 0$.

Si $\lambda \in R$ y λ no es raíz de la Ecuación Característica, entonces:

Si b(x) es:	Seleccionar y_p :
$\alpha\, e^{\lambda . x}$	$A\, e^{\lambda . x}$
α sen (βx)	A sen $(\beta x) + B \cos(\beta x)$
$\alpha \cos(\beta x)$	A sen $(\beta x) + B \cos(\beta x)$
$\alpha . x$	$A + B . x$
$\alpha . x^2$	$A + B . x + C . x^2$
$\alpha_0 . + \alpha_1 . x + \ldots\ldots + \alpha_S . x^S$	$A_0 . + A_1 . x + \ldots\ldots + A_S . x^S$
$\alpha . x^2 . e^{\lambda . x}$	$(A + B . x + C . x^2) . e^{\lambda . x}$
$(\alpha_0 . + \alpha_1 . x + \ldots\ldots + \alpha_S . x^S) . e^{\lambda . x}$	$(A_0 . + A_1 . x + \ldots\ldots + A_S . x^S) . e^{\lambda . x}$
$\alpha . x^2 .$ sen (βx)	$(A_1 + B_1 . x + C_1 . x^2)$ sen $(\beta x) + (A_2 + B_2 . x + C_2 . x^2) \cos(\beta x)$
$\alpha . x^2 . \cos(\beta x)$	$(A_1 + B_1 . x + C_1 . x^2)$ sen $(\beta x) + (A_2 + B_2 . x + C_2 . x^2) \cos(\beta x)$
α sen $(\beta x) . e^{\lambda . x}$	$(A$ sen $(\beta x) + B \cos(\beta x)) . e^{\lambda . x}$
$\alpha \cos(\beta x)\ e^{\lambda . x}$	$(A$ sen $(\beta x) + B \cos(\beta x)) . e^{\lambda . x}$
$P(x)$. sen $(\beta x) . e^{\lambda . x}$	$(Q(x)$ sen $(\beta x) + H(x) \cos(\beta x)) . e^{\lambda . x}$
$P(x) . \cos(\beta x) . e^{\lambda . x}$	$(Q(x)$ sen $(\beta x) + H(x) \cos(\beta x)) . e^{\lambda . x}$
	Q y H polinomios del mismo grado que P

Recordar que:

☑ **Si λ es raíz multiplicidad "m" de la EC, entonces las correspondientes soluciones de la homogénea son: $y_1(x) = e^{\lambda . x}$; $y_2(x) = x . e^{\lambda . x}$; …. ; $y_m(x) = x^m . e^{\lambda . x}$**

☑ **Si λ es raíz de multiplicidad "m" de la EC entonces $y^*_p(x) = y_p(x) . x^m$ (con y_p la correspondiente de la tabla anterior)**

Ejemplos:

24) Dada $y''' - 3y'' + 3.y' - y = 4.e^x$, hallar su solución general

↳EDOL"NoH"- 3 → $b(x) = 4.e^x$ (constante) ; $B = \{y_{1(x)} ; y_{2(x)} ; y_3\}$

1º) **Base de Soluciones**

▸ (Pasos 2 ; 3): **EC** → $r^3 - 3r^2 + 3.r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$

$B = \{ e^x ; x.e^x ; x^2.e^x \}$ (verificar)

2º) **Solución de la Homogénea**: $y_h = c_1 e^x + c_2\, x.\, e^x + c_3\, x^2.\, e^x$.

3º) **Solución Particular**: $y_p = A\, x^3 e^x \rightarrow A = \frac{2}{3}$

4º) **Solución General**: $y_G = c_1 e^x + c_2\, x.\, e^x + c_3\, x^2.\, e^x + \frac{2}{3} x^3 e^x$

25) $y''' - y'' = \text{sen } x$ (*)

↳EDOL"NoH"- 3 → $b(x) = \text{sen } x$ (trig.) ; $B = \{y_{1(x)} ; y_{2(x)} ; y_{3(x)}\}$

1º) **Base de Soluciones**

▸ (Pasos 2 ; 3): **EC** → $r^3 - r^2 = r^2 (r-1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 0 ; r_3 = 1$

$B = \{ 1 ; x ; e^x \}$ (verificar)

2º) **Solución de la Homogénea**: $y_h = c_1 + c_2 .\, x + c_3\, e^x$.

3º) **Solución Particular**: $y_p = A \text{ sen } x + B \cos x$

▸ $y(x) = A \text{ sen } x + B \cos x$; $y'(x) = A \cos x - B \text{ sen } x$;
$y''(x) = - A \text{ sen } x - B \cos x$; $y'''(x) = - A \cos x + B \text{ sen } x$.

Reemplazamos en **(*)** y hallamos (si existe) **A** y **B**:

$y''' - y'' = - A \cos x + B \text{ sen } x + A \text{ sen } x + B \cos x = (B-A) \cos x + (B+A) \text{ sen} x = \text{sen } x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B - A = 0 \\ B + A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = ½ \\ B = ½ \end{cases} \rightarrow y_p = ½ \text{ sen } x + ½ \cos x$

4º) **Solución General**: $y_G = y_h = c_1 + c_2 .\, x + c_3 e^x + ½ \text{ sen } x + ½ \cos x$

7.4 Ejercicios Edo

1.- Para las ecuaciones planteadas a continuación:

i) Indicar cuál de ellas es una **ecuación diferencial ordinaria** (**EDO**).

ii) Dar el orden de las **EDO** reconocidas en (i)

(a) $y`` + 2\cdot y` + y = 0$;

(b) $y`` + 2\cdot y` + y = \text{sen } x$

(c) $x`` + x = t^2$;

(d) $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z} = \dfrac{-2mE}{h^2}.\psi$

(e) $y` - x.\, y = 0$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

(g) $3y + 2x = 4x$

(h) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \dfrac{-2mE}{h^2}.\psi$

(i) $y`` + \ln x \cdot y` = x^2$

(j) $\dfrac{d^2y}{dy^2} = \dfrac{dy}{dx}$

(k) $y``` + 12\, y` = 0$

(m) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

2.- Determinar cuál de las siguientes funciones es **solución** de la **EDO** que se indica en cada caso; cual no lo es. Justificar las respuestas.

a) $y'' = 4y$ → $f(x) = 5.e^{2x}$; $g(x) = 3$; $h(x) = 0$

b) $t.\, y' - t\, y^2 = y$ → $f(x) = \dfrac{-2t}{t^2 - 2}$; $g(x) = \dfrac{-2t}{t^2 - 1}$

c) $y'' + y = 0$ → $f(x) = C_1 \text{ sen } t$; $g(x) = C_2 \cos t$

d) $y'' + 2y' + y = 0$ → $f(x) = e^{x}$; $g(x) = e^{-x}$; $h(x) = x\, e^{-x}$

e) $y' - x\, y = 0$ → $f(x) = x.e^{x}$; $g(x) = e^{x^2}$; $h(x) = e^{x^2/2}$;

f) $y' + 3x^2 y = 6x^2$ → $f(x) = e^{-x^3}$; $g(x) = 2$; $h(x) = 2 + c.e^{-x^3}$

f₁) Identificar una solución de la "*homogénea asociada*".

f₂) Identificar una solución "*particular*" de la EDO.

3.- (A) Determinar las constantes C_1 y C_2 para que $y = C_1 \text{ sen } t + C_2 \cos t$, sea solución del Problema de Valores Iniciales **(Pvi)**:

$$y'' + y = 0 \;;\quad y(0) = 1 \;;\quad y'(0) = 0$$

(B) Dada $y' - e^{x^2} = 0$ **(I)** , $y(5) = 0$ **(Pvi)**

a) V ó F, justificar respuesta: **(I)** es una EDO .

b) V ó F, justificar respuesta: $\int e^{x^2} dx$ es solución de **(I)**

c) V ó F, justificar respuesta: $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ es solución del **(Pvi)**

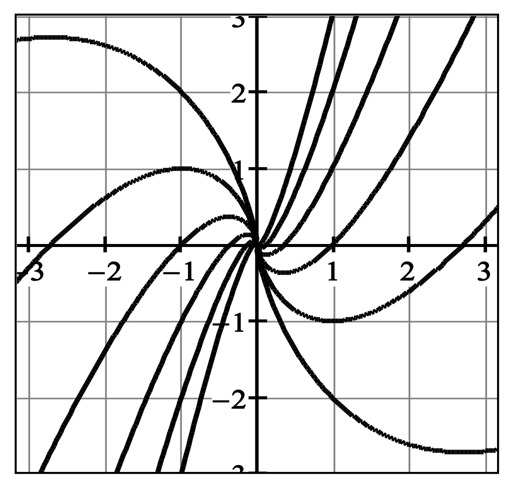
4.- Dada $\mathbf{y' - \frac{1}{x} . y = 1}$;

el gráfico muestra curvas solución correspondientes a dicha EDO.

Se pide:

a) dadas **f**(x) = **x (x-1)** y **g**(x) = **x. ln x,** analizar si son solución de la EDO. Si lo fueran, analizar si son solución de la EDO, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$

b) Identificar, entre todas las gráficas, la que corresponde a la (o las) soluciones halladas en el item **(a).**



c) Verificar que $\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}$, **h**(x) **= (k + ln|x|). x** es solución de la EDO. Luego, hallar **h** si se sabe que **h** es solución de la EDO y **P(-1; 1)**$\in$ **graf h.**

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN

(I) EDO - 1er Orden a "variables separables" (*v.s.*)

5.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales a variables separables:

a) $x' = \dfrac{t^3}{x^2}$

b) $x' \; x\sqrt{1-t^2} = t$

c) $x' = (x-1).(x-2)$

d) $\mathrm{tg}\, t \, . \cos x \, dt + \mathrm{tg}\, x \, dx = 0$

e) $(e^x + 1) \cos t \; dt + e^x \; \mathrm{sen}\, t \; dx = 0$

f) $y' + y = 0$

g) $y' - \cos x \, . \, y = 0$

h) $y = 2 + \int_1^x y(t).dt$.

6.- a) Establecer cuales de las siguientes EDO son a ***v.s.*** y cuales no.

I) $y' = 3\,x^2\,(1+ y^2)$

II) $y' = \dfrac{y}{x + y}$

III) $x.y\,(y-1)\, dx - (1+ x^2)\, dy = 0$

IV) $(\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\, y)\, dx + \cos y.\, (x+1)\, dy = 0$

V) $y' - 2\,y = 5$

VI) $y' - 2\,y = 5\,x$

VII) $y' - 2\,x\,y = 0$

VIII) $y' - 2\,x\,y = 5$

b) Hallar la solución general para las EDO a ***v.s.*** detectadas en **(a)** y, de ser posible, dar la solución en forma explícita (con fórmula **y = f(x)** ó **x = f(y)** según el caso).

7.- Resolver los siguientes **PVI**. Dar la función solución en su forma explícita (de ser posible) y graficar la curva solución:

a) $\begin{cases} x\,.\,x' = -t \\ x(0) = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\,.\,x' = -t \\ x(0) = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1+u).dv - (1+v).du = 0 \\ v(3) = -5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (1+u).dv - (1+v).du = 0 \\ v(3) = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (1+u).dv - (1+v).du = 0 \\ u(-3) = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y^2\,.\,y' - 2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

8.- Todo **PVI** con EDO de 1er orden a ***v.s.*** y condición inicial de la forma **$y(x_o) = y_o$;** una vez separada las variables, tendrá el siguiente aspecto:

$$S(y)\,dy = R(x)\,dx; \qquad y(x_o) = y_o \quad \text{(I)}$$

Si **R** es continua y no nula en un intervalo **I** tal que $x_o \in I$ **;** la solución de **(I)** puede obtenerse a partir de aplicar Integrales Definidas (en lugar de Indefinidas) a ambos miembros de la igualdad, y como sigue:

$$\int_{y_o}^{y} S(y)\,dy = \int_{x_o}^{x} R(x)\,dx$$

Resueltas las integrales tenemos, directamente, la solución particular buscada; o sea, la que verifica la condición inicial: $y(x_o) = y_o$.

a) Comprobar la afirmación anterior resolviendo el ejercicio **7f** por el método de las "integrales definidas":

b) Resolver el siguiente PVI: $y' - e^{x^2} = 0$; $y(x_o) = y_o$

1) Aplicando el método de las "integrales definidas"
2) Aplicando el método de las "integrales indefinidas".
3) ¿Qué método conviene?. ¿Porqué?

9.- a) Hallar **C**; curva que pasa por **A**(1; -e) y tal que la "pendiente de la recta tangente" a **C** en cualquier punto **P**(x;y) $\in$ **C,** sea igual a la "ordenada" de **P**. Graficar **C,** verificar **B**(0; -1)$\in$ **C** y que en ese punto se cumple la condición que caracteriza a **C.**

b) Dos curvas que al cortarse forman un *"ángulo recto"* se dice que son *"ortogonales"* (en el punto de "corte"). Para **C** y **B** del ítem **(a),** se pide hallar **C*** tal que **$C^* \cap C = \{B\}$;** **C*** y **C** ortogonales en **B**.

* Equivalentemente, que si **t** y **t^*** son respectivamente las rectas tangentes (en **B**) a **C** y C*, entonces $t \perp t^*$.

* Sugerencia: recordar "$m_t\,.\,m_{t^*} = -1 \Rightarrow t \perp t^*$" .

Graficar **Γ** y **C**; comprobar que son *ortogonales.*

(II) EDO – Lineales de 1er Orden

10.- Completar la siguiente oración: "una EDO Lineal de 1er Orden es una ecuación diferencial de la forma: ……………………………………"

a) Lo que distingue a las EDO entre sí y permite su clasificación en "tipos" de EDO (variables separables, lineales,..) es el método que usado para resolverlas. Si no es a variables separables (***v.s.***), existe un método genérico que, con sus variantes, se puede aplicar una vez detectado que la EDO no es a ***"v.s."*** Este método consiste en hacer un "***cambio de variables***" en la ecuación con el objeto de que, en las nuevas variables, esta ***pase a ser a "v.s."*** Para resolver Lineales de 1er Orden y del tipo del ejercicio 6a-II, se acude a este método. (no así para las Lineales de Orden n, con n > 1 o de otro tipo).

- ▶ **Lineales de 1er Orden (en x;y; y´)** →cambio variables: "$y = u_{(x)}.v_{(x)}$".
- ▶ **Homogéneas** (6a-II) →cambio variables: "$y = x.\, v_{(x)}$".

b) b1) Establecer cual de las EDO del ejercicio **6** es **Lineal de 1er Orden**.

b2) Hallar la solución general de las Lineales de 1er Orden detectadas; hacer esto por medio del "cambio de variables" indicado.

b2) Hallar la solución general de la EDO del ej. 6a-II (homogénea); hacer esto por medio del "cambio de variables" apropiado al caso.

c) Dado el PVI: $y' + P(x)\, y = 0$; $y(x_o) = y_o$ (**P** continua en $I \,/\, x_o \in I$)

demostrar que $y_{(x)} = y_o\, e^{F(x)}$ con $F_{(x)} = \int_{x_o}^{x} \left(-P(x)\right) dx$ es solución.

11.- Resolver las siguientes EDO, con el método apropiado al caso.

a) $(1+x^2)\, dy - x\, y\, dx = 0$

b) $y' + 2 \,.\, y/x = x^3$

c) $(1+u).\, v\, du + (1-v)\, u\, dv = 0$

d) $(y^2 - xy)\, dx + x^2\, dy = 0$

e) $y' = \dfrac{x+y}{x}$

f) $x \,.\, dy = y.\,(1 - 3x\, \text{sen} x).\, dx$

g) $x.\, y' - y = x^2 \,.\, \text{sen}\, x$

h) $\text{tg}\, x.\ \cos y. + y'\, \text{tag}\, y = 0$

i) $(y^2 - 1)\, dx - (2y + x\, y)\, dx = 0$

j) $(1 - y).\, y.\, dx - x^2\, dy = 0$

k) $y' - y = e^{x}$

l) $y - x \,.\, y' = 1 + x^2\, y'$

m) $y' - \dfrac{x.y}{1+x^2} = x$

n) $x\,.y\,.\,y' = 1 - x^2$

o) $y^2.\, dy - (x^3 + t) = 0$

p) $2y \cos y\, dy = y\, \text{sen} y\, dx + \text{sen} y\, dy$

PROBLEMAS Y APLICACIONES DE LAS EDO - 1er ORDEN

1.- Sabiendo que f y g son soluciones de $y' + P(x)\,y = b(x)$; indicar **V** ó **F**, justificar :

a) " $h = f - g$ es solución de $y' + P(x)\,y = 0$ "

b) " $p = k.f$, $k \in \mathbb{R}$ es solución de $y' + P(x)\,y = b(x)$ ".

2.- Dada $g(x) = x.\,f(x)$, indicar **V ó F** (*justificar*):

a) si f es solución de $y' + P(x)\,y = 0$ entonces g es solución de $y' + P(x)\,y = f(x)$.

b) si f es solución de $y' + P(x)\,y = 0$ entonces $h(x) = g(x) + 2$ es solución de $y' + P(x)\,y = f(x) + 2$.

3.- Dada $y' - x^2 y^2 + k\,x\,y = -\dfrac{2}{x^2}$; se pide:

a) **V ó F** , justificar: la EDO dada es una EDO Lineal de 1er Orden.

b) Hallar k de modo que $z(x) = \dfrac{2}{x}$ sea solución.

4.- Sean "**y**" y "**V**" **,** altura y volumen de agua en un tanque al instante "**t**". Si el agua se escapa por un orificio en el fondo de área "**a**", entonces la **Ley de Torricelli** establece que: **"**la razón de cambio de **V** en el tanque que se vacía, es proporcional a la raíz cuadrada de **y** **" .** La ecuación que modeliza este proceso es:

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{y} \quad \text{con} \quad k = -a\sqrt{2g}\ ; \quad g = \text{aceleración gravedad} \ (g = 32 \text{ pies/seg}^2)$$

Para un tanque cilíndrico de **9** pies de altura, **2** pies de radio y con el orificio de salida circular y radio de **1** pulgada, se pide:

a) demostrar que **"y"** satisface el siguiente **Pvi** :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{72}\sqrt{y} \ ; \quad y(0) = 9 \qquad \left(\text{considerar que } \mathbf{1\ pulgada} = \frac{1}{12}\ \mathbf{pies}\right)$$

b) Suponiendo que el tanque está lleno al instante en que comienza a perder agua, hallar **y = y(t)** , indicar el dominio natural de esta función **y** calcular el tiempo mínimo requerido para que quede completamente vacío.

5.- La ecuación que describe la caída de un cuerpo de masa "m" en un medio resistente es:

$m\,v' + k\,v = m\,g$; con **v** = velocidad de caída y **g =** aceleración gravedad

a) demostrar que si **x =** *posición* del cuerpo al instante t, **x(0) = 0** ; **v(0) = 0**

entonces
$$x(t) = \frac{m.g}{k}.t - \frac{m^2.g}{k}\left(1 - e^{\frac{-k\,t}{m}}\right)$$

b) La velocidad de caída tiende a uniformarse en un valor, ¿Cuál es?.

6.- La **Ley de Newton del calentamiento (enfriamiento)** establece que: *"la razón a la que se calienta (enfría) un cuerpo es* *proporcional* *a la* *diferencia* *entre la temperatura del cuerpo* (***T***) *y la del medio ambiente* (**M = cte**)*"*.

a) Escribir la EDO que modeliza lo expresado por la Ley de Newton. Clasificar la ecuación obtenida. Analizar el signo de la constante de proporcionalidad según el cuerpo se esté calentando o enfriando.

b) Resolver la EDO en forma genérica y hacer un bosquejo de las curvas solución para los casos en que la temperatura inicial, T_o, sea mayor, menor o igual **M.**

c) En un horno que se halla a 100ºC se introduce un cuerpo cuya (T_o) es de 20ºC. Si a la hora de haberlo puesto en el horno, su temperatura es de 60ºC y si hay que sacarlo cuando alcance los 80ºC ¿Cuánto tiempo más hay que dejarlo en el horno?.

7.-Experimentalmente los psicólogos cognitivos han hallado la siguiente "ley del aprendizaje": " *la tasa a la que una persona "promedio" puede memorizar un conjunto de* ***N*** *hechos es proporcional al número de hechos que falten por memorizar"*.

a) Si con "***y***" indicamos el nro de hechos memorizados en "***t***" minutos por una persona promedio, ¿cuál de las siguientes expresiones es la "traducción matemática" de la ley del aprendizaje?; *¿porqué*?:

$$\frac{dy}{dt} = k\,y \quad (y(0) = 0)\ ; \qquad \frac{dy}{dt} = k\,(N - y) \quad (y(0) = N)\ ; \qquad \frac{dy}{dt} = k\,(N - y) \quad (y(0) = 0).$$

b) Pablo debe rendir el parcial de Física dentro de ***3 hs*** y todavía tiene que memorizar ***60 fórmulas***. Para ver si llega, toma el tiempo que le lleva memorizar ***10 fórmulas***, el cual es de ***30 minutos***. Pablo (*que desconoce la ley del aprendizaje*) hace cuentas y concluye que llega (*justo, pero llega*). ¿Qué cuentas hace?; ¿Qué conocida "regla" usa?.

c) Según la *ley del aprendizaje* calcular: ***(i)*** cuantas fórmulas memorizará en **3 hs.;** ***(ii)*** tiempo para que le falte ***sólo una*** por memorizar.
(¿te parece *razonable* esta ley (*o pensas como Pablo*)? ; ¿porqué? .).

8.- Cierto rumor comenzó a extenderse un día por un pueblo de 1000 habitantes. Después de una semana 100 personas habían escuchado el rumor. Considerando que la razón de aumento del número de personas que han oído el rumor es proporcional al de la que todavía no lo han oído y siendo ***x(t)*** la cantidad de personas que oyó el rumor a la semana ***t*** ; se pide:

a) Indicar cual de los siguientes **Pvi.** modeliza esta situación:

$$\textbf{(I)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\,x \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(II)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\,(1000 - x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(II)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\,(x - 1000) \\ x(0) = 100 \end{cases}$$

b) Resolver el problema seleccionado.

c) hallar el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de la población haya escuchado el rumor.

9.- DECAIMIENTO RADIACTIVO

Las sustancias radiactivas decaen por la emisión espontánea de radiación. Si con m se indica la ***masa restante*** al instante t a partir de una ***masa inicial*** m_o de la sustancia, a nivel experimental se encuentra que la *rapidez relativa* de decaimiento, $-\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dt}$, es constante. Se tiene así que la ecuación que modeliza el ***"decaimiento radiactivo"*** es:

$$\frac{dm}{dt} = k\,.\,m$$ (¿Qué signo tiene ***"k"*** ? ; ¿ porqué ?).

Dicho de otra forma, se tiene que: " la rapidez con la que se desintegra una sustancia radiactiva es proporcional a la masa presente"

a) Resolver el **Pvi** relativo al ***"decaimiento radiactivo"*** ; graficar la función obtenida , verificar que la misma describe el proceso de decaimiento.

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = k\,.\,m \\ m(0) = m_o \end{cases}$$

b) Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos de **"vida media",** o sea, del *"tiempo requerido para que decaiga la mitad de la cantidad de sustancia presente, cualquiera que esta sea".* Se indica: $t_{1/2}$. Verifica: $m(t_{1/2}) = \frac{1}{2}\, m_o$

Indicar V ó F (justificar) : en este caso se tiene que:

(i) el $t_{1/2}$ es independiente de m_o ; **(ii)** $k = \dfrac{-\ln 2}{t_{1/2}}$

10.- Se sabe que la vida media del **radio 226** es de **1590 años.** Se quiere hallar:

a) una fórmula para calcular la masa de **radio 226** que queda después de **t** años para una muestra de **100 mg** de **radio 226 .**

b) la masa después de **1000 años**.

c) la cantidad de años requerida para que la masa inicial se reduzca a **30 mg.**

11.- En **3 días,** una muestra de **radón 222** decayó hasta el **58%** de su masa original.

a) ¿ cual es la vida media de este elemento **?.**

b) ¿ cuando tiempo se requiere para que la masa decaiga hasta el **10%** de m_o **?.**

c) V ó F : la rapidez de decaimiento es mayor el **1er** día que el **3ro.**

12.- Sabiendo que ^{10}Sr se descompone a una velocidad proporcional a su masa en cada instante "t", que la masa inicial es de m_0 **grs**. y que tarda **25 años** en descomponerse el **50%** de la misma, se pide:

a) Plantear la EDO que modeliza el proceso, resolverla y hallar la función que da la masa remanente en cada instante "t" . Graficar dicha función .

b) Hallar el tiempo "t" requerido para que se descomponga el 75% de la masa inicial. Marcar este dato en el gráfico anterior

c) Indicar V ó F justificando:

i) ***"la función $f(t) = m_0\,(2^{-t/25})$ es solución de la ecuación diferencial"***

ii) ***"la rapidez de descomposición aumenta al aumentar la masa inicial"*** .

13.- Se aisló **1 gr.** de un elemento desconocido y se observó que el mismo se desintegraba a una velocidad proporcional al cuadrado de la cantidad presente. Se pide:

a) Analizar si este elemento verifica las generales de la ley para los elementos radiactivos. Luego, tomando **"x = masa restante al instante t "** (en años), plantear el **Pvi** que modeliza el proceso de desintegración del mismo . Resolverlo y hallar la función que da $\mathbf{x = x(t)}$ **.**

b) Hallar la cte de desintegración si se observa que al año, restan **0.5 gr.** Graficar la función. Analizar si el tiempo vida media es independiente de la masa inicial.

14.- En una reacción química se define como "***velocidad de reacción***", v , a la variación (en este caso *disminución*) en la unidad de tiempo del reactivo del caso.

O sea, si **C** = concentración del reactivo al instante **t** → $v = \dfrac{dC}{dt}$.

La EDO que modeliza la reacción depende del ***"orden de la reacción"*** **(n)** .

Para reacciones de un solo componente el **Pvi** es: $\dfrac{dC}{dt} = k \, . \, C^{n}$; $C(0) = C_o$

a) Discurtir el signo de "k" .

b) Resolver el **Pvi.** para **n = 0 ; n = 1 ; n = 2 .**
En cada caso graficar las funciones solución; hallar una expresión para el cálculo del $t_{1/2}$ (tiempo de vida medio) y discutir su dependencia (o no) de C_o.

15. Para una sustancia que sigue una cinética de 1er orden, si C = *concentración* de la sustancia al instante **t** ([**t**]= min.) , se pide :

a) obtener C en función del tiempo , si se sabe que la concentración inicial de la sustancia es de 10 mol/l y que a los 30 minutos se descompuso el 50 % de la cantidad inicial.

b) responder (sin calcular): el 90 % de la cantidad inicial, ¿tarda más o menos de 30 min. en descomponerse?. Luego, calcular el tiempo requerido para que se descomponga el 90% y contrastar el resultado con la respuesta previa.

c) Graficar $C = C(t)$ según la ley obtenida; marcar los puntos obtenidos en los items anteriores; ¿existe "**t**" para el cual la sustancia se descompone toda ? .

16.- Si una molécula del producto **C** se forma a partir de una molécula del reactivo **A** y una del reactivo **B**; si las concentraciones de **A** y **B** son iguales, **[A] =[B]** = **a** moles/ls. e indicamos con **x** a la concentración de **C** en función del tiempo (**x = [C]**) la siguiente ecuación modeliza el proceso de formación de **C** a partir de **A** y **B.**

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a - x)^2 \quad ; \quad x(0) = 0 \quad (\text{con } k > 0)$$

a) A partir de esta *ecuación* completar las siguientes afirmaciones:

i) **x** aumenta con el paso del tiempo pues ....

ii) la velocidad de la reacción decrece pues....................................

b) Hallar **x = x(t)** ; verificar que $x(t) = \dfrac{a^2.k.t}{akt+1}$;

c) Graficar la concentración en función del tiempo, establecer si se alcanza una concentración máxima (según el modelo). Hallar (si existe) el instante donde la velocidad de la reacción es máxima (dominio!!); calcular esta velocidad máxima.

d) qué sucede con la velocidad de reacción cuando $t \to \infty$?. Qué indica este resultado en términos *prácticos* ?.

17.-Si un compuesto **A** se transforma en **B**, a través de una reacción *reversible*, entonces

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B$$

con k_1 y k_2 ctes (*positivas*) de ***velocidad de reacción*** de c/ proceso.

Si llamamos → a : concentración del compuesto **A** en cada instante **t** ($a = a(t)$)

b : concentración del compuesto **B** en cada instante **t** ($b = b(t)$)

$a_o = a(0)$; concentración inicial del compuesto **A**.

Experimentalmente se comprueba que $a' = k_2 b - k_1 a$ y que $a(t) + b(t) = a_o$; $\forall t$

Se pide:

a) Obtener una ecuación diferencial **con una única incógnita, por ejemplo "*a*".** Indicar que tipo de ecuación es.

b) obtener la ley de a si se sabe que a_o= **3** mol/l. y $k_1 = 2\,k_2$; luego, obtener la ley de b. Graficar ambas en un mismo sistema.

c) ¿ En algún instante $a(t) = b(t)$?. Si, ¿Cuál?. No, ¿porqué?.

d) ¿Qué pasa con las concentraciones de **A** y **B** para tiempos muy grandes? ;

¿es razonable que pase esto?;

¿con qué dato del problema tendría que ver el comportamiento observado en esta reacción respecto de las concentraciones de **A** y **B**?

PROBLEMAS DE MEZCLA.

Vamos a considerar ahora problemas relacionados con mezclas (o soluciones). En este tipo de problemas se considera una solución (S) que fluye hacia un recipiente con una cierta rapidez y manteniéndose uniforme la solución dentro del mismo mediante agitación. Simultáneamente, la solución uniforme estará saliendo del recipiente para pasar a otro donde se guarda o, según el proceso puede seguir fluyendo hacia un tercer recipiente. El objetivo de este tipo de problemas es determinar la cantidad de soluto (**x**) presente en la solución dentro del tanque al instante t .

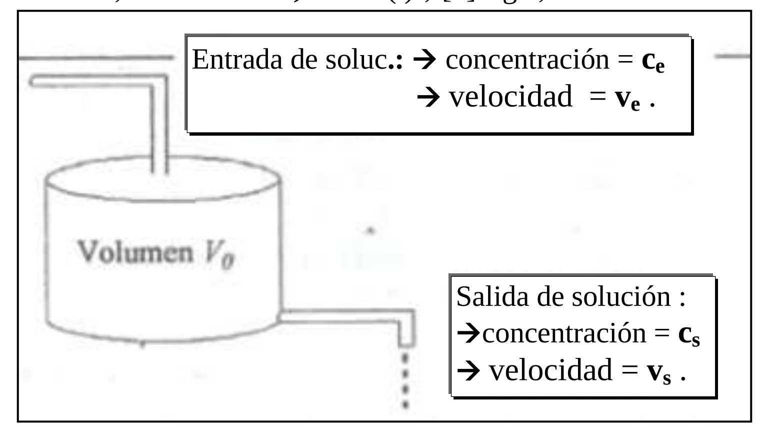
Si **x** = cantidad de soluto disuelta en una solución, al instante **t ;** **x** = **x**(t) ; [**x**]= gs ; entonces la **Ecuación Básica** para una solución contenida en un tanque que inicialmente tiene $\mathbf{V_o}$ **ls**. de solución es:

$$\frac{dx}{dt} = \text{ENTRADA - SALIDA}$$

Equivalentemente:

$$\frac{dx}{dt} = c_e . v_e - c_s . v_s$$

con $$c_s = \frac{x(t)}{V_o + (v_e - v_s).\,t}$$



La *solución* que ***entra*** lo hace con una *rapidez constante* **(**v_e ls./min**)** y con una *concentración de soluto cte* (**c_e** g./ls**)**. La que *sale*, también lo hace a *rapidez cte* (**v_s** ls./min**).**

18.- En un tanque hay **100 ls**. de solución con **200 grs** de sal disueltos en ella. Como deseo ***diluir*** la solución comienzo a verter **agua** en el tanque a una rapidez de **5** ls./min a la vez que, para apurar el proceso, dejo salir solución a una rapidez de **3** ls./min.

a) Mi migo Pablo cree que si no estoy atenta puedo llegar a quedarme con "solo agua". Decide calcular el tiempo en que no quedaría sal en la solución y razona así: "como la concentración de la solución es de **2** grs./litro y la solución sale a razón de **3** ls/min esto implica que "la sal" sale a razón de **6** grs./min. que, por lo tanto, en poco más de 30 min. no hay más sal en la solución". ¿Qué regla aplica Pablo para calcular el tiempo en que, según él, no queda sal en la solución?, ¿porqué?

b) ***Resolver la ecuación básica*** y dar ***x = x(t) .***

Mostar que ***x*** tiende a cero con el tiempo (o sea, que la intuición de Pablo funcionó bastante bien); pero que a los **50** min. todavía hay sal en la solución (o sea, que la "regla de tres" de la cual es fanático Pablo no es aplicable en este caso.)

19.- Si **V** = ***volumen de solución en el tanque*** **;** entonces **V** =**V**(t) con **V**(t) = $\mathbf{V_o}$ + (v_e–v_s).**t .**

Graficar en un mismo sistema **"V-t"** la función **V** = **V**(t) para:

a₁) $v_e < v_s$; **a₂)** $v_e = v_s$; **a₃)** $v_e > v_s$

Explicar que pasa en cada caso con la cantidad de solución en el tanque.

20.- Si $\mathbf{v_e = v_s = 3}$ **;** $\mathbf{V_o = 6}$ y $\mathbf{x(0) = x_o = 60}$.

a) Hallar, resolviendo la ecuación básica, una expresión general para **x = x(t).**

b) Verificar que $x(t) = c_e.V_o + [x_o - c_eV_o].e^{-(v/V_o).t}$.

c) Obtener $c_s = \frac{x(t)}{V(t)}$ para **x**(t) hallada en (**b**); graficar c_s para c_e igual, mayor o menor que $c_o = x_o/V_o$. Explicar que pasa con la concentración de salida en cada caso.

. ¿Si se desea que la solución que entra no modifique la concentración que existe en el tanque al momento de comenzar el proceso, quien debe ser c_e **?** .

21.- **a)** Hallar y graficar **x = x(t)** si $c_e = 2$ **g/l ;** $v_e = 2$ **l/m ;** $v_s = 4$ **l/m** ; $V_o = 12$ **ls.** y **x(0) =** x_o**= 60 gs.** Explicar acorde al gráfico, cómo se desarrolla el proceso en este caso.

b) Hallar y graficar **x= x(t)** si $c_e = 2$ **g/l ;** $v_e = 2$ **l/m ;** $v_s = 2$ **l/m** ; $V_o = 12$ **ls.** y **x(0) =** x_o**= 60 gs.** Explicar acorde al gráfico cómo se desarrolla el proceso en este caso.

CRECIMIENTO DE POBLACIONES.

22.- Un modelo de crecimiento de poblaciones propone que éstas crecen con una velocidad proporcional a su tamaño. Se pide:

a) Plantear una ecuación que describa esta hipótesis para una población **P,** de moscas de la fruta.

b) Si se sabe que partiendo de **100** moscas, al cabo de ***cuatro días*** hay **900**; encontrar la ley de **f,** función que permite calcular la cantidad de moscas en el tiempo. Graficarla

c) Calcular la cantidad de moscas al cabo de: **2, 4, 6, 8 días** ; indicar que caracteriza el crecimiento de esta población: "se (*duplica, triplica, cuadruplica ……*) cada (*uno, dos , tres, cuatro….*) días".

d) Comprobar que **f** se puede escribir como $\mathbf{f(t) = 100\ (3^{t/2})}$ **.** Usando esta forma de la función, **c**alcular **f** (t+2), compararla con **f**(t) y cooroborar que la siguiente afirmación es **V** ó **F**: ***"el número de moscas se triplica cada dos días ".***

23.- Un cultivo de levaduras crece a una velocidad proporcional al número de células presentes en cada instante "t". Sabiendo que el cultivo se inicia con una población de 20 células y que al cabo de 12 horas hay 80 células, se pide:

a) Plantear la ecuación correspondiente y hallar la función que determina el número de levaduras en cada instante "t". Graficarla.

b) Indicar V ó F, justificar:

" **f**(t) = $\mathbf{20.2^{t/6}}$ permite calcular el número de levaduras en cada instante t".

"el número de levadura se duplica cada 6 días ".

24.- Sea la ecuación diferencial logística: $\frac{dP}{dt} = kP(M-P)$ que modela el crecimiento de una población cerrada que tiene P individuos en el tiempo t; k y M son constantes positivas. Sin resolverla responda:

a) ¿Para qué valores de P la población crece?

b) ¿Para qué valores de P la población disminuye?

c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? (Soluciones constantes)

25.- La población de una ciudad que en el año 2000 tenía 100 mil habitantes responde a la ecuación diferencial logística (vea problema 6), con $k = 0.0001$ y $M = 200$ mil.

a) ¿Qué puede decir acerca del tamaño de la población actual? (¿aumentó o disminuyó?). Justifique

b) ¿Llegará a triplicarse en algún momento?. Justificar.

26.- La razón de cambio de una población (**P**) en el tiempo (t) está dada por :

$$P' = \lambda P - m, \quad \text{con} \quad \lambda = \alpha - \beta$$

Siendo α la tasa de nacimientos , β la tasa de mortalidad y **m** el número de habitantes que emigran cada año. El tiempo (t) se mide en años.

Si se estudia una población y se determina que cada año emigran 10 habitantes, la tasa de nacimientos es 0.5 anual y la tasa de mortalidad es 0.25 anual .

a) Obtener P = P(t) , si la población inicial es de 100 habitantes. Graficar

b) Indicar V o F y justificar**:** **(i)** “La población estudiada tiende a extinguirse”

(ii) “ La población crece durante el primer año”

27.- En un lago, una especie de peces poco comunes es atacada por una enfermedad. Para estudiar el fenómeno acuden al mismo un equipo de biólogos los cuales, al momento de su llegada, registran que la población de peces (***P***) es de **900** especimenes. Registros posteriores les permiten concluir que la ecuación $\frac{dP}{dt} = -3\sqrt{P}$ es un buen modelo matemático del fenómeno (***t*** en semanas). Se pide,

a) expresar en el lenguaje coloquial que observan los biólogos que les permite concluir este modelo (hacer esto, *sin resolver la ecuación !!!!*).

b) hallar la ***función*** que permite determinar la cantidad de peces en cada instante ***t***.

c) ¿hay peces sobrevivientes a las 10 semanas? ; y a las 24? . Se extinguen en algún momento? .

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de ORDEN "n"

1.- a) Dada $a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\, y = 0$;
con $a_i(x)$ continuas en [a; b], $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$,
clasificar esta ecuación y enunciar el Teorema que "fundamenta" el proceso a seguir para hallar la solución de la misma.

b) Determinar si los conjuntos de funciones que se dan a continuación constituyen **Base de Soluciones** de la ecuación homogénea que se indica en cada caso. En caso que lo sea dar la solución general de la ecuación correspondiente .

a) $B = \{ x ;\ e^{x} \}$; **EDOLH→** $(x-1)\, y'' - x\, y' + y = 0$

b) $B = \{ e^{-x} ;\ e^{2x} ;\ e^{3x} \}$; **EDOLH→** $y''' - y'' + y' + y = 0$

c) $B = \{ e^{2x} ;\ e^{3x} \}$; **EDOLH→** $x^2\, y'' - 4\, x\, y' + 6y = 0$

d) $B = \{ 3\, x^3 ;\ 12\, x^3 \}$; **EDOLH→** $x^2\, y'' - 4\, x\, y' + 6y = 0$

e) $B = \{ x^2 ;\ x^3 \}$; **EDOLH→** $x^2\, y'' - 4\, x\, y' + 6y = 0$

f) $B = \{ e^{x} ;\ \text{sen}\, x ;\ \cos x \}$; **EDOLH→** $y''' - y'' + y' - y = 0$

g) $B = \{1 ;\ x ;\ x^2 ;\ e^{2x} ;\ e^{-2x} \}$; **EDOLH→** $y^{(5)} - 4\, y^{(3)} = 0$

c) Dada $x^2\, y'' - x\, y' - 3\, y = 0$; hallar, si existe, $n \in R$ tal que x^{n} sea solución.
Si obtiene más de una solución, investigar si las mismas constituyen **Base de Soluciones**. Si así fuera dar la solución general de esta EDO.

2.- Dada $y'' - \dfrac{2x+1}{x}\, y' + \dfrac{x+1}{x}\, y = -3\, x$ se pide:

a) **V ó F** , justificar: " la ecuación es una EDO Lineal- Orden 2- a Coeficientes Ctes".

b) analizar si alguna de las siguientes funciones:
$y_1 = e^{x}$; $y_2 = e^{2x}$; $y_3 = x^2\, e^{x}$; es solución de la homogénea asociada.

c) dar la solución general de la EDOL *no homogénea*.
(justificar enunciando el o los teoremas que validan su respuesta) .

3.- Dada $2x^2\, y'' + 3x\, y' - y = 0$;

a) clasificar esta ecuación diferencial.

b) V ó F , justificar: " las soluciones de esta **EDOL** son de la forma $e^{r x}$ **con $r \in R$"**

c) Analizar si $y_1 = x^{1/2}$; $y_2 = x^{-1}$ e $y_3 = 0$ son soluciones de la **EDOL.**

d) Dar la solución general y luego *dos* soluciones particulares. (justificar)

4.- Dada la ecuación $y'' - \dfrac{x+1}{x}\, y' + \dfrac{1}{x}\, y = x - \dfrac{1}{x}$; indicar **V ó F** , justificar:

a) e^{x} es solución de la homogénea asociada .

b) si $\{ e^{x} ;\ x \}$ es **l. i.** entonces $y = C_1\, e^{x} + C_2\, x$ es la solución general de la homogénea asociada.

c) $y = x + 1$ es una solución particular de la no homogénea.

d) $y = -x^2 + x$ es una solución particular de la no homogénea.

e) $y = C_1\, e^x + C_2\,(x+1) + x - x^2$ es solución general de la no homogénea.

5.- Si ***f*** y ***g*** son solución de $x^2 y'' + 2\,x\,y' - 6y = 0$;
indicar **V ó F**, justificar (si usa un teorema o propiedad, enunciarlo):

a) $h_1 = 3f$ es <u>*solución*</u> de $x^2 y'' + 2\,x\,y' - 6y = 0$;

b) $h_2 = f + g$ es <u>*solución*</u> de $x^2 y'' + 2\,x\,y' - 6y = 0$.

6.- Indicar **V ó F**, justificar:

a) $h_1(x) = 1$ y $h_2(x) = \sqrt{x}$ son <u>*solución*</u> de $y.\,y'' + (y')^2 = 0$;

b) $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ es <u>*solución*</u> de $y.\,y'' + (y')^2 = 0$
(en caso de ser **F**, analizar si este hecho contradice el teorema del **ej. 5**)

7.- Dada $y'' + 3\,y' + 2\,y = b(x)$; se pide:

a) dada $y = e^{r\,x}$ calcular su 1er y 2da derivada, reemplazar en la ecuación y hallar, si existe, $r \in R$ tal que $e^{r\,x}$ sea solución de la homogénea asociada"

b) **V ó F** , justificar: "si $b(x) = e^{2x}$; existe $A \in R$ tal que Ae^{2x} es solución particular"

c) **V ó F** , justificar: "si $b(x) = e^{-2x}$; existe $A \in R$ tal que Ae^{-2x} es solución particular"

d) **V ó F** , justificar: "si $b(x) = e^{kx}$ cualquiera sea $k \in R$, siempre existe $A \in R$ tal que $A\,e^{kx}$ es solución particular ".

8.- Dada $y'' = b(x)$; se pide:

a) **V ó F** , justificar: "existe $r \in R$ tal que $e^{r\,x}$ es solución de la homogénea asociada".

b) **V ó F** , justificar: "si $b(x) = 12\,x^2$; existe $A, B, C \in R$ tal que $Ax^2 + B\,x + C$ es solución particular".

c) **V ó F** , justificar: "si $b(x) = x^2$; existe $A, B, C \in R$ tal que $Ax^4 + B\,x^3 + Cx^2$ es solución particular".

9.- Dada $y'' + b\,y' + c\,y = p(x)$ $(b, c \in R)$, se pide:

a) <u>deducir</u> condiciones sobre **b** y **c** para que la solución general de la homogénea asociada sea una combinación lineal de <u>*funciones exponenciales*</u>. (Justificar)

b) con **b** y **c** del item **(a)**, <u>demostrar</u> que el siguiente problema de valores iniciales:

$y'' + b\,y' + c\,y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$, tiene como única solución la función nula.

c) **V ó F** " si r_1 y r_2 (soluciones ecuación característica) son reales distintas y negativas y **f** solución de la homogénea entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$". (Justificar)

d) **V ó F** " si r_1 y r_2 (soluciones ecuación característica) son reales distintas y negativas, $p(x) = e^{r_1 . x}$ e y_g la solución general entonces $\lim_{x \to +\infty} y_g(x) \neq 0$". (Just.)

10.- a) Escribir una **EDOL-homogénea- orden 2**, cuya solución general sea:

$y_h = C_1\, e^{2\,x} + C_2\, e^{3\,x}$ (verificar su respuesta)

b) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:

$y_g(x) = C_1\, e^{2\,x} + C_2\, e^{3\,x} + 7\, e^{x}$

c) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:

$y_g(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 3x e^{2x}$ (verificar su respuesta)

d) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:

$y_g(x) = C_1 e^{x} + C_2 x. e^{x} + 5x^2 e^{x}$ (verificar su respuesta)

11.- A) Si f y g son solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$, y k es una solución de la *homogénea asociada* a esta EDO; indicar **V ó F**, justificar:

a) $h_1 = 3f$ es <u>solución</u> de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$;

b) $h_2 = f - g$ es <u>solución</u> de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$;

c) $h_3 = f + g$ es <u>solución</u> de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{senx}$

d) $h_4 = 3k$ es <u>solución particular</u> de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$

e) $h_5 = f + k$ es <u>solución particular</u> de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$

B) VóF, justificar: **"**si p es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$ y q es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \cos x$; entonces $p + q$ es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x + \cos x$ **"** .

C) VóF, justificar: **"**el resultado anterior se puede "*generalizar*"; o sea, extender al caso de una EDOL de la forma: $a_0(x)\ y'' + a_1(x)\ y' + a_2(x)\ y = b_1(x) + b_2(x)$**"**.

D) VóF, justificar: **"**si $u + v$ es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x + \cos x$ entonces, u es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \text{sen } x$; y v es solución de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = \cos x$ **"** .

12.- Resolver las EDO – Homogéneas y los Pvi que se indican a continuación:

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$

c) $y'' + 4y' + 4y = 0$

d) $y'' + y = 0$

e) $y'' + y' = 0$

f) $x'' - 4x = 0$

g) $\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1/2 \ ;\ y'(0) = -1/3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(\sqrt{2}\,\pi) = 0 \ ;\ y'(\sqrt{2}\,\pi) = 1/2 \end{cases}$

13.- a) Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea: $y'' + b.y' + c\,y = f(x)$ y sea y_h la solución general de su ecuación homogénea asociada. Demuestre que $y = y_h + y_p$ es solución de la ecuación no homogénea.

b) Dada una ecuación diferencial no homogénea y una solución particular de la misma, verifique esta última, halle la solución general de la ecuación homogénea asociada y escriba la solución general de la ecuación no homogénea.

b.1) $y'' - 4y = -8sen(2x)$, $\quad y_p = sen(2x) + 5e^{2x}$

b.2) $y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}$, $\quad y_p = 2x^2 e^{-3x}$

b.3) $y'' - 2y' + 2y = 2x$, $\quad y_p = x + 1 - 3e^{x}\cos(x)$

b.4) $y'' + 3y' = 6x + 5$, $\quad y_p = x^2 + x$

14.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas de 2° orden:

a) $y'' + 4y' + 8y = x^2$

b) $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$

c) $y'' + 4y = 2\text{sen } x + \cos 2x$

d) $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 2x$

e) $y'' - y' - 2y = e^{3x} + x$

f) $y'' - y' - 2y = 5$

g) $y'' + y' = 3 + e^{4x}$

h) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$

i) $y'' + 16y = x^2 + x$

j) $y'' + 2y' + y = (x^2 + 1).e^x$

k) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - 10\text{sen } x$

l) $y'' - 2y' = e^t .\text{sen } t$

m) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = x + 3 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = e^x + \cos x \\ y(0) = 1 \ ; \ y'(0) = 2 \end{cases}$

15.- Proponga una solución particular con coeficientes indeterminados, halle dichos coeficientes y encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y'' + 4y = 3x^3$

b) $y'' - y' - 6y = 2sen(3x)$

c) $y'' + y = \cos(x)$

d) $y'' - 7y' = -7 + 6x - 21x^2 + 7e^{7x}$

e) $y'' + 2y' - 3y = 1 + xe^x$

16.- **a)** Hallar los valores de α y β para los cuales $\mathbf{b(x) = x.e^x}$ es solución de:

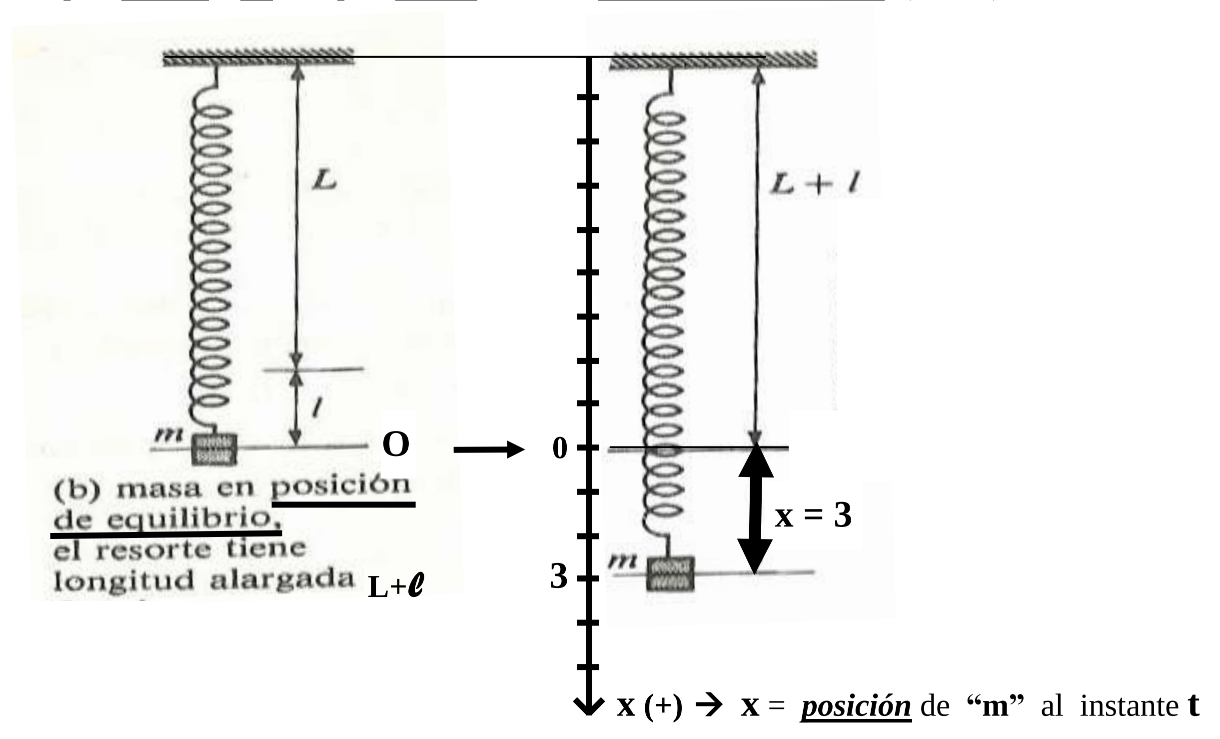
$$\mathbf{y'' + \alpha.y' + 3y = \beta e^x}$$

b) Con los valores de α y β hallados, obtener la solución general de la EDOL.

APLICACIONES DE LAS EDO – LINEALES- ORDEN "2" a CC

▸ VIBRACIONES DE UNA MASA EN UN RESORTE.

Problema Básico: Un resorte helicoidal está suspendido verticalmente de un punto fijo en el techo. Una masa (**m**) está unida a su extremo inferior. Se supone que el resorte tiene una longitud **L** (no estirado) y que al colgar la masa se estira una cantidad ℓ ; o sea, que la longitud del resorte, *en reposo*, es **L+** ℓ**.** En estas condiciones, con la masa a **L+**ℓ (cm) del techo decimos que la misma se encuentra en su *posición de equilibrio*.
El sistema se pone en movimiento forzando la masa a abandonar dicha posición.
El objetivo es determinar el movimiento resultante, es decir las "*vibraciones*" que se introducen en el sistema al "*perturbarlo*" (amplitud, frecuencia, amortiguamiento…) A tal fin se introduce un *sistema de referencia* a lo largo de la línea del resorte, con el *sentido positivo* (+) hacia abajo y el *origen*, **O**, *en la posición de equilibrio.*
Con **x** se indica *la posición de la masa* a partir de **O** y a lo largo de ese eje. Así construido el sistema de referencia, **x** puede ser ***positiva***, ***cero*** o ***negativa*** según la masa esté por ***debajo*** , ***en*** , o por ***arriba***, de su ***posición de equilibrio*** **(x = 0)** .



Finalmente, el problema es determinar la **función de posición, x= x(t)**
Considerando las fuerzas que actúan sobre el sistema y acudiendo a leyes de la Física: **2da de Newton** y **Ley de Hooke** se obtiene la **EDO** que permite hallar **"x= x(t)" :**

$$m \cdot x'' + a\, x' + k\, x = F(t)$$

k = cte del resorte (Ley de Hooke). (**k** > **0**)
a = cte de amortiguamiento debida a la *fuerza resistiva* del medio (puede ser o no despreciable. (***a*** ≥ **0**)
F = cualquier fuerza externa que actúe sobre el sistema, (puede o no, existir) .

Según a y **F** sean o no nulas, se tienen los siguientes casos:

(I) **Movimiento Libre, no Amortiguado:**

$$m\,.\,x'' + k\,x = 0$$

F(t) = **0 ,** $\forall$**t** (no actúan fuerzas externas) $a = 0$ (resistividad despreciable)

(II) **Movimiento Libre, Amortiguado:**

$$m\,.\,x'' + a\,x' + k\,x = 0$$

F(t) = **0 ,** $\forall$**t** (no actúan fuerzas externas) $a \neq 0$ (la resistividad no es despreciable)

(II) **Movimiento Forzado:**

$$m\,.\,x'' + a\,x' + k\,x = F(t)$$

Actúan fuerzas externas. La resistividad puede o no ser despreciable.

1.- Movimiento Libre no Amortiguado: $m\,.\,x'' + k\,x = 0$

Simplificamos la EDO para obtener la *ecuación característica* de este movimiento :

$$m.x'' + k\,x = 0 \xrightarrow[\text{por "m"}]{\text{dividir}} x'' + \frac{k}{m}\,x = 0 \xrightarrow[k/m = \lambda^2]{[k/m] > 0} \boxed{x'' + \lambda^2 x = 0}$$

Luego, el correspondiente **Pvi** : $\begin{cases} x'' + \lambda^2 x = 0 \\ x(0) = x_o \\ x'(0) = v_o \end{cases}$

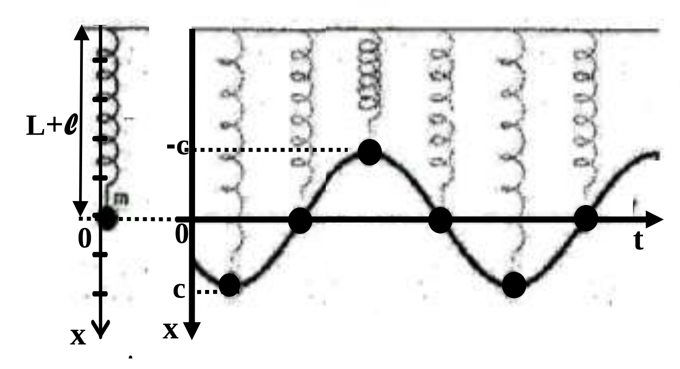
Se pide demostrar que:

a) la solución general es: $x(t) = A\,\text{sen}\,(\lambda\,t) + B\cos(\lambda\,t)$

b) la solución del **Pvi** es: $x(t) = \left[\frac{v_0}{\lambda}\right] \text{sen}\,(\lambda\,t) + [x_o]\cos(\lambda\,t)$ con $\left[\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}\right]$

c) $\boxed{x(t) = c\,cos\,(\lambda t + \alpha)}$ con $c = \sqrt{A^2 + B^2}$; $tg\,\alpha = -\frac{A}{B}$ (α áng. de fase)

Conclusión:
El movimiento libre no amortiguado es un ***Movimiento Armónico Simple*** (MAS). Un movimiento periódico donde la masa oscila hacia arriba y abajo entre **- c** y **c**. $|c|$ (la amplitud de la sinusoide) da el **desplazamiento máximo** de la masa a partir de su posición de equilibrio.



d) V ó F, justificar**:** **(i)** El período $p = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$

(ii) El "desplazamiento máximo" se da para $t^* = \sqrt{\frac{m}{k}}\,(n\pi - \alpha)$

(marcar en el gráfico algunos **t*** y el desplazamiento máximo)

2.- Sea el caso de un cuerpo de *0.2 kg* de masa que pende de un resorte de *constante elástica* $k = 20\frac{N}{m}$ y oscila armónicamente. En el instante $t = 0$ pasa por la posición de equilibrio con velocidad $v = 1\,m/seg$

a) Plantear el Pvi. correspondiente a este movimiento.
b) Hallar la ley de la posición de la masa en función del tiempo.
c) Dar el período y el "desplazamiento máximo" del caso.
d) Graficar el movimiento en un sistema "x-t". (tomar x(+) hacia arriba) Marcar t_1 instante donde pasa por la posición de equilibrio y t_2 instante donde la masa alcanza su desplazamiento máximo.
e) Hallar velocidad y aceleración de la masa en t_1 y t_2 del item anterior.

3.- Sea el caso de un cuerpo que pende de un resorte de constante elástica $k = 16$.

y donde el **Pvi** correspondiente al movimiento es:
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x'' + 16\,x = 0 \\ x(0) = 0.25 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

V ó F , justificar: **(a)** se trata de un movimiento armónico simple (MAS)
(b) el cuerpo se empuja hacia abajo y luego se suelta.
(c) la posición del cuerpo en cada instante **t** viene dada por:
$$x(t) = \frac{1}{8}\,\text{sen}\,(8t) + \frac{1}{4}\cos(8t)$$
(d) la posición del cuerpo en cada instante **t** viene dada por :
$$x(t) = C\cos(8t + \alpha) \text{ con } C = \sqrt{5}/8\ ;\ \alpha = \text{arc tag}(-1/2).$$

4.- <u>**Movimiento Libre Amortiguado**</u>: $m.x'' + a\,x' + k\,x = 0$ ($a > 0$; $k > 0$)

Consideramos el siguiente caso:
$$x'' + 2b\,x' + b^2 x = 0\ ;\quad x(0) = A\ ;\quad x'(0) = B \qquad (b > 0)$$

a) Demostrar que el desplazamiento está dado por: $x(t) = [A + (B + bA).t\,].e^{-bt}$

b) Para $b = 1$ y los valores de **A** y **B** que se dan en cada caso plantear y resolver el correspondiente **Pvi**. Luego de resuelto, graficar la función de posición e indicar:
(i) si la masa pasa por su posición de equilibrio. Si pasa, en que instante(s) lo hace.
(ii) el instante en el cual alcanza su desplazamiento máximo.
(iii) que sucede con el paso del tiempo.

b1) $A = B = 5$ **b2)** $A = 10$; $B = -5$ **b3)** $A = 5$; $B = -10$

***Rtas*:** **b1)**	**(i) NO**	**(ii) t = ½**	**(iii)** la masa tiende a su posición de equilibrio.
b2)	**(i) NO**	**(ii) t = 0**	**(iii)** la masa tiende a su posición de equilibrio.
b3)	**(i) SI, t =1**	**(ii) t = 2**	**(iii)** la masa tiende a su posición de equilibrio.

5.- Movimiento Libre Amortiguado: **m.** $x'' + a\,x' + k\,x = 0$ ($a > 0$; $k > 0$)

Simplificamos la EDO para obtener la *ecuación característica* de este movimiento.

Dividimos por **"m"** y hacemos $\frac{a}{m} = 2b$ **(b>0) ;** $\frac{k}{m} = \lambda^2$ → $\boxed{x'' + 2b\,x' + \lambda^2 x = 0}$

La ecuación característica queda: $r^2 + 2b\,r + \lambda^2 = 0$ → $r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \lambda^2}$

Se presentan 3 casos distintos dependiendo de la naturaleza de estas raíces, las que dependen del valor del radicando ($b^2 - \lambda^2$), de si este es negativo, cero o positivo.

(I) Movimiento oscilatorio amortiguado: $b < \lambda$

$x(t) = e^{-bt}.[C_1\,\text{sen}(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,.t) + C_2\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,.t)]$

ó $x(t) = c\,e^{-bt}.\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,.\,t + \alpha)$

$c\,e^{-bt}$ → *factor de amortiguamiento*
$\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,.\,t + \alpha)$ → *factor "osc."*

- En este caso tenemos un movimiento oscilatorio donde las oscilaciones son cada vez más pequeñas (*menor amplitud*) y la masa *tiende a su posición de equilibrio.*

(II) Amortiguamiento crítico: $b = \lambda$ → $x(t) = [C_1 + C_2\,t].\,e^{-bt}$

- En este caso el movimiento ya no es oscilatorio, el amortiguamiento es lo suficientemente importante como para evitar las oscilaciones. Pero, en este caso, una pequeña disminución en la cantidad de amortiguamiento cambia la situación, y el sistema pasa al caso **(I)**; o sea, se producen oscilaciones.
- Dependiendo de las condiciones iniciales se tienen 3 situaciones posibles, siendo las respectivas gráficas similares a las obtenidas en el ejercicio **(4.b)**

(III) Amortiguamiento sobrecrítico: $b > \lambda$ → $x(t) = C_1\,e^{r_1 t} + C_2\,e^{r_2 t}$

- En este caso el movimiento tampoco es oscilatorio, pero el amortiguamiento es tan grande que ya no cabe la posibilidad de que cualquier pequeña disminución del mismo se traduzca en oscilaciones (o sea, lleve al sistema al caso **(I)**)

- Dependiendo de las condiciones iniciales se tienen 3 situaciones posibles, siendo las respectivas gráficas similares a las obtenidas en el ejercicio **(4.b)** o en caso **(II)** En este caso, y debido al mayor amortiguamiento, la masa regresa a su posición de de equilibrio más lentamente; o sea, con menor rapidez .

Sea el caso de un cuerpo de *0.2 kg* **de masa que pende de un resorte de** *constante elástica* $k = 20\frac{N}{m}$ **. En esta instancia el sistema es afectado por la resistencia del aire y otras fuerzas de fricción que amortiguan el movimiento**

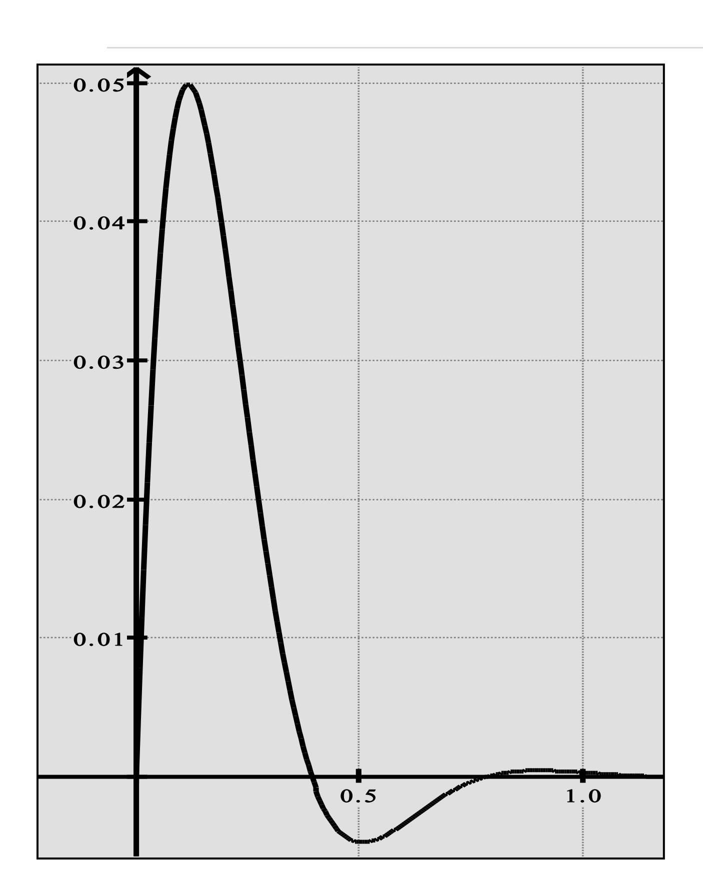
En el instante $t = 0$ **pasa por la posición de equilibrio con velocidad** $v = 1\,m/seg$

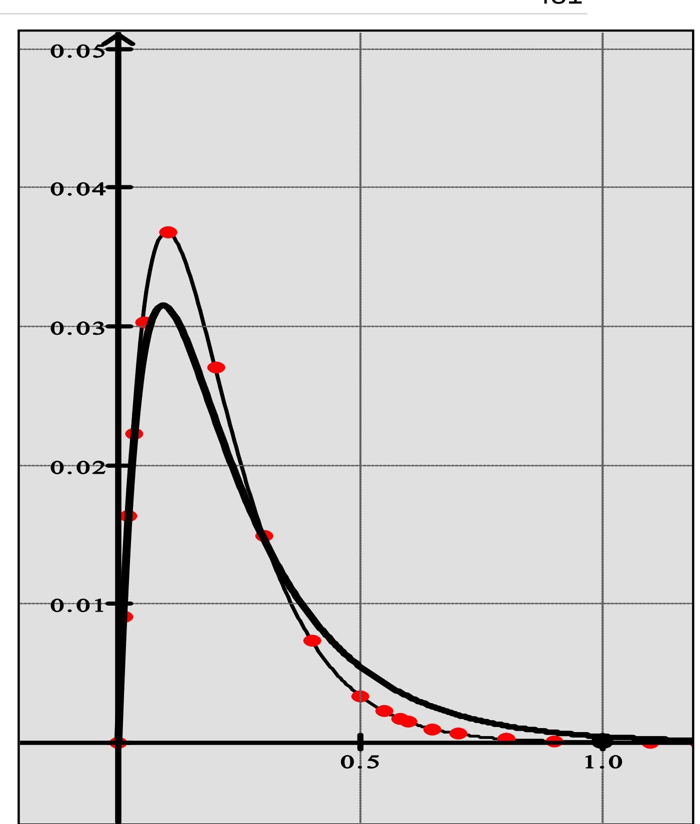
a) Plantear el **Pvi** correspondiente a este movimiento con la ecuación característica.

b) Para los valores de ***a*** (cte de amortiguación) que se dan a continuación, establecer (sin resolver el **Pvi**) que tipo de amortiguamiento se tiene en cada caso:

b1) $a = 2{,}4$; **b2)** $a = 4$; **b3)** $a = 5$

c) Resolver el **Pvi .** Los gráficos que se dan a continuación se corresponden (uno a uno) con las soluciones halladas para los distintos **"*a*"** dados en **(b).** Establecer la correspondencia entre solución y gráfico de la misma.





Rtas: **b1)** $x(t) = \frac{1}{8} e^{-6t} . sen(8.t)$ **b2)** $x(t) = t . e^{-10 t}$ **b3)** $x(t) = \frac{1}{15} (e^{-5t} + e^{-20 t})$

6.- En los problemas 1-5 se ha trabajado con sistemas masa-resorte con movimiento oscilatorio libre no amortiguado y amortiguado respectivamente. Se tiene ahora un sistema similar apoyado sobre una superficie horizontal, como indica la figura, sobre el que actúa una fuerza externa F, la masa m tendrá un movimiento oscilatorio forzado y la ecuación diferencial que lo describe es:

$$m x''+bx'+kx = F(t), \quad k \neq 0$$

Halle la solución de la ecuación con las condiciones iniciales dadas para los valores de m, b, k y F que se indican

a) $m = 1,\ b = 0,\ k = 9,\ F(t) = 10\cos(2t);$
$x(0) = x'(0) = 0$

b) $m = 1,\ b = 2,\ k = 2,\ F(t) = 20\cos(2t);$
$x(0) = x'(0) = 0$

Rtas: **a)** $x(t) = 2.\cos(2.t) - 2.\cos(3.t)$

b) $x(t) = e^{-t}(2.\cos(t) - 6.\ sen(t)) - 2.\cos(2t) + 4.\ sen(2t)$

7.- Si **"x = x(t)"** es la *función de posición* de un cuerpo que se desliza por una rampa de **5º** de pendiente ; entonces la **EDO** que modeliza el movimiento es;

$$20\,x'' + x' = 30 \;;\quad x(0) = 0\;;\quad x'(0) = 0$$

Se pide:

a) en el diagrama adjunto, graficar el cuerpo en el instante en que se coloca en posición para largarlo por la rampa **(t = 0).** Luego graficar donde estará (aprox.) unos segundos después de iniciado el movimiento. Según lo que se "observa" y lo se quiere medir, graficar el **eje de referencia** más apropiado al efecto de modelizar este proceso; o sea, aquel donde se "lea directamente del mismo" la posición del cuerpo en cada instante (⇒ el eje, en dirección y sentido, debe coincidir con la dirección del movimiento). Recién entonces proceda a:

b) hallar **x** ; la función de posición que describe la caída del cuerpo.

c) hallar ***v*** ; la velocidad del cuerpo en su caída.

d) hallar (aprox.) la longitud de la rampa si se sabe que la velocidad del cuerpo al llegar a TIERRA es : $v(t_T) = 20$ **(m/seg.)**



8. La caída de un paracaidista viene descrita por la ecuación diferencial: $\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} - k\frac{dy}{dt} = w$ donde w es el peso del paracaidista, su altura en el instante t es y, g es la aceleración de la gravedad y k mide el efecto de freno del paracaídas. Supuesto $k = 8$, un paracaidista de *160 libras* de peso y $g = 32$ *pies/s*^{2}, halle la solución de la ecuación diferencial considerando que el paracaídas se abre en el instante $t = 0$, hallándose el paracaidista a una altura de *2000 pies* y cayendo a una velocidad de *-100 pies/s.*

C. Problemas de mezclas

Vamos a considerar ahora los problemas relacionados con mezclas. Se permite que una sustancia S fluya hacia una cierta mezcla de un recipiente, con una cierta rapidez, y la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación. Además, la mezcla uniforme deberá salir del recipiente y pasar a otro (en condiciones generalmente diferentes); en todo caso se busca determinar la cantidad de la sustancia S presente en la mezcla en el tiempo t.

Se representará por x la cantidad de S en el tiempo t, la derivada dx/dt representa la razón de cambio de x con respecto a t. Si ENTRADA representa la razón con la que S entra a la mezcla y SALIDA representa la razón con la que sale, de inmediato se tiene la ecuación básica.

$$\frac{dx}{dt} = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA} \tag{3.55}$$

de la cual se determina la cantidad x de S en el tiempo t. Estudiaremos algunos ejemplos.

- **x = cantidad de S** en solución al **inst. t ; x = x**(t)
- **V = volumen** de sol., en el tq. al **inst. t ; V = V(t)**
- **V_o = volumen inicial** (t= 0) en el tanque.

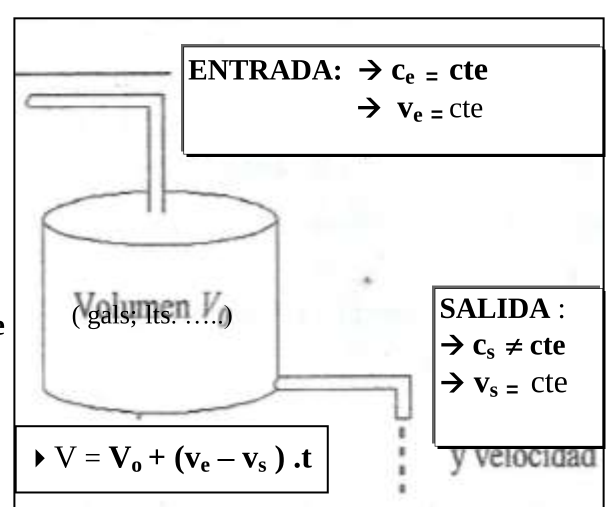
La ecuación **"ecuación básica"** queda:

ENTRADA: $c_e \cdot v_e$ → v_e = cte; c_e = cte

SALIDA: $c_s \cdot v_s$ → v_s = cte;

$$\rightarrow c_s = c_s(t) = \frac{x(t)}{V(t)} \neq \text{cte}$$

Finalmente: $$\frac{dx}{dt} = c_e \cdot v_e - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot v_s$$



Ejemplo 3.10

Un tanque contiene inicialmente 50 gal de agua pura. En el tiempo $t = 0$, salmuera que contiene 2 lb de sal disuelta por galón entra al tanque a razón de 3 gal/min. La mezcla se mantiene uniforme agitándola y después de estar bien agitada sale simultáneamente del tanque con la misma rapidez.

1. ¿Qué cantidad de sal se encuentra en el tanque en cualquier tiempo $t > 0$?
2. ¿Qué cantidad de sal hay después de 25 min?
3. ¿Qué cantidad de sal está presente después de un largo tiempo?

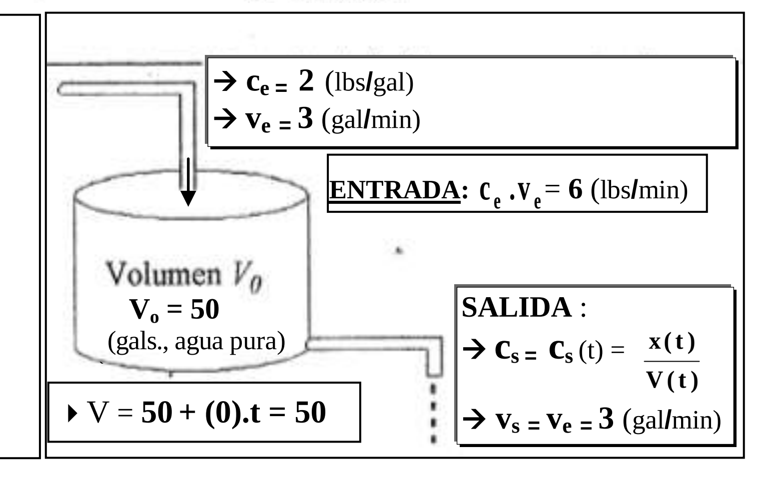
Formulación Matemática:

- **Incógnita principal**: **x** = **x**(t)
- **DATOS:** en el esquema de situación→

EB → $$\frac{dx}{dt} = c_e \cdot v_e - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot v_s$$

EB → $$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot 3 - \frac{x(t)}{50} \cdot 3$$

EB → $$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3}{50} \cdot x$$



Concluimos así el sgte **Pvi**: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6 - \dfrac{3}{50}.x \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Rta 1: $x = 100 - 100\ e^{-\frac{3}{50}.t}$

Rta 2: $x\,(25) = 100 - 100.e^{-1.5} \cong 78$ (lb)

Rta 3: $x \rightarrow 100$ (lb) cuando $t \rightarrow +\infty$

El problema "planteado" está terminado; pero, ¿no surgen interrogantes o cuestiones interesantes de investigar ???. Tendrían que surgir… *"naturalmente"* !!!, el ser humano es curioso e inquisitivo <u>*por naturaleza*</u>

Por ejemplo: **a)** ¿Por qué la cantidad de sal tiende a 100 (lbs)?, ¿hay alguna forma "*práctica*" de encontrarle "*sentido*" a este resultado que no sea diciendo que es así, porque "las cuentas dan así" ??.

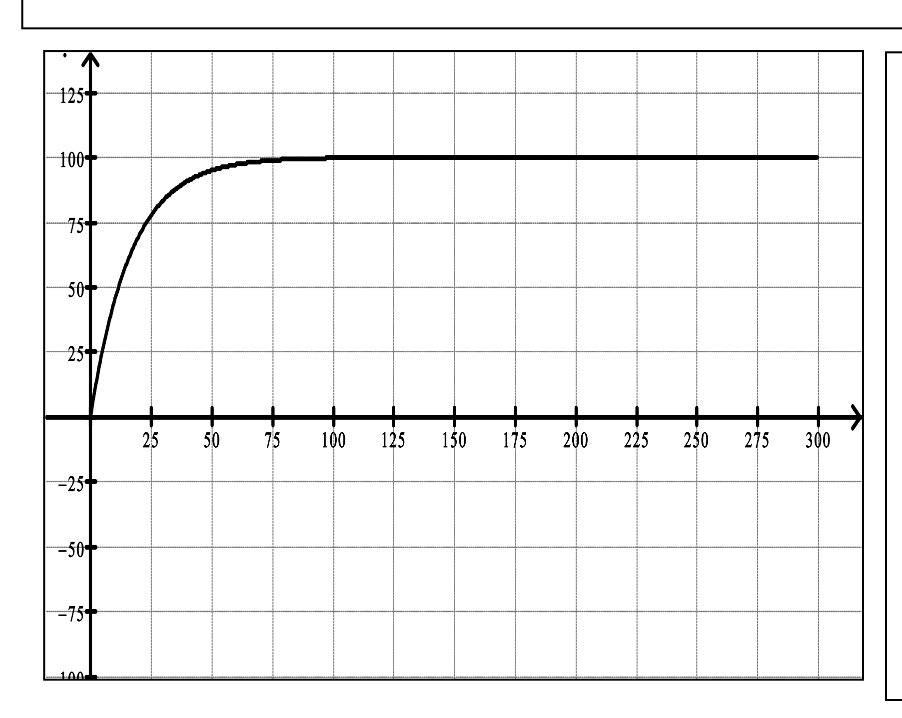
b) En algún instante, ¿llega a haber 100 (lbs) de soluto en la solución? SI? ; NO? ; NO SABE??.

¿Desde que "lugar" entiende que debe buscar la respuesta a esta pregunta?

c) Y la concentración de salida? ; $c_s \rightarrow 50$ (lbs/gal) cuando $t \rightarrow +\infty$ **?**

d) El gráfico y la tabla de valores que siguen corresponden a $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

¿ Podría decirse que a los 282 mins. (casi 5 hs) hay exactamente 100 lbs. de soluto en la solución?



t(min)	x(libras)
192.00000	99.99901
198.00000	99.99931
204.00000	99.99952
210.00000	99.99966
216.00000	99.99976
222.00000	99.99984
228.00000	99.99989
234.00000	99.99992
240.00000	99.99994
246.00000	99.99996
252.00000	99.99997
258.00000	99.99998
264.00000	99.99999
270.00000	99.99999
276.00000	99.99999
282.00000	100.00000
288.00000	100.00000
294.00000	100.00000
300.00000	100.00000

Ejemplo 3.11

Un tanque grande contiene inicialmente 50 gal de salmuera en donde se han disuelto 10 lb de sal. Salmuera que contiene 2 lb de sal disuelta por galón entra al tanque a razón de 5 gal/min. La mezcla se mantiene uniforme mediante agitación, y la mezcla agitada sale simultáneamente a razón de 3 gal/min. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en cualquier tiempo $t > 0$?

Formulación matemática. Sea x = la cantidad de sal en el tiempo t. Nuevamente usaremos la ecuación (3.55):

$$\frac{dx}{dt} = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA}$$

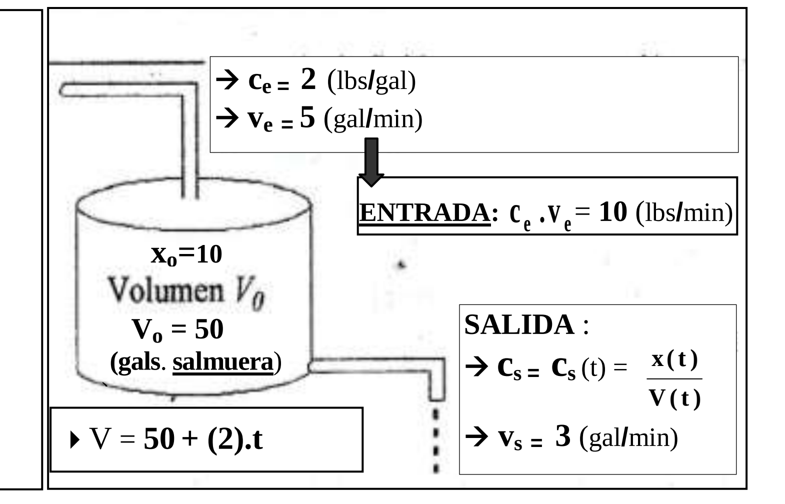
Formulación Matemática:

- **Incógnita principal**: **x** = **x**(t)
- **DATOS:** en el esquema de situación→

EB → $\dfrac{dx}{dt} = c_e . v_e - \dfrac{x(t)}{V(t)} . v_s$

EB → $\dfrac{dx}{dt} = 2 . 5 - \dfrac{x(t)}{50 + 2t} . 3$

EB → $\dfrac{dx}{dt} = 10 - \dfrac{3}{50 + 2t} . x$



Concluimos así el sgte **Pvi**: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10 - \dfrac{3}{50 + 2t} . x \\ x(0) = 10 \end{cases}$

Rta: $x = 4.t + 100 - \dfrac{90 . 50^{3/2}}{(2.t + 50)^{3/2}}$

Preguntas: a) Para este resultado fácilmente verificamos que si a **V** y **x** las "*pensamos*" como variables abstractas entonces para **t** → +∞ tenemos que **V**→ +∞ y **x** → +∞ .

Si le preguntaran el comportamiento de **V** y **x** para **t** → +∞ , ¿diría que ambas tienden a +∞ ?. **Si? ; No? ; Porqué? .**
Recordar que las variables del problema son "**concretas**" (magnitudes)
→ **x** = cantidad de Soluto en el tanque; **V** = volumen de solución, en el tanque.

b) El dominio "*natural*" de "x" es un intervalo de la forma $[0 ; t_f]$.
¿Quién es t_f ?. En el problema, ¿tiene el dato necesario para hallarlo?.

c) ¿cual es $c_s(0)$?.

d) Respecto a la c_s "final" (la c_s para **t** → +∞) ; puede **predecir** cual sería **sin** "hacer cuentas", sólo con los datos del problema y acudiendo al "sentido común" ?. Proponga un valor y luego halle la misma haciendo los cálculos del caso.

➢ MODELIZACION MATEMÁTICA - SISTEMAS DINÁMICOS

Con el fin de ayudar a la toma de decisiones se ha desarrollado un interés creciente por el procesamiento de todo tipo de información. En particular una de las ramas que más se ha desarrollado en el tiempo es una cuyo objetivo básico es, "*estudiar cómo evoluciona a lo largo del tiempo, un grupo de datos observados o empíricos*". En este contexto se ha formalizado el concepto de **Sistema Dinámico**, que ha sido objeto de estudio en una rama de la **Matemática Aplicada** a la que se ha denominado "**Teoría de los Sistemas Dinámicos**".
A este respecto tenemos las siguientes definiciones:

❋ **SISTEMA**: conjunto de partes operativamente interrelacionadas; es decir, en el que las partes interactúan y lo que interesa es su comportamiento global.
Ejemplos: sistema nervioso, sistema ecológico, sistemas fisiológicos.

❋ **MODELO**: expresión ***formal*** de las relaciones existentes entre las partes de un sistema, definidas las mismas en ***términos matemáticos y/o físicos***.

❋ **SISTEMA DINÁMICO**: cuando el objeto de estudio es ***"la evolución del sistema en el tiempo"***; hablamos de **SISTEMA DINÁMICO.**
O sea, entendemos por tal todo sistema que desde un **"*estado inicial*"** evoluciona hacia un **"*estado final*"**, siendo el ***tiempo*** la variable esencial del proceso.
Un ejemplo clásico es el de la evolución de una especie en un ambiente determinado.

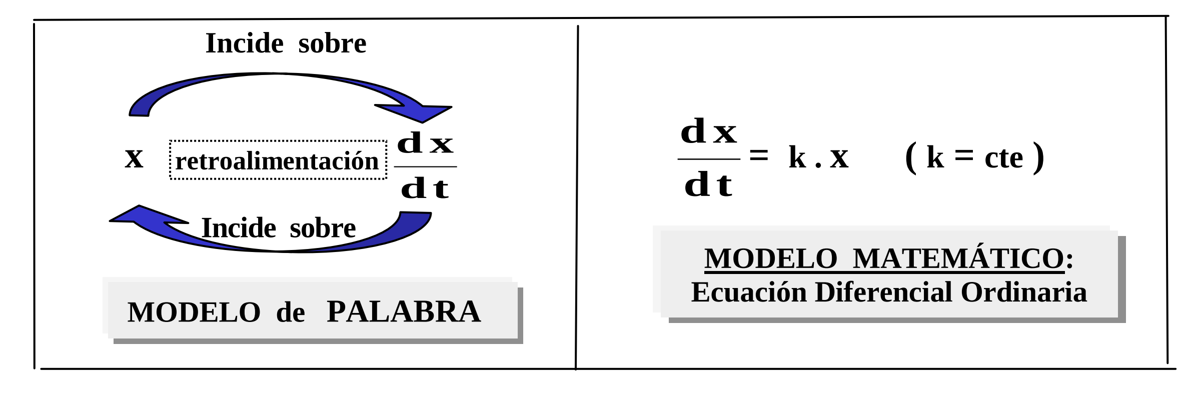
❋ **¿CÓMO SE "MODELIZA" UN SISTEMA DINÁMICO?:**
Las ***ecuaciones diferenciales*** ó los ***sistemas de ecuaciones diferenciales*** son las herramientas matemáticas *naturales* para modelizar **"Sistemas Dinámicos"** ya que las mismos se ocupan de "*procesos en movimiento*"; procesos que (además del tiempo) involucran variables como "*posición*" (**x**) y "*velocidad*" (**x´**).

En estos sistemas se distinguen dos cuestiones: el **ESTADO** y la **DINÁMICA**:
- El **ESTADO** del sistema es la información esencial sobre las componentes del mismo (posición, velocidades,.. etc) en un instante **"t".**
- La **DINAMICA** es la regla que describe como el sistema evoluciona en el tiempo.

➢ SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS PARA LOS SISTEMAS DINÁMICOS

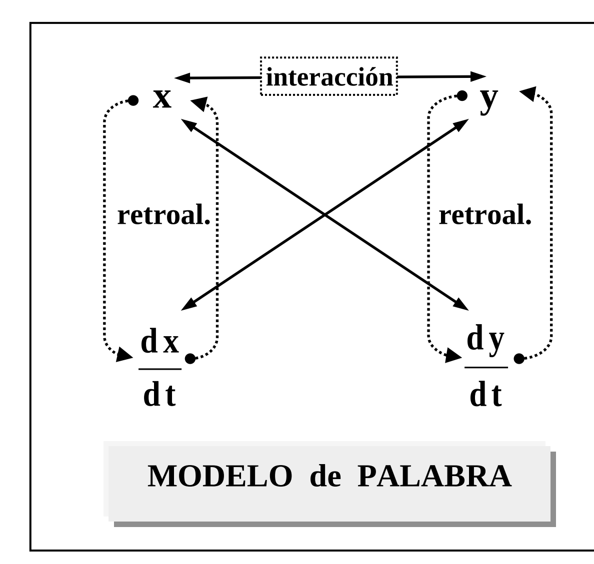
❋ **Un Caso Simple** : **"*modelo lineal en una variable*"**

Si **"x"** representa una magnitud variable en el tiempo, la ***velocidad de cambio de x*** **(dx/dt)** ***también lo es*** y este hecho, a su vez, incide sobre la propia **"x".**
Este proceso se llama **"retroalimentación".**



❋ **Un caso complejo**: ***"modelo de más de una variable"***

Si "**x**" e "**y**" son **dos magnitudes variables** en el tiempo que a su vez **interactúan entre sí**, entonces las respectivas **velocidades de cambio**, $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, además del tpo, dependen también de "**x**" e "**y**". El proceso puede esquematizarse como sigue:



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t; x; y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t; x; y) \end{cases}$$

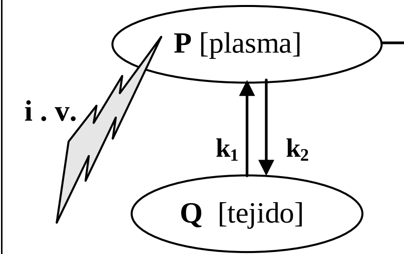
MODELO MATEMÁTICO:
Sistema de Ecuaciones Diferenciales

❋ **Objetivo del Modelo:** hallar **x= x(t)** e **y = y(t)** para predecir futuros valores de **x** e **y**.

➢ **APLICACIÓN**:

Distribución de fármaco para el caso de una inyección intravenosa rápida.

Uno de los ***modelos*** adaptable a la mayoría de los fármacos, es el de ***dos compartimentos***. Cada tejido se considera como un ***compartimento*** (periférico) el cual tiene una relación de intercambio con un ***compartimento central*** (sangre). El modelo que ilustra la distribución de fármaco en este caso puede ser representado por el siguiente esquema:



q = (masa de fármaco en **Q** (tejido)) = **q**(t)

p = (masa de fármaco en **P** (plasma)) = **p**(t)

k_1 , k_2 → constantes de velocidad (+) que caracterizan el paso del fármaco desde el compartimento central al periférico y viceversa.

K → constante de velocidad para el proceso de Eliminación.

i .v. → inyección intravenosa de un fármaco.

▸ La ***razón de cambio en "cada compartimento"*** (o sea, **dq/dt** y **dp/dt**) queda determinada por el balance, en cada instante "t", entre la masa que entra y la que sale.

O sea, para cada compartimiento, estamos ante un "*problema tipo*" ya visto y resuelto: el que llamamos: "***problema de mezcla***".

Según y acorde lo visto para los "problemas de mezcla", buscamos las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada compartimento.

→ Sean: **q**(t) = cantidad de fármaco en **Q** (tejido) al instante **"t"**
p(t) = cantidad de fármaco en **P** (sangre) al instante **"t"**

→ **q** y **p** son las funciones incógnitas; o sea, las que queremos hallar. Son las funciones que permiten seguir *la evolución en el tiempo* del farmaco en el tejido y en el plasma.

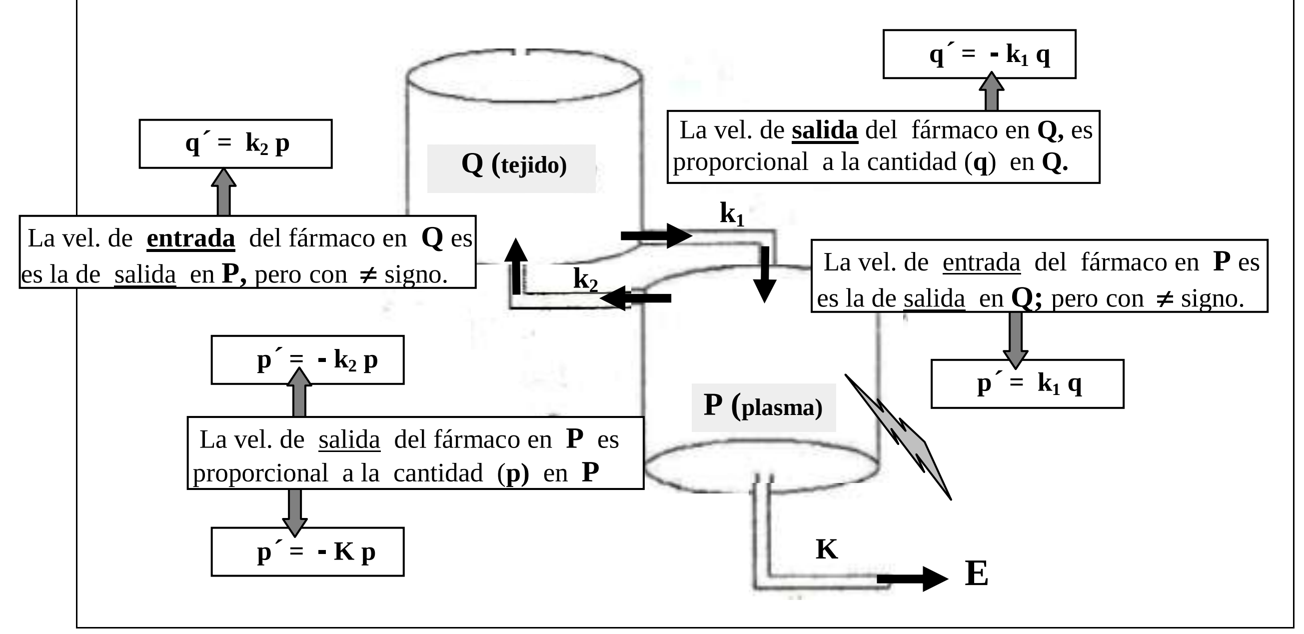
Por la Ecuación Básica (compartimento **Q**): **dq/dt** = **ENTRADA** $_{(Q)}$ **- SALIDA** $_{(Q)}$

Por la Ecuación Básica (compartimento **P**): **dp/dt** = **ENTRADA** $_{(P)}$ **- SALIDA** $_{(P)}$

Como ambas ecuaciones deben cumplirse simultáneamente, queda formado un **SISTEMA de ECUACIONES LINEALES**

$$\begin{cases} dq/dt = \text{ENTRADA}_{(Q)} - \text{SALIDA}_{(Q)} = k_2\, p - k_1\, q \\ dp/dt = \text{ENTRADA}_{(P)} - \text{SALIDA}_{(P)} = k_1\, q - (k_2 + K)p. \end{cases}$$

El siguiente esquema explica como se llega cada una de las ecuaciones del sistema.



➢ **RESOLUCIÓN ?, ¿Estamos en condiciones de resolver este problema con los conocimientos adquiridos hasta ahora??. La respuesta es SI.**

$$\begin{cases} dq/dt = -k_1\, q + k_2\, p \\ dp/dt = k_1\, q - (k_2 + K)\, p \end{cases}$$

MODELO MATEMÁTICO para Dos Compartimentos

(SISTEMA LINEAL de ECUACIONES DIFERENCIALES)



- Los SISTEMAS LINEALES de ECUACS DIFERENCS admiten distintos métodos para su resolución: eliminación, sustitución , transformada de Laplace, ***matriciales***. Cómo siempre el método a usar está condicionado a muchas cuestiones; una de ellas, los ***conocimientos*** del resolutor.
- Este tema, su resolución matricial (la más conveniente) no está contemplado en la currícula; así, lo que pretendo mostrar aquí es que a veces, aunque no se conozca el método "óptimo" para el caso, igual se puede resolver el problema; hacer esto con lo que se conoce y … un poco de "ingenio" (como con cualquier "problema") .

- ¿Qué sabemos??: EDOL- Orden ´n´ .
- ¿Qué no sabemos??: que nos la podemos **"*ingeniar*"** Para usar lo que sabemos y resolver !!. El desafío es …. ¡animarse ! Para animarlos les damos un poco de ayuda.

MODELO MATEMÁTICO para p y q

(SISTEMA LINEAL de ECUACIONES DIFERENCIALES)

$$\begin{cases} dq/dt = -k_1 q + k_2 p & (1) \\ dp/dt = k_1 q - (k_2 + K)\, p & (2) \end{cases}$$

- SISTEMA de ECUACIONES DIFS. LINEALES.
- RESOLUCIÓN: " se desconoce" (Rta no válida)
- RESOLUCIÓN : un desafío!!! …pero, que hacer??
- Acudir al **Método de Sustitución** el cual permite, a partir de convenientes y apropiadas sustituciones, "reducir" el sistema a una… **EDOL - ORDEN 2.**

MODELO MATEMÁTICO para "p"

EDOL - ORDEN 2.

(*) Método de sustitución: la técnica de sustitución usada en este método es similar a la usada para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas: se ***despeja*** una de las variables dependientes en una de las ecuaciones (cual de ellas depende de la configuración del sistema), se ***reemplaza*** en la otra y luego se resuelve la ecuación diferencial que resulta de este proceso:

(*) Instrucciones para obtener **p = p(t)**

a) Derivar **(2) ;**

b) obtener **q´** en función de **p** y **p´** :

c) reemplazar **q´** en **(❖)** obtener una **EDOLH** en **"p"**

d) Resolver la ecuación resultante:

$$p(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot e^{r_2 t}$$

Resolver para **q** ; verificar que:

$$q(t) = C \cdot e^{r_1 t} + D \cdot e^{r_2 t}$$

e) analizar la consistencia del modelo

Se observa que para $t \to \infty$ resulta $p(t) \to 0$, es decir se va eliminado el fármaco del plasma (y del tejido) (el modelo ajusta a la realidad) .

Resolución:

(a) → $p'' = k_1 q' - (k_2 + K)\, p'$ **(❖)**

b) "despejar" **q** en **(2)** y "reemplazar" en **(1)** :

en (2) → $k_1 q = p' + (k_2 + K)\, p$

en (1) → $q' = -[p' + (k_2 + K)\, p] + k_2 p$

$q' = -p' - K p$

c) → $p'' = k_1 [-p' - K p] - (k_2 + K)\, p'$

$$p'' + (k_1 + k_2 + K)\, p' + k_1 K\, p = 0$$

d) $r^2 + (k_1 + k_2 + K) \cdot r + k_1 K = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-(k_1 + k_2 + K) \pm \sqrt{(k_1 + k_2 + K)^2 - 4 k_1 K}}{2}$$

e) $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$; (verificar)

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} q(t) = 0$$

Bibliografía

CÁLCULO. CONCEPTOS Y CONTEXTOS, Stewart J., International Thornpson Editores, México (1999)

CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA, Purcell E. y Valberg D, Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1992)

CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA, Edwards C. H. y Penney D E, Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1987)

CALCULUS (Vol. I y II), Apóstol T., Ed. Reverte, España (1973)

ECUACIONES DIFERENCIALES ELEMENTALES@, Edwards C. H. y Penney D.F. Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1993)



Edición: Marzo de 2014.
Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su Programa ALFA III EuropeAid.

